International Conference · October 8, 2016 · Department of Mathematics · University of Bologna

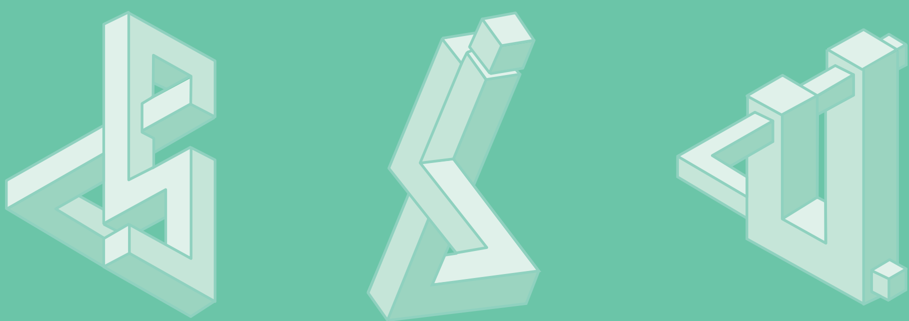
La Matematica e la sua Didattica

Mathematics and Mathematics Education

In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore

Editor
Maura Iori

Preface
Bruno D'Amore



Pitagora Editrice Bologna

Questo volume raccoglie i contributi dei relatori del Convegno Internazionale *La Matematica e la sua Didattica*, tenutosi l'8 ottobre 2016 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, dedicato ai 70 anni di Bruno D'Amore. Al di là dell'occasione, è una raccolta di significative testimonianze dovute ad alcuni tra i massimi protagonisti della ricerca in diversi campi.

This volume collects the contributions of the lecturers of the International Conference *Mathematics and Mathematics Education*, that took place on October 8, 2016, at the Department of Mathematics of the University of Bologna, Italy. The conference was dedicated to the 70 years of Bruno D'Amore. Beyond the occasion, this publication is a collection of relevant evidences from some of the leading researchers in different fields.

In copertina: *Impossible figures*, di Oscar Reutersvärd, 1981 circa.
Front cover: *Impossible figures*, by Oscar Reutersvärd, circa 1981.

ISBN 88-371-1927-5

9 788837 119270

International Conference · October 8, 2016 · Department of Mathematics · University of Bologna

La Matematica e la sua Didattica

Mathematics and Mathematics Education

In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore

Editor
Maura Iori

Preface
Bruno D'Amore

Pitagora Editrice Bologna

-

Direzione del Convegno
Miglena Asenova, Giorgio Bolondi, Maura Iori, Silvia Sbaragli

ISBN 88-371-1927-5

Stampa: Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

http://www.pitagoragroup.it
e-mail: pited@pitagoragroup.it

Questo libro può essere scaricato gratuitamente da ciascuno dei seguenti siti:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

L'evento è stato promosso dai seguenti enti accademici e di ricerca:

Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

NRD (Nucleo di Ricerca Didattica) di Bologna

Dipartimento di Filosofia e Comunicazione dell'Università di Bologna

Dipartimento di Scienze dell'Educazione dell'Università di Bologna

Universidad Distrital Francisco, José de Caldas, Bogotà, Doctorado en Educación

Universidad Nacional de Colombia

Université de Bordeaux Laboratoire Cultures et Diffusion des Savoirs (CeDS EA 7440)

Department of Education of the University of Cyprus

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil

IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, Brasil

Departamento de Innovación y Formación Didáctica of the University of Alicante

University of Helsinki

Università di Parma, Dipartimento di Matematica e Informatica

Scuola universitaria professionale della Svizzera Italiana

Società Matematica della Svizzera Italiana

Dipartimento di Scienze della formazione, dei Beni culturali e del Turismo dell'Università degli Studi di Macerata

Partecipanti al Convegno:

Maria Luisa Altieri Biagi, Luis Carlos Arboleda (Colombia), Gianfranco Arrigo (Svizzera), Miglena Asenova, Massimo Baldacci, Hector Mauricio Becerra Galindo (Colombia), Alberto Bertoni, Luis Ángel Bohórquez Arenas (Colombia), Giorgio Bolondi, Paolo Bonavoglia, Luigi Borzacchini, Umberto Bottazzini, Laura Branchetti, Guy Brousseau (Francia), Andrea Canevaro, Vittorio Capecchi, Anna Cerasoli, Claudio Cerritelli, Theodora Christodoulou (Cipro), Ciro Ciliberto, Tullia Colombo, Pierluigi Contucci, Ubiritan D'Ambrosio (Brasile), Mirko Degli Esposti, Jean Dhombres (Francia), Pietro Di Martino, Benedetto Di Paola, Giovanni Dore, Liliana Dozza, Raymond Duval (Francia), Iliada Elia (Cipro), Piergiuseppe Ellerani, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Giovanni Ferraro, Federica Ferretti, Massimo Ferri, Athanasios Gagatsis (Cipro), Gianfranco Gambarelli, Giangiacomo Gerla, Fredy Enrique González (Venezuela), Jhon Holguin Alvarez (Perù), Maura Iori, Victor Larios Osorio (México), Alice Lemmo, Olga Lucía León (Colombia), Salvador Llinares (Spagna), Daniela Lucangeli, Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Carmelo Mammana, Alain Marchive (Francia), Maria Alessandra Mariotti, Maurizio Matteuzzi, Ivo Mattozzi, Paraskevi Michael-Chrysanthou (Cipro), Deissy Milena Narvaez Ortiz (Colombia), Paolo Negrini, Piergiorgio Odifreddi, Claudia Lisete Oliveira Groenwald (Brasile), Marco Panza, Domingo Paola, Carlo Alberto Parmeggiani, Emilio Pasquini, Erkki Pehkonen (Finlandia), Tito Pellegrino, Tiziano Pera, Luis Radford (Canada), Henry Alexander Ramirez Bernal (Colombia), Tobia Ravà, Pedro Javier Rojas Garzón (Colombia), Pier Giuseppe Rossi, Carla Ida Salviati, Bernard Sarrazy (Francia), Silvia Sbaragli, Luz Marina Sierra (Colombia), Sandra Soler Castillo (Colombia), Aldo Spizzichino, Publio Suárez Sotomonte (Colombia), Carlo Toffalori, Luigi Tomasi, Roberto Tortora, Pierluigi Vannozzi, Carlos Eduardo Vasco (Colombia), Sergio Vastarella, Rodolfo Vergel (Colombia), Paola Vighi, Fernando Zalamea (Colombia), Rosetta Zan.

Programma:

Ore 9:00 – 9:15, saluti delle autorità.
Ore 9:15 – 11:00, brevi interventi di:
  Raymond Duval - Fernando Zalamea - Erkki Pehkonen - Carlos E. Vasco - Paola Vighi - Consolato Pellegrino - Benedetto Di Paola.
Ore 11:15 – 11:30, saluti del Gruppo RSDDM dell'Università di Bologna.
Ore 11:30 – 13:15, brevi interventi di:
  Vittorio Capecchi - Pierluigi Contucci - Massimo Ferri - Piergiuseppe Ellerani - Giangiacomo Gerla - Gianfranco Gambarelli - Luigi Borzacchini.
Ore 14:30 – 16:00, brevi interventi di:
  Maria Luisa Altieri Biagi - Maurizio Matteuzzi - Ivo Mattozzi - Emilio Pasquini - Massimo Baldacci - Pier Giuseppe Rossi.
Ore 16:30 – 17:30, brevi interventi di:
  Tobia Ravà - Carlo Alberto Parmeggiani - Anna Cerasoli - Bruno D'Amore.

Indice

Premessa

Maura Iori

Il Prof. Bruno D'Amore compie 70 anni e il suo NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, ha deciso di festeggiare l'avvenimento con un convegno internazionale a lui dedicato, il giorno 8 ottobre 2016.
Laureato in matematica, in filosofia e in pedagogia, PhD in Mathematics Education, Bruno D'Amore è stato ordinario di Didattica della Matematica presso l'Università di Bologna, ha fondato e diretto l'NRD dal 1984, il Convegno Nazionale *Incontri con la Matematica* dal 1986 (nel 2016 all'edizione numero 30), la rivista *La matematica e la sua didattica* dal 1987 al 2009 e, dopo alcuni anni di silenzio, dal 2016, con l'obiettivo sempre più forte e determinato di dare maggiore visibilità alla ricerca in didattica della matematica, alla divulgazione della matematica e della didattica della matematica. Attualmente è docente e direttore di tesi presso il dottorato in Educación Matemática della Universidad Distrital di Bogotá. Autore di numerosissime pubblicazioni, ha tenuto e tiene tuttora corsi, conferenze e seminari in molte università europee e americane.
È conosciuto a livello internazionale non solo come matematico, studioso e ricercatore nel campo della didattica della matematica, non solo come critico d'arte, saggista e divulgatore, ma anche per la passione, l'impegno e l'entusiasmo che accompagnano e contraddistinguono da sempre la sua intensa attività di studio, ricerca, promozione e diffusione della cultura, nel suo senso più ampio, con estrema professionalità.
Un Maestro formidabile che ha saputo suscitare e suscita tuttora in tanti allievi e insegnanti la passione per la matematica e la sua didattica, il coraggio e la voglia di rimettersi in gioco non solo come allievi e come insegnanti, con gli strumenti che la ricerca in didattica della matematica mette a disposizione, ma anche come persone, esseri umani, di fronte alla cultura, nella sua unicità e nella sua molteplicità di espressione. Non solo un grande Maestro, ma anche un Amico speciale, unico, sempre presente e disponibile ad aiutare e a

consigliare; una persona di straordinaria cultura, nel senso più alto e profondo del termine, di rara sensibilità e umanità.
Con stima, devozione e gratitudine, dedichiamo a lui questo volume. Un volume che raccoglie i contributi di alcuni tra i più autorevoli esponenti in diversi campi della ricerca a livello nazionale e internazionale, contributi di amici, colleghi e allievi che hanno voluto rendergli omaggio in occasione della giornata dell'8 ottobre.
Una splendida occasione per festeggiare il suo settantesimo compleanno e ringraziarlo ancora una volta per la preziosa e straordinaria attività di studio, di ricerca e di divulgazione che ha saputo condurre e che continua a condurre con grande maestria, impegno e dedizione; ancora una volta per l'entusiasmo, la passione, le conoscenze e le esperienze di una vita che ci ha regalato e continua a regalarci, senza mai smettere di sorprendere, stupire e meravigliare, anche i suoi allievi, colleghi e amici più cari.
È per noi motivo di orgoglio raccogliere in questo volume, insieme ai preziosi contributi scientifici, le numerose testimonianze di stima, gratitudine e amicizia di studiosi, ricercatori, amici, colleghi e allievi di tutto il mondo, nella giornata a lui dedicata.
I nostri più sinceri ringraziamenti a tutti coloro che hanno partecipato a vario titolo all'evento, e ai numerosi enti accademici e di ricerca che lo hanno promosso, in particolare il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, sede del convegno.
Un ringraziamento speciale a Miglena Asenova, Giorgio Bolondi e Silvia Sbaragli, che con impegno ed entusiasmo lo hanno reso possibile.

Prefazione

Bruno D'Amore

Abstract. I take this opportunity to make a summary of some personal beliefs about mathematics education, such as research and practice, developed over the years.

Sono profondamente commosso e colpito dall'amicizia, dalla devozione, dalla simpatia dimostrata anche in questa occasione dai miei allievi, alcuni in modo particolare, che hanno voluto farmi questo regalo: chiamare a raccolta amici, colleghi, collaboratori, altri allievi per ricordare tutti insieme che cos'è la didattica della matematica, che importanza essa abbia, perché necessita di ricercatori seri, profondi e preparati; un inno a più voci dedicato a una delle discipline più belle del mondo e ad altre che le stanno bene accanto.
Approfitto allora di questa magnifica occasione internazionale, stupito dai nomi di tutti coloro che hanno voluto partecipare, con o senza un testo, per fare una specie di … confessione personale su alcuni punti che ritengo chiave per la didattica della matematica, sia come filone di ricerca, sia come prassi quotidiana di lavoro in aula (i miei due "pallini", che vedo ancora fortemente intrecciati). Auspico che su questi temi si possano ancora sviluppare ricerche in futuro.

Confessione a 70 anni

La storia

Mi sono laureato in matematica all'Università di Bologna all'età di 22 anni e ho deciso allora che nella mia vita non avrei potuto far altro che il matematico; e così ho cominciato subito a fare ricerca in questo campo, grazie a una borsa di studio del CNR trasformata poi in borsa del MIUR.
Alcuni anni dopo, quando mi è stata presentata la didattica della matematica (che ancora nemmeno si chiamava così) mi è sembrata un insieme di vaghe

banalità senza capo né coda; ma poi, studiando prima Efraim Fischbein e poi Guy Brousseau, s'è aperto un mondo, l'ho vista subito come una matematica applicata con grandi potenzialità teoriche scientifiche che appena iniziavano a delinearsi. Nel frattempo ero diventato docente e fondai nel Dipartimento di Matematica di Bologna, in totale accordo con l'allora direttore, un NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica) non per convinzione, non per fare io stesso ricerca in didattica in prima persona, ma solo perché altri lo potessero fare: mi sembrava giusto dare spazio a questo genere di ricerche (non mi ricordo più bene, ma mi pare che in Italia esistessero già da poco due NRD). Io restavo un matematico, con tanta curiosità per questi studi nuovi, visti però come dall'esterno.
C'era parecchia confusione a quei tempi e pareva che, per capire la didattica, si dovesse studiare pedagogia; e così decisi di laurearmi in pedagogia sempre a Bologna (ebbi la fortuna di incontrare alcuni personaggi di alta levatura culturale); quattro anni e una tesi che venne subito pubblicata: forse era il mio primo contributo alla didattica della matematica.
Ero consapevole di essere profondamente ignorante in generale e nelle discussioni con il mio maestro di epistemologia Francesco Speranza (che per pochi mesi era stato anche mio docente di geometria) avevo sempre la peggio; inoltre capivo che nello studio della didattica bisogna essere ferrati non solo in epistemologia, ma anche in filosofia; e così decisi di laurearmi in filosofia sempre a Bologna (ebbi la fortuna di incontrare intelligenze davvero notevoli); quattro anni e una tesi che non ho mai voluto pubblicare.
Quasi senza accorgermene, ero entrato già da tempo nel mondo della ricerca in didattica della matematica, avevo lasciato la matematica (che però ho sempre amato e sento di poter amare per sempre) anche come insegnamento e non solo come ricerca. Nel frattempo avevo dato il via al convegno annuale *Incontri con la matematica*, oggi, nel 2016, all'edizione numero 30; e alla rivista *La matematica e la sua didattica*, prima edita dall'editore Armando Armando di Roma, poi da Pitagora di Bologna e oggi dall'associazione "Incontri con la Matematica".
Lo studio delle opere di Brousseau e di Duval (e l'amicizia immediata e profonda con questi straordinari pionieri) cambiò la mia vita e divenni un fanatico della didattica della matematica; l'ho praticamente vista nascere, l'ho seguita nelle sue evoluzioni, ho conosciuto e assiduamente frequentato i giganti che l'hanno creata passo dopo passo.
Nel 1996 fui Chief Organizer del Topic Group: *Infinite processes throughout the curriculum*, all'VIII ICME, Sevilla, 14–21 luglio 1996; Raymond Duval era, di fatto, l'unico *advisor*; lì le occasioni di incontro furono moltissime.
Studiavo come un folle e, più studiavo, più domande mi facevo. Fu allora che, per rispondere ad alcune di queste, decisi di prendere un PhD in *Mathematics Education*.

Ho fatto ricerche di carattere empirico che mi hanno sempre dato molta soddisfazione; e di carattere teorico; ho lavorato tanto con gli insegnanti in aula con gli studenti le mattine e nei pomeriggi senza studenti per capire bene quali siano i problemi che affliggono la scuola e il perché profondo del mancato apprendimento della matematica da parte di alcuni studenti.
Ho avuto allievi brillanti e capaci dei quali sono fiero e ho collaborato con cervelli di prim'ordine. Capisco appieno la famosa frase di Newton sulle *spalle dei giganti*, solo che io i giganti della didattica della matematica li ho conosciuti e frequentati di persona, e ancora oggi sono grato a tutti loro.

La mia visione

La mia visione della didattica della matematica è, come ho già detto, quella di una matematica applicata; ho convinzioni radicate che una volta sarebbero state normali ma che adesso sembrano superate; le elenco di seguito, lasciandole alla discussione dei miei allievi. In quel che segue, per taluni punti basta una breve battuta, per altri serve un più lungo e articolato discorso.

a) Per occuparsi di didattica della matematica, bisogna essere esperti in matematica.

b) Prima di parlare di didattica della matematica con gli insegnanti in servizio o con gli studenti in formazione come futuri insegnanti, bisogna essere certi che costoro capiscano i temi di matematica che costituiscono l'oggetto del discorso. Se così non è, occorre rimediare per non rendere vago e vuoto il discorso. Bisogna avere il coraggio di abbandonare subito il discorso sulla didattica per affrontare quello sulla matematica.

c) Per fare ricerca in didattica della matematica bisogna essere matematici. (Ho però tre esempi illustri contrari a quel che io stesso sto dichiarando, tre psicologi che, secondo me, hanno dato lustro alla didattica della matematica, tre cari amici: Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud, Raymond Duval).

d) La didattica della matematica è una matematica applicata alla problematica dell'insegnamento-apprendimento, una vera e propria scienza; in essa sono già confluiti elementi in qualche modo acquisiti da altri campi del sapere umano, destrutturati dal loro mondo originario e adeguatamente ristrutturati, trasformati in saperi idonei al mondo della didattica della matematica.
I mondi di provenienza di tali saperi sono principalmente i seguenti (ma l'elenco non è esauriente):

- la storia della matematica,
- l'epistemologia della scienza e in particolare della matematica,
- la pedagogia,
- la didattica generale,
- la psicologia dell'apprendimento,

- la psicologia evolutiva,
- la teoria dei modelli,
- la filosofia,
- la linguistica,
- la semiotica,
- la sociologia,

e altre.
A chi mi chiede come fare a diventare esperti in didattica della matematica, dichiaro che è inutile compiere il mio percorso di studi affannoso e dispersivo, perché tanto quel che serve di queste discipline è, oggi, già parte costituente della didattica della matematica.
Corollario concreto e polemico di questa lunga disquisizione: quando si suggerisce che la formazione di un docente di matematica consista di laurea in matematica seguita da un corso di pedagogia, si sta commettendo un errore mostruoso di ingenuità culturale; quel che professionalmente serve davvero, dopo la matematica, è la didattica della matematica che già ingloba quel che di pedagogia serve davvero.

e) Lo scopo della ricerca in didattica della matematica è quello di studiare situazioni d'aula (nelle quali l'oggetto Sapere è la matematica) e di creare strumenti per aumentare la qualità dell'apprendimento della matematica da parte degli studenti. Come fattore secondario: l'insegnante che, già esperto nella disciplina, studia con passione, entusiasmo e successo la didattica della matematica, sarà talmente padrone di entrambe che apporterà modifiche molto consistenti e radicali alla sua professione docente.
Tremo quando sento che c'è chi si aspetta che la didattica della matematica sia una sorta di "insegnare a insegnare"; è la cosa più stupida che si possa affermare o aspettarsi. Si può ragionevolmente pensare, come ho già detto, che un docente di matematica che conosca la didattica della matematica riveda tutta la sua professionalità docente e cambi radicalmente la sua forma di insegnare, le sue metodologie (al plurale), le scelte intrinseche alla trasposizione didattica, l'ingegneria didattica, i contenuti, le attese, la valutazione intesa in senso ampio (della sua stessa efficacia, delle scelte curricolari e del sapere/competenza dei suoi studenti).
Un insegnante che studia la didattica della matematica, come alcuni dei risultati della nostra ricerca hanno mostrato, cambia radicalmente le sue convinzioni sull'apprendimento, dunque sull'insegnamento, e perfino sulla matematica stessa e sul suo significato.

f) Il proliferare di un'enorme varietà di teorie in didattica della matematica in questi suoi 40 e poco più anni di vita è certo dovuto al fatto che ogni teoria affronta tematiche diverse, ha scopi specifici diversi, si occupa di aspetti diversi della ricerca; mai una teoria nuova esclude o scaccia una vecchia, a

meno che non la inglobi, ma senza rifiutarla; una teoria nuova si affianca a una vecchia, perseguendo altri fini di ricerca.
Su questo tema voglio soffermarmi un po' più a lungo.
Il termine "teoria scientifica" o "scienza" è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta, …) condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione, …).
Tralasciando per brevità il percorso arcaico dell'idea di scienza, nei modi attuali di considerare una teoria scientifica si trova la nozione di "paradigma" (Thomas Kuhn); si intende con "paradigma" l'insieme delle ipotesi teoriche generali e l'insieme delle leggi per le loro applicazioni, comunemente accettate dagli appartenenti a una stessa comunità scientifica, e implicanti un sostanziale accordo nei giudizi professionali, di merito e di pertinenza.
Nella formazione di una nuova comunità scientifica, c'è un momento a partire dal quale si può parlare appunto di "paradigma". La fase che precede è caratterizzata da una disorganizzazione, priva di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa: si può dire che in questa fase vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire i punti di vista propri e altrui. I lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa. La tesi di Kuhn più famosa è quella secondo la quale il progresso scientifico procede secondo "rivoluzioni", dato che si ha passaggio, evoluzione, solo dopo una crisi.
Un altro contributo fondamentale è quello proposto negli anni '60 da Imre Lakatos, con l'idea di "programma di ricerca", cioè una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare).
Ogni programma deve contenere:

- un nucleo o centro del programma;
- un sistema di ipotesi ausiliarie;
- una euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei problemi.

In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se:

- fa predizioni che la precedente non era in grado di fare;
- alcune di tali predizioni si possono provare come vere;
- la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare.

Un altro notevole contributo teorico è quello dovuto a Mario Bunge, negli anni '80: la scienza è un corpo in costante accrescimento di conoscenze, caratterizzato dal fatto di trattare di conoscenze razionali, sistematiche, esatte, verificabili (e dunque anche fallibili). La conoscenza scientifica coincide con l'insieme delle idee su un certo argomento, stabilite in modo momentaneamente provvisorio; ma poi, il concorso dei singoli e lo scambio di informazioni e di idee dà luogo a una comunità scientifica. Quel che caratterizza la differenza tra campi di credenza (religioni, ideologie, politiche, …) e campi di ricerca scientifica è il tipo di modalità secondo le quali avvengono i "cambi" nelle idee; nei primi, i cambi avvengono a causa di "rivelazioni", controversie, pressioni sociali; nei secondi c'è un cambio continuo a causa degli stessi risultati della ricerca.

Secondo richieste più "deboli", una teoria scientifica si definisce oggi tale quando dispone di un oggetto specifico di studio, di un suo proprio metodo di ricerca e di un suo specifico linguaggio condiviso; a questa richiesta fanno spesso riferimento i teorici delle scienze umane, per chiamare "scienze" appunto, tali domini di studio.

Questa richiesta "debole" ha fatto proliferare negli ultimi anni l'appellativo di "scienze" dato a molte discipline. Infatti, qualsiasi disciplina allo sviluppo della quale concorrano studiosi che si riconoscano e si accettino reciprocamente come esperti in essa, fondando una comunità di pratiche condivise, che facciano uso dello stesso linguaggio, prima o poi acquisisce proprio le caratteristiche appena descritte. Il problema della ripetibilità degli esperimenti, della corretta definizione delle variabili in gioco, del senso che acquistano termini come "rigoroso", "vero" ecc., tende a svanire o a subire profonde modifiche.

Quel che c'è di comune in tutte queste interpretazioni è che le teorie scientifiche non possono essere creazioni o invenzioni di un singolo, ma deve esserci una comunità di persone tra le quali vige un sostanziale accordo sia sui problemi significativi della ricerca, sia sulle modalità nelle quali essa si esplica, sia sul linguaggio usato.

In questa direzione, Thomas A. Romberg, alla fine degli anni '80, definiva le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile affermando che:

- Deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole ci devono essere problematiche centrali che guidano il lavoro dei ricercatori e che siano condivise.
- Le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale.
- Il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comune, sulla quale il gruppo è d'accordo.
- Il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile.

Tra le scienze così intese, ben rientrano le didattiche disciplinari e dunque, in particolare, la didattica della matematica; è sotto gli occhi di tutti, infatti:

- l'esistenza di un folto gruppo internazionale di ricercatori nelle varie didattiche disciplinari che hanno interessi comuni;
- per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise;

- che danno (da alcuni decenni) spiegazioni di carattere causale;
- che hanno elaborato un vocabolario comune, condiviso;
- essi hanno convegni specifici e loro riviste specifiche, all'interno dei quali le proposte di comunicazione o di pubblicazione vengono vagliate in base a procedimenti oramai ampiamente condivisi.

Siamo dunque in pieno nelle condizioni proposte da Romberg per poter affermare che la didattica della matematica ha tutte le caratteristiche per poter essere considerata scienza consolidata e stabile.
L'amico – collega – più volte coautore Luis Radford propone che una teoria sia vista come:

> un modo di produrre interpretazioni e modi di azioni basati su:
> un sistema, P, di *principi fondamentali*, che includa visioni implicite e affermazioni esplicite che delineano i confini dell'universo del discorso e della prospettiva di ricerca adottata;
> una *metodologia*, M, che includa tecniche di raccolta dati e di interpretazione dei dati, sostenuti da P;
> un insieme, D, di *domande di ricerca* paradigmatiche (modelli o schemi che generano domande specifiche quando si presentano nuove interpretazioni o quando si approfondiscono, ampliano o modificano i principi).

Ancora una volta, la didattica della matematica calza a pennello con questo tipo di richiesta-definizione.

g) Io non sono, in nessun caso, favorevole alla drastica lotta fratricida fra teorie in didattica della matematica; sono invece a favore della cosiddetta unificazione delle teorie, in più d'una delle modalità nelle quali questa unificazione può darsi. Io stesso ho molto lavorato e prodotto in questa direzione.

Favorire e usare più metodologie di insegnamento, se si vuol produrre apprendimento

Prendo in considerazione una frase di Immanuel Kant che, parafrasando e riassumendo, suona più o meno come segue: così come un liquido assume la forma del contenitore che lo contiene, il concetto assume la caratteristica di chi se lo sta costruendo. Dunque il concetto viene decostruito nella sua apparente obiettività e viene ricostruito adattandolo alla singola persona.
La ricerca in didattica della matematica ha confermato che vale anche per l'insegnamento-apprendimento della matematica quanto segue: a fronte di un emittente e di una emissione (messaggio), ogni essere umano è costretto dalla sua stessa natura umana a interpretare tale messaggio; cioè il ricevente non riceve in realtà il messaggio dell'emittente, ma lo trasforma, lo personalizza, lo interpreta. Detto in altre parole: ognuno impara a modo suo, sulla base della sua personalità, della sua esperienza, della sua cultura. Cioè, se in aula ci sono

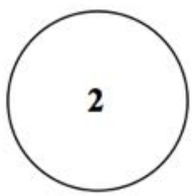
vari studenti, il loro apprendimento non sarà univoco, non sarà banalmente coincidente con quel che l'insegnante ha detto o ha fatto fare, ma ogni apprendimento personale sarà il risultato di un'interpretazione del messaggio iniziale. (Naturalmente sappiamo bene che ci sono varie posizioni più o meno "forti" al riguardo, da alcune molto radicali ad altre più deboli).
Dunque, l'idea di un insegnamento univoco, dell'uso di una sola metodologia di insegnamento, con un metodo pre-confezionato, è già in sé stessa un errore didattico; non si può neppure pensare di proporre UN metodo in aula. Il solo pensarlo è già l'anticamera di un sicuro insuccesso apprenditivo. L'insegnante dovrà usare più metodologie, più strumenti, più metodi, nella speranza di "raggiungere", con ciascuno di essi, qualche studente; se poi parecchi studenti riceveranno messaggi "diversi" basati su metodologie diverse, meglio, apprenderanno da più punti di vista e di conseguenza il transfer cognitivo sarà facilitato e la costruzione cognitiva dell'oggetto matematico sarà più completa.
Sarebbe opportuno scientificamente ed eticamente che *tutti* coloro che hanno ideato, che pensano di aver ideato, un metodo o uno strumento o una metodologia didattica, la sottoponessero al severo e serio giudizio scientifico, o la proponessero su riviste scientifiche con referee, o partecipassero a convegni di ricerca o anche solo convegni cui partecipano colleghi critici.
In quest'ambito, in passato era normale creare "materiali strutturati" (cioè specifici e specificamente predisposti: chi non ricorda questa dizione?) per proporre didattiche univoche; ricordo solo due esempi che hanno avuto successo planetario, i blocchi logici (e altro) dell'ungherese Zoltan Paul Dienes e i papygrammi (e le frecce e il minicomputer) del belga Georges Papy; entrambi hanno dominato il mondo dell'insegnamento matematico proponendo strumenti univoci per l'insegnamento-apprendimento della matematica. Si trattava di due veri matematici, il primo con dottorato a Londra, il secondo a Bruxelles, non dilettanti improvvisati; ho avuto l'occasione di conoscerli personalmente entrambi e di frequentarli anche in modo privato.
Gli studi analitici e critici di Guy Brousseau, il creatore della moderna didattica della matematica, hanno stroncato negli anni '80 i lavori didattici di Dienes, mostrando in forma assolutamente evidente un deleterio "effetto Dienes" che lo stesso riconobbe pubblicamente (a Forlì, l'8 maggio 1993, in mia presenza). Mentre la critica demolitrice degli strumenti ideati da Papy avvenne all'interno dello stesso gruppo che lui aveva creato (il GIRP, *Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique*, con sede a Walferdanche, Lussemburgo, del quale sono stato presidente per 3 anni).
Oggi nessuno parla più di quei metodi, eppure hanno illuso il mondo, all'interno di quella trappola che si chiamò "nuova matematica" o "matematica moderna".
Non si può essere contrari a uno strumento o a un metodo in via di principio; anzi, magari ci fossero mille strumenti e mille metodi a disposizione degli insegnanti! Quello a cui ci si deve opporre non è uno strumento o un metodo,

l'errore è la scelta univoca o l'affidare allo strumento (al singolare) o al metodo (al singolare) un potere taumaturgico-didattico che esso non può avere, perché questo spetta solo al docente, al maestro, all'essere umano che insegna e non a uno strumento o a un metodo. Il delicatissimo e complicatissimo processo di insegnamento-apprendimento è connesso agli aspetti relazionali che legano i tre elementi della situazione d'aula: docente, allievo e Sapere (matematico).
I numeri in colore (le reglettes) di Cuisenaire-Gattegno, i BAM di Dienes, le frecce di Papy, la retta numerica, i blocchi logici di Dienes, gli abaci, i soroban, le calcolatrici, le LIM, ogni TIC, ogni software didattico, ben vengano, più strumenti sono disponibili e maggiore è la possibilità di scelta da parte del docente. Più strategie didattiche questi conosce e meglio è, ne potrà così applicare diverse.
Quel che è ridicolo antididattico sbagliato è il credere che sia possibile una scelta univoca, che in uno solo di questi (o di altri analoghi) sia nascosta la ricetta, la magia, la panacea.
Bisogna usare, saper usare, ciascuno strumento, ciascuna metodologia, e allo stesso tempo diffidarne, conoscerne i limiti, perché questi ci sono sempre, in ogni strumento.
Le rivelazioni mistiche magiche dei creatori di teorie didattiche infallibili appartengono alla categoria di credenze che, nel punto f, ho chiamato "campi di credenza". Sono più vicine all'astrologia che alla scienza o alla didattica anche solo pensata come scienza empirica.

Un esempio di analisi delle situazioni d'aula

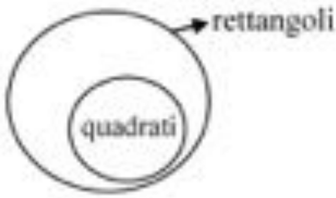
Guy Brousseau e io abbiamo studiato alcuni anni fa tanti esempi e denunciato per iscritto il fenomeno dello "scivolamento metadidattico". Questi fenomeni appaiono a seguito di una sconfitta, di un insuccesso, generalmente inevitabile; ma il fatto non è riconosciuto immediatamente come tale nella didattica ingenua.
Gli insegnanti spiegano, poi spiegano le spiegazioni, le illustrano e poi spiegano le illustrazioni … Ogni volta i tentativi di correggere l'insuccesso apprenditivo iniziale si rivelano inappropriati. Il fenomeno si amplifica e diventa rapidamente incontrollabile. E così, come nelle grandi pandemie del Medioevo, alcuni ne approfittano per accusare ogni sorta di pratiche scolari che essi pretendono di rinnovare, mutilandole, per mettere al rogo qualche "teoria" e per dimenticare i risultati delle esperienze considerate nefaste.
Facciamo un esempio concreto. Alla fine degli anni '50, la riorganizzazione delle conoscenze matematiche stava concludendo un centinaio d'anni di scoperte notevoli. La società, i centri culturali e l'insegnamento riconobbero la necessità di adattarvisi. Ma la maggiore difficoltà risiedeva nell'introduzione dei fondamenti: come addomesticare l'assiomatica in un insegnamento

abituato ad associare degli oggetti ai suoi linguaggi? Tutti gli aspetti della matematica hanno bisogno della logica sotto una forma appropriata. Venne proposto allora di usare una teoria ingenua degli insiemi come sostituto della logica classica e di sostituire la matematica a scuola con tale teoria. *Si tratta di un primo scivolamento didattico*: lo strumento diventa esso stesso l'oggetto di studio.
Per usare più facilmente la logica, le si sostituisce una specie di descrizione o di modello. In realtà si semplifica molto: basta dare delle regole d'uso. Si pensa alla teoria degli insiemi, ma in realtà si introducono grafici, il linguaggio stesso degli insiemi è reso più "concreto" facendo appello a una idea di Leonhard Euler che usava dei cerchi per illustrare, enumerare e classificare i sillogismi per una propria nobile allieva. Sembrò all'epoca che questa idea avrebbe permesso di rendere molto più facile l'insegnamento della logica di Aristotele e il fondamento di tutto il linguaggio matematico, anche a bambini molto giovani, così i termini sarebbero stati gli stessi, dalla Scuola dell'Infanzia all'Università. *Si tratta di un secondo scivolamento didattico*: dallo studio della logica si passa allo studio dello strumento grafico che in realtà dovrebbe costituire solo una rappresentazione.
Ma questa volta la "rappresentazione" non è di fatto che una metafora: gli insiemi non hanno delle frontiere, mentre il loro disegno sì; l'unione di parti non sono più visibili come "insieme" etc. Tuttavia, anche nell'insegnamento bisogna coniugare delle nozioni abbastanza ben definite con delle altre che non sono altro se non approcci "trasposti": le regole del gioco sono diverse, soprattutto ai livelli inferiori nei quali occorrono delle regole d'uso ben *formulabili* e *consistenti*.
La lingua colloquiale messa in moto per la descrizione della metafora dei cerchi di Eulero costituisce un *nuovo scivolamento meta*: dallo studiare lo strumento grafico si passa al linguaggio comune che lo descrive. Georges Papy propose al tempo di colorare le frontiere di tali cerchi per identificare le componenti connesse di uno stesso insieme. Ma la materializzazione degli elementi attraverso dei punti solleva nuove contraddizioni.



Non si sa se il segno 2, rappresentato in un cerchio, ne è l'unico elemento, o se è una specie di variabile, un elemento identificato a titolo di esempio che ne evoca altri, per esempio tutti i pari, non rappresentati, o se l'elemento è lo stesso segno "2".

Ci vuole anche un vocabolario specifico per descrivere queste figure. In lingua francese, sotto la spinta di Gorges Papy, si chiamarono dapprima "patate" e poi "papygrammi"; in italiano non assunsero denominazioni specifiche nelle aule, solo "diagrammi degli insiemi" o "diagrammi di Eulero-Venn" e la disciplina relativa si chiamò "insiemistica". Questo nuovo vocabolario si può considerare come l'elemento costitutivo di questo ultimo e definitivo scivolamento: la matematica iniziale si è persa, non è più chiaro che cosa si sta insegnando e che cosa si sta chiedendo di apprendere.
Se si volesse accettare la metafora insiemistica, per evitare d'un sol colpo gli scivolamenti successivi, si sarebbe dovuto restringere i disegni a un ruolo di pura illustrazione, di mezzo d'espressione senza codificarli né insegnare delle regole grafiche e linguistiche a loro proposito. Essi avrebbero formato un insieme di conoscenze implicite per rappresentare ciò di cui si parla, per convincersene, e che può essere utilizzato; ma senza la necessità di uno statuto di sapere significativo, comprovante, dunque senza grammatica e senza teoria. Ciò che noi chiamiamo una conoscenza, ma non un sapere.
In altre parole, si può usare un grafico come il seguente:



per illustrare che "Tutti i quadrati sono rettangoli, ma ci sono rettangoli che non sono quadrati", senza dover trattare in modo specifico una teoria degli insiemi che comprenda: insiemi, proprietà, elementi, appartenenza, insieme vuoto, insieme universale, inclusione, intersezione, unione, sottoinsieme, inclusione, prodotto cartesiano, corrispondenza biunivoca, relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, passaggi al quoziente eccetera, tutto inutilmente sovradimensionato per giungere a un banale uso di alcuni grafici che già sono del tutto comprensibili.
Gli scivolamenti metadidattici possono prodursi a proposito di qualsiasi nozione matematica, ma anche azione matematica.
Per esempio, consideriamo lo pseudo insegnamento dei metodi di *problem solving*.
Le difficoltà che incontrano gli allievi nella risoluzione dei problemi lasciano spesso gli insegnanti disarmati. L'allievo sa i "suoi" saperi, i "suoi" teoremi (talvolta solo "in atto") e tuttavia egli non trova il mezzo di usarli per risolvere i problemi che gli sono posti. Una risposta classica al livello primario consiste nel presentare allo studente che ha fallito problemi analoghi in modo che

l'allievo possa riprodurre la soluzione che gli si è insegnata in un caso simile, capendo la similitudine ma non il senso della risoluzione.
Egli non ha bisogno di sapere se la sua risposta è adeguata, né perché; basta che essa sia conforme al modello atteso come risposta dall'insegnante. Egli può così rispondere nell'àmbito di un contratto didattico senza comprendere perché la sua soluzione è corretta. Qualsiasi cosa dicano a questo proposito le varie teorie della conoscenza e dell'apprendimento che sono fondate sul "riconoscimento" del sapere e sulla sua citazione, lo studente simula una risoluzione che può non comprendere.
In un percorso più concreto, per guidare gli allievi, George Polya si prodiga in consigli neo cartesiani per l'organizzazione del lavoro di risoluzione dei problemi, assumendo sé stesso come paradigma: comprendere l'enunciato, connetterlo con conoscenze previe, decomporlo in tappe, … Egli suggerisce così di tentare dei passi più euristici: cercare delle similitudini, un esempio, un controesempio, generalizzare, comparare, paragonare … Questo lavoro, che voleva essere puramente descrittivo, è servito di base a un fallimentare e ingenuo tentativo di insegnamento della risoluzione di problemi fondato sull'uso di queste euristiche. Si tratta chiaramente di uno scivolamento metadidattico: la risoluzione di problemi si vede sostituita da uno studio di procedure di tali risoluzioni. Se è probabile che gli esempi dati sono di natura tale da rassicurare e da rendere agguerriti gli allievi, è chiaro che la situazione è scivolata senza cambiare di natura: l'allievo cerca di applicare le sue euristiche così come cercava di applicare le sue conoscenze e i suoi teoremi e il successo non è affatto più assicurato, a meno di scegliere dei problemi ad hoc. Bisogna allora cercare delle euristiche di secondo ordine? Anche se il processo non è ricorsivo, l'inganno è fatale. La sola differenza è che i teoremi sono dei saperi matematici che contengono le loro stesse condizioni di validità, il che non è il caso delle euristiche che sono solo delle conoscenze. Il trattarle come dei saperi è un errore epistemologico e didattico.
Ancora più mortale il sogno, prosecuzione acritica di questo scivolamento metadidattico, di trasformare la risoluzione dei problemi in algoritmi; ce ne sono di due tipi.
1. Invece di risolvere il problema, costruire il diagramma a blocchi o di flusso che lo illustra; questa scelta idiota portò a studiare i diagrammi a blocchi e di flusso come se fossero questi l'oggetto di apprendimento; uno scivolamento metadidattico fallimentare.
2. Sistemi normativi di effetto nullo o negativo: "Cerchia di rosso i dati numerici del testo del problema; sottolinea di color verde la domanda; cerca la parola chiave che ti permette di riconoscere l'operazione che devi usare per risolvere il problema …".
Tutte queste sono condizioni di scivolamento metadidattico che trasformano la risoluzione del problema in banalità che non aiutano in nessun modo l'attività di risoluzione dei problemi. Si prenda a mo' di esempio il mio esempio del

1992: “Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?”; si cerchino pure in rosso i dati 12 e 6; si sottolinei pure in verde la domanda: “Quanti anni ha il pastore?”; si cerchi anche la parolina chiave che aiuta a decidere l’operazione … Già, ma quale? “Quanti?”, “e”? Il risolutore che davvero segue queste “regole” è condannato a fornire la risposta “18” che caratterizza la stragrande maggioranza delle risposte a questo problema proposto oralmente. Lo studente non legge più criticamente il testo del problema per dargli una risoluzione ragionevole, viene stordito dallo scivolamento metadidattico imposto, effettua i passi suggeriti e poi dimentica la logica del testo e spara proposte numeriche che gli sembrano congrue, di fatto quelle obbligate dalla procedura demenziale suggerita.
Lo *scivolamento metadidattico* consiste dunque per l’insegnante nello spostare l’oggetto del suo insegnamento da un’attività o da una nozione, su uno dei suoi mezzi di controllo. Per esempio, l’insegnante di lingua sostituisce la correzione di un errore degli allievi con l’insegnamento dell’enunciato della regola di grammatica che è stata violata. Questa azione è perfettamente legittima, in via di principio; ma la percezione di questo atteggiamento docente da parte dello studente è come un allontanamento dalla circostanza specifica, una generalizzazione del suo errore concreto.
Tutto ciò può talvolta costituire un dirottamento di attività assai dannoso; i personaggi coinvolti nell’insegnamento-apprendimento, insegnante e allievo, perdono di vista (entrambi) il loro progetto e si smarriscono. Per esempio:

- invece di studiare la proporzionalità, si studia la regola (una volta si chiamava “la regola del tre”) da seguire per rispondere a una domanda sulla proporzione;
- invece di capire le condizioni interne intrinseche di una sistema di due equazioni lineari, si studia il metodo di Cramer;
- invece di studiare la logica degli enunciati, si imparano a memoria le tavole di verità semantiche dei connettivi;
- invece di studiare che cos’è una superficie, si danno le regole per calcolare l’area di un quadrilatero;
- invece di studiare e apprendere il teorema di Ruffini, si impara la regola di Ruffini;
- i test nazionali e internazionali, da mezzo di controllo dei risultati dell’apprendimento, sono prima diventati degli obiettivi di insegnamento, poi dei mezzi di insegnamento e infine l’oggetto stesso dell’insegnamento; essi tendono a trasformare le nostre concezioni di conoscenza e apprendimento a una sorta di esercitazione;

eccetera.
Si tratta sempre evidentemente di scivolamenti metadidattici, estremamente potenti e pericolosi.

Riferimenti bibliografici

"Pensino ora i miei venticinque lettori" (25?; magari, caro Alessandro!) che noia sarebbe s'io decidessi anche solo di tentare qui un elenco di quei testi cui ho fatto implicito riferimento …

Chiedo scusa per questa voluta omissione. Ma questa è un'occasione di festa.

D'altra parte i miei allievi più devoti sapranno a quali miei lavori scritti mi sono voluto riferire.

Preface

Bruno D'Amore

Abstract. I take this opportunity to make a summary of some personal beliefs about mathematics education, such as research and practice, developed over the years.

I'm deeply moved and touched by the friendship, the devotion, and the sympathy also displayed in this occasion by my students, some of whom in a particular way, who wanted to give me this present: inviting my friends, colleagues, collaborators, other students in order to reminisce together what is mathematics education, what is its importance, why it requires serious, deep, and well-prepared researchers; a collective tribute dedicated to one of the most beautiful disciplines in the world as well as to other closely related ones.
I would like to seize this wonderful international opportunity, amazed by the names of all the persons who wanted to participate, with or without a paper, to make kind of a … personal confession about some of the points I consider to be key in mathematics education, both in research activities and in daily classroom work (my two favorite subjects, which in my opinion are still strongly interrelated). I hope that these subjects could also lead to future research.

Confession at 70 years old

My story

I received my degree in mathematics from the University of Bologna at 22 years old, and decided then that in my life I could not do anything else other than being a mathematician; and so I immediately started research in this field thanks to a CNR (*Consiglio Nazionale delle Ricerche*) scholarship, which was then converted into a MIUR (*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*) scholarship.

A few years later, when mathematics education (which was not even called that back then) was presented to me, it seemed to me to be a set of vague trivia without a beginning or end; however later on, first studying Efraim Fischbein and then Guy Brosseau, an entire world opened up: I immediately recognized it as a kind of applied mathematics with potential for many theoretical applications that were just starting to be defined. In the meantime I had become a professor and founded an NRD (*Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica*) in the Mathematics Department of the University of Bologna with strong backing from the then director. I did this not out of a personal belief, not to be personally involved in research in didactics myself, but only to give this opportunity to others: It seemed right to me to give room for this kind of research (I don't remember exactly, but I think two NRD groups had just been started in Italy at the time). I continued being a mathematician, with a lot of curiosity for these new studies, but seen from the outside.

There was a lot of confusion back then; it seemed that in order to understand didactics, one needed to study pedagogy, so that I decided to get a degree in pedagogy, again from the University of Bologna (I was fortunate to meet some persons of high intellectual stature); four years later my thesis was immediately published: Perhaps this was my first true contribution to mathematics education.

I was aware of being profoundly ignorant in general; in the discussions with my epistemology teacher Francesco Speranza (who had also been my geometry teacher for a few months), he always came out ahead. Furthermore, I understood that in the study of didactics one needs to have a solid base not only in epistemology, but also in philosophy. Thus I decided to get a degree in philosophy, always from the University of Bologna (I was fortunate to meet some truly important luminaries). Four years later I graduated with a thesis that I have never wanted to publish.

Almost without realizing it, I had already entered the world of research in mathematics education. I had also left mathematics (which I have nonetheless always loved and feel I could always love) teaching and not just research. In the meantime I had started the annual *Incontri con la matematica* conference, presently in its 30^{th} year in 2016, and the *La matematica e la sua didattica* journal, originally edited by the Armando Armando publishing house of Rome, then by Pitagora of Bologna, and presently by the "Incontri con la Matematica" Association.

The study of the works of Brousseau and Duval (and the immediate and deep friendship with these extraordinary pioneers) changed my life into becoming a fanatic of mathematics education. I practically witnessed its birth, followed it through its development, got to know and frequently met with the giants that created it one step at a time.

In 1996 I was Chief Organizer of the Topic Group: *Infinite processes throughout the curriculum*, at the VIII ICME, Seville, 14–21 July 1996; Raymond Duval himself was, in fact, the sole advisor; there we had a lot of opportunities for discussion.
I was studying like a madman; the more I studied, the more questions I asked myself. It was then that in order to answer some of these questions, I decided to embark on a PhD in *Mathematics Education*.
I have done experimental research, which has always brought me a lot of satisfaction, as well as theoretical research. I have worked both with the teachers and the students in the class-room in the mornings and without the students in the afternoons in order to try to fully understand the problems that afflict the schools and the root causes of the failure in learning mathematics by some students.
I have had brilliant and capable students that I'm proud of, and have collaborated with the best minds. I fully understand the famous quote of Newton on the *shoulders of giants*, only that I was able to get to known and meet the giants of mathematics education in person, and am still grateful to all of them.

My vision

My vision of mathematics education is, as I have previously stated, that of a kind of applied mathematics. I have some firm beliefs, which would have been normal at one time, but now seem to have been superseded; I'm listing them hereinafter, leaving the discussion to my students. In the following, a brief statement is sufficient for some points, while a more articulate discussion is needed for others.

a) In order to be involved in mathematics education, one needs to be an expert in mathematics.

b) Before talking about mathematics education with the tenured teachers or the students being trained to be future teachers, it is necessary to ensure that they understand the subjects of mathematics in question. If this is not the case, it is necessary to remedy this issue in order to be able to have an effective discussion. It must be necessary to have the courage to immediately interrupt the discussion about didactics and address the issues about mathematics.

c) In order to carry out research in mathematics education it is necessary to be a mathematician. (I have however three famous contrary examples to my own statement; three psychologists that in my opinion have brought prestige to mathematics education, three dear friends: Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud, Raymond Duval).

d) Mathematics education is a kind of mathematics applied to the issues of teaching-learning, an actual science in all respects. Several elements that were

somehow acquired from other fields of human knowledge coalesced into this science, by being deconstructed from their original world and properly reconstructed, transformed into knowledge suitable for the world of mathematics education.
The origins of this knowledge are mainly the following (but the list is not exhaustive):

- the history of mathematics,
- epistemology of science and in particular of mathematics,
- pedagogy,
- general didactics,
- psychology of learning,
- evolutionary psychology,
- model theory,
- philosophy,
- linguistics,
- semiotics,
- sociology,

and others.
When someone asks me how to become an expert in mathematics education, I tell them that it is useless to follow my path of laborious and dispersive studies, because what is useful from these disciplines is presently already a component part of mathematics education.
A concrete and polemic corollary of this long discussion: When suggesting that the training of a mathematics teacher consists in a degree in mathematics followed by a course in pedagogy, one is committing a huge mistake of cultural ignorance; what is really needed professionally, after the study of mathematics, is mathematics education, which already includes the truly useful part of pedagogy.

e) The objective of research in mathematics education is to study class-room situations (in which the Knowledge in question is mathematics), and creating the tools to improve the quality of mathematics learning by the students. As a secondary factor: The teachers, who are already experts in the discipline and study with passion, enthusiasm, and success mathematics education, will have such a level of command of both disciplines that they will be able to make very substantial and radical modifications to the teaching profession.
I shudder when I hear someone that expects mathematics education to be a sort of “teaching to teach”; this is the dumbest thing a person could say or expect. As I have already stated, one can reasonably expect that a mathematics teacher who is knowledgeable in mathematics education will rethink their entire teaching approach and radically change their teaching format, their methodologies (in the plural), the choices intrinsic to the didactic transposition, didactic engineering, the contents, the expectations, the evaluation in a broad

sense (of their own effectiveness, the choices in the curriculum, and the knowledge/ability of their students).
As some of the results of our research have shown, teachers studying mathematics education radically change their beliefs about learning, and hence about teaching, and even about mathematics itself and its significance.

f) The proliferation of a huge variety of theories of mathematics education in these first 40 odd years of its life is certainly due to the fact that each theory addresses different subjects, has different specific objectives, is involved in different aspects of the research. New theories never exclude or dismiss an old one, unless they assimilate it, but without rejecting it. A new theory joins an old one in the pursuit of other research objectives.
I want to dwell on this subject for a bit longer.
The term "scientific theory" or "science" is usually reserved for all representations (symbolic, abstract, written, …) shared, consistent and plausible, of a set of phenomena interrelated by causal, describable, meaningful relations (cause-effect, deduction, induction, …).
By omitting for brevity the archaic path of the idea of science, the current ways of looking at scientific theories include the notion of "paradigm" (Thomas Kuhn). By "paradigm" we intend the set of general theoretical hypotheses and the set of laws for their application, which are commonly accepted by the members belonging to the same scientific community and which imply a substantial level of agreement in the professional, value, and relevance judgments.
In fact, in the formation of a new scientific community there is a moment from which it is possible to speak of a "paradigm". The preceding phase is characterized by the lack of organization, no specific agreements, and a constant need to debate the principles of the discipline itself: In this phase it seems as if there are as many theories as researchers, and there is a constant need and requirement to clarify their own and other people's points of view. Written works of research in the field are often accompanied by explanations about the general characteristics of the research itself. Kuhn's most famous thesis is the one in which scientific progress occurs in "revolutions", on account of the fact that the transition or evolution occurs only after a crisis.
Another fundamental contribution is the one proposed in the 60's by Imre Lakatos, about the idea of a "research program"; that is to say a sequence of scientific theories connected to each other and in continuous development, which contain research methodological rules (both in positive terms, i.e. the rules to follow, and in negative terms, i.e. the rules to avoid).
Each program must contain:

- a nucleus or center of the program;
- a system of auxiliary hypotheses;
- the heuristics, that is to say the procedures applied to solve the problems.

Hence, in this sequence a new theory can be considered to be progress with respect to a previous one if:
- It makes predictions the previous one was not capable of doing;
- Some of these predictions can be proven to be true;
- The new theory explains facts the previous one was not able to prove.

Another remarkable theoretical contribution is that attributed to Mario Bunge in the 80's: Science is a constantly growing body of knowledge, characterized by dealing with rational, systematic, exact, verifiable (and hence also fallible) knowledge. Scientific knowledge is the set of ideas on a particular subject, which were established provisionally for the time being; but then the participation of the individuals and the exchange of information and ideas give rise to a scientific community. What characterizes the difference between fields of belief (religions, ideologies, politics, …) and fields of scientific research, is the type of mechanism according to which "changes" in the ideas occur; in the first case the changes occur as a result of "revelations", controversies, social pressure, while in the second case change is continuous as a result of the actual results of the research.

According to a "weaker" requirement, a scientific theory is defined nowadays when it is provided with a specific object of study, its own research method, and its own specific shared language; this requirement is often cited by theoretical researchers in the humanities, precisely in order to call these domains of study "science".

In the last few years this "weak" requirement has caused the "science" moniker to be applied to many disciplines. In fact, any discipline in which the scholars that participate in its development mutually recognize and accept each other as experts in the subject, founding in the process a community of shared practices that utilize the same language, sooner or later acquires precisely the characteristics that were just described. The issue of the experimental repeatability, proper definition of the relevant variables, the meaning that terms such as "rigorous", "true", etc. acquire, tends to disappear or be profoundly modified.

What is shared in all these interpretations is that scientific theories cannot be the result of the creation or invention of a single individual, but there must be a community of people who share a substantial agreement on both the significant research problems, on the manner in which it is carried out, and on the language utilized.

In this direction, at the end of the 80's Thomas A. Romberg defined the peculiar characteristics of a consolidated and stable scientific theory by stating that:
- There must be a collection of researchers that demonstrate shared interests; in other words, there must be central issues guiding the work of the researchers and these must be shared.
- The explanations given by the researchers must be of the causal type.

- The group of researchers must have created a shared vocabulary and syntax, about which the group is in agreement.
- The group must have created its own procedures for accepting or refuting the statements in a manner considered to be objective by everyone and which can be broadly shared.

The sciences understood in this manner clearly include education in the various disciplines, and in particular mathematics education. In fact everyone can observe:

- The existence of many international groups of researchers in education in the various disciplines who have shared interests;
- Who share issues which are considered to be central;
- Who have been providing causal explanations (for a few decades);
- Who have created a shared, common language;
- They have specific conferences and their own journals, inside of which the communication and publication proposals are refereed on the basis of procedures that have been broadly shared in advance.

We hence have all the conditions proposed by Romberg to state that mathematics education holds all the characteristics to be considered a solid and stable science.

My friend – colleague – and multiple time co-author Luis Radford proposes to view a theory as:

> A way of producing understandings and ways of action based on:
> - A system, *P*, of *basic principles*, which includes implicit views and explicit statements that delineate the frontier of what will be the universe of discourse and the adopted research perspective.
> - A *methodology*, *M*, which includes techniques of data collection and data interpretation as supported by *P*.
> - A set, *Q*, of paradigmatic *research questions* (templates or schemas that generate specific questions as new interpretations arise or as the principles are deepened, expanded, or modified).

Once again, mathematics education fits like a glove with this type of requirement-definition.

g) I'm not at all in favor of a harsh internal war between the theories of mathematics education; rather, I'm in favor of the so-called unification of the theories, in more than one of the ways in which this unification may occur. I myself have worked hard and produced many results in this direction.

If you want to create learning, you must support and utilize several teaching methodologies

Taking a sentence of Immanuel Kant, which after paraphrasing and summarizing, sounds more or less as follows: In the same manner as a liquid assumes the shape of the container that holds it, the concept assumes the characteristic of the person constructing it for themselves. Hence the concept should be deconstructed into its apparent objectivity and reconstructed while adapting it to the individual.

Research in mathematics education has confirmed that the following is also valid for teaching-learning mathematics: In case of a sender and an emission (message), all human beings are forced by their own human nature to interpret said message; that is to say, in reality the receiver does not receive the message from the sender, but transforms it, personalizes it, and interprets it. In other words: Everyone learns in their own manner, on the basis of their own personality, their experience, their culture. That is to say, if there are several students in a class-room, their learning will not be unique; it will not coincide precisely with what the teacher said or asked to do, but each personal learning will be the result of the interpretation of the original message. (Naturally we know full well that there are several more or less "strong" positions in this regard, from a few very radical ones to other weaker ones).

Therefore, the idea of unified teaching, utilizing a single teaching methodology with a prepackaged method, is already in itself a didactic error. It is not even possible to think of proposing ONE method in the class-room. Just thinking of this is the prelude to certain failure in the learning process. The teacher must use several methodologies, several tools, several methods, in the hopes of "reaching" some of the students by means of each one of them. If several students receive "different" messages based on different methodologies, all the better, they will learn from several points of view, so that the cognitive transfer will be facilitated while the cognitive construction of the mathematical object will be more complete.

It would be scientifically and ethically appropriate that *all* those who have created, or think they have created, a method or a tool or a didactic methodology, would submit it to severe and serious scientific evaluation, or propose it on refereed scientific journals, or participate in research conferences, or just any conferences attended by colleagues with a critical mind.

Within this scope, in the past it was normal to create "structured materials" (that is to say, specific, specially arranged materials: Who does not remember this term?) in order to offer unique didactic methods. I only remember two examples which have had worldwide success, the logic blocks (and more) of the Hungarian Zoltan Paul Dienes, and the *papygrammes* (together with the arrows and the minicomputer) of the Belgian Georges Papy. Both have dominated the world of mathematics teaching by offering unique tools for teaching-learning mathematics. These were two true mathematicians, the first one with a doctorate from London and the second from Bruxelles, not improvised amateurs; I had the opportunity of meeting both in person and even get to know them privately.

The analytical and critical studies of Guy Brosseau, the creator of modern mathematics education, put an end to the didactic works of Dienes in the 80's, by showing the deleterious "Dienes effect" in an absolutely obvious form. An effect that was recognized in public by Dienes himself (at Forlì on May 8th, 1993, in my presence). While the critique that put an end to the tools created by Papy came from the same group he created (the GIRP, *Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique*, located in Walferdanche, Luxembourg, where I was president for 3 years).
Nowadays no one talks about those methods anymore. However, at the time they deceived the world with the trap called "new mathematics" or "modern mathematics".
One cannot be against a tool or method as a matter of principle; on the contrary, it would be desirable for teachers to be provided with a thousand tools and a thousand methods! What we must oppose is not a tool or method; the mistake is to make a single choice or ascribe miraculous-didactic powers to the tool (in the singular) or the method (in the singular), which it cannot have, because this is expected of the teacher, the instructor, the human being that teaches, rather than the tool or method. The very delicate and extremely complicated teaching-learning process is connected to the relational issues connecting the three elements in the class-room: teacher, student, and Knowledge (mathematical Knowledge).
The numbers in colors (the *reglettes*) of Cuisenaire-Gattegno, the BAM of Dienes, the arrows of Papy, the number line, Dienes' logic blocks, the abacus, sorobans, calculators, LIM, every TIC, every didactic software package, they are all welcome. The more tools are available, the greater choices for the teacher. The more didactic strategies the teachers know, the better; they will be able to apply different strategies accordingly.
What is absurd anti-didactic wrong is to believe that it is possible to make a single choice, that a single strategy (or other similar ones) holds the recipe, the magic formula, the panacea.
It is necessary to use, and know how to use, each tool, each methodology, while at the same time mistrusting it, knowing their limitations, because all tools will always have their limitations.
The mystic magical revelations of the creators of foolproof didactic theories belong in the category of beliefs that I called "fields of belied" in point f. They are closer to astrology than to science or didactics, also from just the point of view of empirical science.

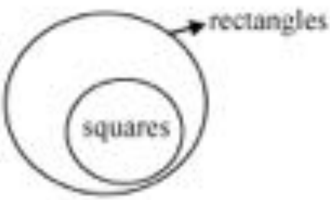
An example analysis of class-room situations

A few years back Guy Brousseau and I studied many examples and denounced in writing the phenomenon of "meta-didactical slippage". These phenomena

appear following a defeat, a failure, which is usually inevitable; however this fact is not recognized immediately as such in naïve didactics.
The teachers explain, then they explain the explanations, illustrate them, and then explain the illustrations … The attempts to correct the initial failure in the learning process turn out to be inappropriate every time. The phenomenon is amplified and gets quickly out of hand. And so, as in the great pandemics of the Middle Ages, there are those who seize the opportunity to denounce all sorts of teaching practices they presume to renew, by mutilating them in order to send some "theory" to the stake and forget the results of the ill-fated experiences.
Let's consider a concrete example. At the end of the 50's, the reorganization of mathematical knowledge was capping a hundred years of remarkable discoveries. Society, the cultural centers and the teaching establishment recognized the need to adapt themselves to them. However the greatest difficulty laid in how to introduce the fundamentals: How to adapt the axiomatic approach in a teaching process used to associating the objects with its languages? All the aspects of mathematics require logic in a suitable form. The proposal was then made to use a naive set theory as a replacement for classical logic, and replace school mathematics with this theory. *This is the first didactical slippage*: The tool itself becomes the object of study.
In order to utilize logic with more ease, logic is replaced with a sort of description or model. In reality a great deal of simplification is carried out: All that is required is to provide the user instructions. We think about set theory, but in reality graphs are introduced; the very language of sets is made more "concrete" by appealing to another idea of Leonard Euler, who used circles to illustrate, enumerate, and classify syllogisms for one of his noble students. At the time it seemed that this idea would have allowed to make teaching Aristotelian logic and the foundation of the entire mathematical language much easier, even to very young children, so that the terminology would be the same from kindergarten to University. *This is a second didactical slippage*: From the study of logic, we have transitioned to the study of the graphical tool, which in reality should only constitute a representation.
However this time the "representation" is just a metaphor: Sets do not have borders, while their drawings do; the union of the parts is not visible as a "set" anymore, etc. Nonetheless, in teaching it is also necessary to combine notions which are rather well defined with others which are nothing more than a "transposed" approach: The rules of the game are different; most of all at the lower levels where well *formulated* and *consistent* usage rules are needed.
The everyday language introduced to describe the metaphor of Euler's circles constitutes a *new meta slippage*: From studying the graphical tool we have transitioned to the everyday language describing it. At the time Georges Papy proposed to color the border of the circles in order to identify the connected

components in the same set. But the materialization of the elements by means of the points raises new contradictions.

It is not clear if the 2 sign represented in a circle is its only element, or a kind of variable, an element identified for exemplification purposes that evokes others, such as for example all the even numbers, which are not represented, or if the element is the "2" sign itself.
A specific vocabulary is also needed to describe these figures. In French, under the influence of Georges Papy, they were first called "potatoes", and then "papygramme". In Italian they did not assume any specific designation in the class-room, only "set diagrams" or "Euler-Venn diagrams", while the respective discipline was called "set theory". This new vocabulary can be considered as the constituting element of this last definitive slippage: The original mathematics has been lost, it is no longer clear what is being taught and what is being required to learn.
If we wanted to accept the set theory metaphor, in order to avoid the subsequent slippages in a single stroke, we should have restricted the drawings to a purely illustrative role, a means of expression, without codifying them or teaching their graphical and linguistic rules. They would have created a set of implicit knowledge (know-how) to represent what is being discussed in order to become persuaded, and which could be utilized; however without the need for a significant proving status of theoretical knowledge, and hence without a grammar and without theory. What can be called know-how, but not knowledge.
In other words, a graph similar to the one below can be used:



to illustrate that "All squares are rectangles, but some rectangles are not squares", without having to specifically deal with a set theory that comprises: sets, properties, elements, membership, the empty set, the universal set, inclusion, intersection, union, the subset, inclusion, Cartesian product, bijection, reflexive, symmetric, and transitive relation, passage to the quotient set, etcetera, all pointlessly oversized in order to be able to use some graphs trivially, which are already eminently comprehensible.

The meta-didactical slippages may occur in relation to any mathematical notion, but also mathematical action.

For example, let's consider the pseudo-teaching of *problem solving* methods.

The difficulties encountered by the students in solving problems often leave the teachers powerless. The students "know" their knowledge, and "their" theorems (which are sometimes just "theorems-in-act"), but they are not able to use them to solve the problems at hand. A classic response in primary school consists in presenting similar problems to the student that failed, so that the student may reproduce the solution they learned in a similar case, understanding the similarity but not the meaning of the solution.

They do not need to know if their answer is suitable, nor why; it is sufficient if it conforms to the model expected by the teacher as the answer. In this manner, they can provide an answer within the scope of a didactic contract without understanding why their solution is correct. Regardless of the various theories of knowledge and learning, which are based on the "recognition" of the knowledge and being able to recite it, the students simulate a solution they may not understand.

In a more concrete way, in order to guide the students George Polya lavishes neo-Cartesian recommendations for organizing problem resolution, by proposing himself as the paradigm: Understand the statement, connect it to previous knowledge, decompose it into steps, … In this manner he suggests trying more heuristic steps: Look for similarities, an example, a counterexample, generalize, compare, check the work, … This work, which was intended to be merely descriptive, served as the basis of a disastrous and naive attempt to teach the resolution of problems based on the use of these heuristics. This is clearly a meta-didactical slippage: The resolution of problems is replaced by the study of the procedures of these resolutions. While it is likely that the given examples attempt to reassure and make the students more combative, it is clear that the situation has slipped without changing its nature: The students attempt to apply their heuristics in the same manner as they attempted to apply their knowledge and their theorems, but success is by no means assured, unless the problems are chosen ad-hoc. Is there a need to look for second-order heuristics? Even if the process is not recursive, the fallacy is fatal. The only difference is that theorems are mathematical knowledge that contain their own conditions of validity, which is not the case of heuristics that are only know-how. Treating them as knowledge is an epistemological and didactic error.

Even more dangerous is the dream of transforming the resolution of problems into algorithms, which is the uncritical extension of this meta-didactical slippage; they are of two types:

1. Rather than solving the problem, construct a block diagram or a flow-chart that illustrates it; this dumb choice led to study block diagrams and flow-charts as if they were the object under study; a disastrous meta-didactical slippage.
2. Normative systems with null or negative effect: “Circle the numeric data in the text of the problem in red; underline the question in green; look for the key word that allows you to recognize the operation that must be applied to solve the problem …”.
All of these are meta-didactical slippage conditions that transform the solution of the problem into trivia that do not facilitate in any way the activity of problem solving. Take for example my example from 1992: “A sheepherder has 12 sheep and 6 goats. How old is the sheepherder?” Go ahead and circle the data 12 and 6 in red; go ahead and underline the question in green: “How old is the sheepherder?”; also look for the key word that helps to decide the operation … Yeah, but which one? “How old?”, “and”? The solver that is really following these “rules” is doomed to provide the answer “18”, which is the case in the absolute majority of the answers to this verbal problem. The students are no longer able to read the text critically in order to provide a reasonable solution. They are stunned by the imposed meta-didactical slippage; they carry out the suggested steps and then forget the logic of the text and start shooting numerical answers that seem to be appropriate, which are in fact the obligatory answers determined by the suggested absurd procedure.
Thus *meta-didactical slippage* consists in the teachers moving the object of their teaching from an activity or notion onto one of their control means. For example, a language teacher replaces the correction of an error by the students with the enunciation of the grammatical rule that was violated. This step is perfectly legitimate, in principle; but this behavior of the teacher is perceived by the students as removing them from the specific circumstances of the occurrence; a generalization of their concrete error.
All of this may at times constitute a very damaging hijacking of the activity. The persons involved in the teaching-learning, teacher and student, (both) lose track of their project and become lost. For example:

- Instead of studying proportionality, students are taught the rule to follow (also known as “the rule of three”) in order to answer the question about proportion;
- Instead of understanding the internal intrinsic conditions of a system of two linear equations, they must learn Cramer’s rule;
- Instead of studying the logic of the statements, they must learn by heart the semantic truth tables of the connectives;
- Instead of studying what is a surface, they are given the rules for calculating the area of a quadrilateral;
- Instead of studying and learning Ruffini’s theorem, they are taught Ruffini’s rule;

- From a means to evaluate the results of learning, national and international tests first became the objectives of teaching, then they became the means of teaching, and finally the very object of teaching; they tend to transform our conception of knowledge and learning into a sort of exercise;

etcetera.

These are evidently still extremely powerful and dangerous meta-didactical slippages.

References

"My twenty-five readers may imagine" (25?; I wish, dear Alessandro!)[1] what a bore it would be if I decided to even try to list the texts I have implicitly referred to …

I apologize for this deliberate omission. But this is a festive occasion.

In any event, my most devout students will know to which of my works I was referring.

[Traduzione di Maura Iori]

[1] [Alessandro Manzoni is one of the great Italian writers, poet, and author of theater texts. His novel *The Betrothed* (1st edition: 1827; 40th edition: 1841) is one of the great classics of Italian literature. Furthermore this novel should mainly be credited with contributing to the unification of the Italian language during a period in which the various dialects and regional languages made communicating throughout the peninsula, which would later become the Kingdom of Italy (from 1861 to 1946), impossible. In Chapter 1 of the novel, the Author ironically addresses the reader of his masterpiece with the famous sentence *my twenty-five readers*, with modesty. In reality the book was extremely successful from the very beginning. The novel has been translated into twenty-one foreign languages, with derivative operas, movies, musicals, parodies, comics, …].

Prefacio

Bruno D'Amore

Abstract. I take this opportunity to make a summary of some personal beliefs about mathematics education, such as research and practice, developed over the years.

Me siento profundamente conmovido de la amistad, de la devoción, de la simpatía demostrada también en esta ocasión por mis alumnos, algunos de forma muy especial, quienes quisieron hacerme este regalo: reunir amigos, colegas, colaboradores y alumnos para recordar, todos juntos, qué es la didáctica de la matemática, cuál es su importancia, y por qué necesita de investigadores serios, profundos y preparados. Un himno cantado a varias voces dedicado a una de las disciplinas más bellas del mundo y a otras que quedan bien a su lado.
Aprovecho entonces esta magnífica ocasión internacional, sorprendido por todos aquellos que han querido participar, con o sin texto, para hacer una especie de … confesión personal sobre algunos puntos que considero claves para la didáctica de la matemática, sea como línea de investigación, sea como praxis cotidiana de trabajo en aula (mis dos caballos de batalla, que aún veo fuertemente entrelazados). Auspicio que sobre estos temas aún se puedan desarrollar investigaciones en el futuro.

Confesión a los 70 años

La historia

Obtuve el título en matemática en la Universidad de Bologna a la edad de 22 años y decidí en ese momento que en mi vida no habría podido ser otra cosa que matemático. Así me inicié inmediatamente a hacer investigación en este campo, gracias a una beca del CNR (Consejo Nacional de las Investigaciones) transformada después en beca del MIUR (Ministerio de la Instrucción, de la Universidad y de la Investigación).

Algunos años después, cuando me presentaron a la didáctica de la matemática (que en esa época ni siquiera se llamaba así) me pareció un conjunto de banalidades vagas sin pies ni cabeza. Pero después, estudiando, primero los trabajos de Efraim Fischbein y después los de Guy Brousseau, se me abrió un mundo y la reconocí como una matemática aplicada con grandes potencialidades teóricas y científicas que apenas iniciaban a delinearse. En ese tiempo, ya como docente de la Universidad de Bologna, fundé en el Departamento de Matemática, en total acuerdo con el entonces director, un NRD (Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática) no por convicción, no para hacer yo mismo investigación en didáctica en primera persona, sino para que otros la pudieran hacer: consideraba justo dar espacio a este tipo de investigación (no recuerdo muy bien, pero creo que en Italia sólo existían otros dos grupos NRD). Yo continuaba siendo un matemático, con curiosidad por estos nuevos estudios, pero vistos siempre desde el exterior.

Existía una gran confusión en aquellos tiempos y parecía que, para entender la didáctica era necesario estudiar pedagogía; y así decidí obtener, también en Bologna, el título en pedagogía (y tuve la suerte de encontrar algunos personajes de alta envergadura cultural). Conseguí el título cuatro años después y realicé una tesis que se publicó inmediatamente: tal vez esta era mi primera contribución verdadera a la didáctica de la matemática.

Era consciente de mi profunda ignorancia en general y en las discusiones con mi maestro de epistemología Francesco Speranza (que por unos pocos meses fue mi docente de geometría) llevaba siempre las de perder. Además entendía que en el estudio de la didáctica necesitaba dominar no sólo la epistemología, sino también la filosofía; y así decidí obtener el título en filosofía, también en la Universidad de Bologna (tuve la suerte de encontrar inteligencias en verdad notables). Conseguí el título cuatro años después y realicé una tesis que nunca quise publicar.

Casi sin darme cuenta, había entrado en el mundo de la investigación en didáctica de la matemática, había dejado la matemática (que siempre he amado y siento que la amaré siempre) no sólo como enseñanza sino también como investigación. Mientras tanto, había dado inicio al Congreso anual *Incontri con la matemática* (hoy, en el 2016, con la edición número 30), y a la revista *La matematica e la sua didattica*, editada por Armando Armando de Roma primero, después por Pitagora de Bologna y hoy por la asociación “Incontri con la Matematica”.

El estudio de las obras de Brousseau y de Duval (y la amistad inmediata y profunda con estos extraordinarios pioneros) cambió mi vida y me convertí en un fanático de la didáctica de la matemática. La vi prácticamente nacer, la seguí en sus evoluciones, conocí y frecuenté los gigantes que la han creado paso a paso. Entiendo plenamente la famosa frase de Newton sobre las

espaldas de los gigantes, sólo que yo a los gigantes de la didáctica los he conocido y frecuentado personalmente, y todavia hoy estoy muy agradecido con todos ellos.
En 1996 fui Chief Organizer del Topic Group: *Infinite processes throughout the curriculum*, en el VIII ICME, Sevilla, España, 14–21 julio 1996; Raymond Duval mismo fue, de hecho, mi único Advisor; depués fueron numerosas las ocasiones que compartimos.
Estudiaba mucho, muchísimo y, mientras más estudiaba me surgían más preguntabas. Fue entonces que, para responder a algunas de estas, decidí hacer el PhD en *Mathematics Education*.
He hecho investigaciones de carácter tanto empírico como teórico que me han dado grandes satisfacciones. He dedicado tiempo a los docentes en el aula, con estudiantes por las mañanas y sin estudiantes en las tardes, para intentar entender cuáles eran los problemas que afligen la escuela y el porqué del marcado fracaso en el aprendizaje de la matemática por parte de algunos estudiantes.
Tuve y tengo alumnos brillantes y capaces, de los cuales me enorgullezco y he colaborado con cerebros de primer orden.

Mi visión

Mi visión de la didáctica de la matemática es, como ya lo he dicho, cómo matemática aplicada. Tengo convicciones profundas que una vez eran consideradas normales pero que ahora parecen superadas. Las indico a continuación, dejándolas para la discusión de mis alumnos. En lo que sigue, para algunos puntos bastan pocas palabras, pero otros requieren un discurso largo y estructurado:

a) Para ocuparse de didáctica de la matemática, es necesario ser experto en matemática.

b) Antes de hablar de didáctica de la matemática con los docentes en servicio o con los estudiantes en formación como futuros docentes, es necesario estar seguros que quienes nos escuchan entiendan los temas de matemática que constituyen el objeto del discurso. Si no es así, es necesario remediar la situación para no volver vago y vacío el discurso. Se requiere tener el coraje de abandonar inmediatamente el discurso sobre la didáctica para afrontar el argumento matemático en cuestión.

c) Para hacer investigación en didáctica de la matemática se requiere ser matemático. (Pero tengo tres ejemplos ilustres que dicen lo contrario de lo que estoy declarando, tres psicólogos que, en mi opinión, han dado lustro a la didáctica de la matemática, tres queridos amigos: Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud, y Raymond Duval).

d) La didáctica de la matemática es una matemática aplicada a la problemática de la enseñanza-aprendizaje, una verdadera ciencia; en esta confluyen elementos adquiridos de alguna forma desde otros campos del saber humano, descontextualizados de su mundo original y adecuadamente re-contextualizados, transformados en saberes idóneos al mundo de la didáctica de la matemática.
Los mundos de proveniencia de dichos saberes son básicamente los siguientes (pero el elenco no es exhaustivo):

- la historia de la matemática,
- la epistemología de la ciencia y en particular de la matemática,
- la pedagogía,
- la didáctica general,
- la psicología del aprendizaje,
- la psicología evolutiva,
- la teoría de modelos,
- la filosofía,
- la lingüística,
- la semiótica,
- la sociología,

y otras.
A quien me pregunta cómo se puede convertir en experto en didáctica de la matemática, le indico que es inútil seguir mí afanoso y dispersivo recorrido de estudios, porque lo que necesita la didáctica de la matemática de estas otras disciplinas, hoy, está ya integrado dentro de la estructura teórica de la didáctica de la matemática.
Corolario concreto y polémico de esta larga disquisición: cuando se sugiere que la formación de un docente de matemática debe consistir en un título universitario en matemática seguido de un curso de pedagogía, se está cometiendo un error monstruoso de ingenuidad cultural. Lo que profesionalmente sirve en verdad, después de la matemática, es la didáctica de la matemática que ya contiene lo que podría aportar la pedagogía.

e) El objetivo de la investigación en didáctica de la matemática es el de estudiar situaciones de aula (en las cuales el objeto "Saber" es la matemática) y de crear instrumentos para aumentar la calidad del aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes. Como factor secundario: el docente que, siendo experto en la disciplina, estudia con pasión, entusiasmo y éxito la didáctica de la matemática, dominará las dos lo cual le permitirá aportar cambios consistentes y radicales a su profesión docente.
Me asusta la idea de encontrar quienes piensan que la didáctica de la matemática es una especie de "enseñar a enseñar"; es la idea más estúpida que puede ser expresada o que se puede escuchar. Se puede pensar, como ya lo dije, que un docente de matemática que conozca la didáctica de la matemática

re-interpreta toda su profesionalidad docente y cambia radicalmente su forma de enseñar, las metodologías (en plural), las elecciones intrínsecas a la transposición didáctica, la ingeniería didáctica, los contenidos, las expectativas, y la evaluación entendida en sentido amplio (de su misma eficacia, de las elecciones curriculares y del saber/competencia de sus estudiantes).
Un docente que estudia la didáctica de la matemática, como algunos de los resultados de nuestras investigaciones han evidenciado, cambia radicalmente sus convicciones sobre el aprendizaje, por tanto sobre su enseñanza, e incluso sobre la misma matemática y sobre su significado.

f) El proliferar de una gran cantidad de teorías en didáctica de la matemática en estos 40 años y algunos más de vida de esta disciplina se debió al hecho de que cada una de las teorías afronta temáticas diversas, tiene objetivos diferentes, se ocupa de aspectos de investigación diferentes; nunca un nueva teoría excluye o descarta una precedente, a menos que no la incluya, pero sin rechazarla; una nueva teoría se anexa a una precedente, persiguiendo otros fines de investigación.
Sobre este tema deseo extenderme un poco más.
El término “teoría científica” o “ciencia” está generalmente reservado a toda representación (simbólica, abstracta, escrita, …) compartida, coherente y plausible, de un conjunto de fenómenos conectados entre sí por relaciones causales, describibles, significativas (causa-efecto, deducción, inducción, …).
Dejando de lado, por brevedad, el recorrido arcaico de la idea de ciencia, en los modos actuales de considerar una teoría científica se encuentra la noción de “paradigma” (Thomas Kuhn). Se entiende por “paradigma” el conjunto de las hipótesis teóricas generales y el conjunto de las leyes, comúnmente aceptadas por quienes pertenecen a una misma comunidad científica, y que implican un acuerdo sustancial en los juicios profesionales, de mérito y de pertinencia.
En la formación de una nueva comunidad científica, existe un momento a partir del cual se puede hablar precisamente de “paradigma”. La fase que precede está caracterizada por una desorganización, sin acuerdos específicos, y con una constante solicitud de debate sobre los fundamentos de la disciplina misma: se puede decir que en esta fase existen tantas teorías como investigadores y una continua petición de clarificación de los puntos de vista propios y de los otros. Los trabajos escritos de investigación en el campo son generalmente acompañados de explicaciones sobre el carácter general de la investigación misma. La tesis de Kuhn más conocida es aquella según la cual el progreso científico procede según “revoluciones”, dado que se habla de cambio, de evolución, sólo después de una crisis.
Otra contribución fundamental es aquella propuesta en los años ’60 por Imre Lakatos, con la idea de “programa de investigación”, es decir una sucesión de teorías científicas relacionadas entre sí en un desarrollo continuo, con reglas

metodológicas de investigación (sea en positivo, para seguir, sea en negativo para evitar).
Cada programa debe contener:

- un núcleo o centro del programa;
- un sistema de hipótesis auxiliares;
- una heurística, es decir los procedimientos que se aplican a la resolución de los problemas.

En esta sucesión, una nueva teoría puede ser considerada un progreso respecto a una teoría precedente si:

- hace predicciones que la precedente no era capaz de hacer;
- algunas de dichas predicciones se pueden probar como verdaderas;
- la nueva teoría explica hechos que la precedente no podía probar.

Otra notable contribución teórica fue debida a Mario Bunge, en los años ’80: la ciencia es un cuerpo de conocimientos en constante crecimiento, caracterizado por tratarse de conocimientos racionales, sistemáticos, exactos, verificables (y por tanto también falibles). El conocimiento científico coincide con el conjunto de las ideas sobre un cierto argumento, establecidas de forma momentáneamente provisorias; pero, después, el trabajo individual y el intercambio de informaciones y de ideas dan lugar a una comunidad científica. Lo que caracteriza la diferencia entre campos de creencias (religión, ideologías, políticas, …) y campos de investigación científica es el tipo de modalidad según las cuales se presentan los “cambios” en las ideas; en los primeros, los cambios se presentan a causa de “revelaciones”, controversias, presiones sociales; en los segundos el cambio es continuo a causa de los mismos resultados de investigación.
Según posiciones más “débiles”, hoy una teoría científica se define cuando dispone de un objeto específico de estudio, de un método propio de investigación y de un lenguaje específico y compartido; a esta idea hacen referencia los teóricos de las ciencias humanas, para llamar “ciencia” precisamente, a dichos dominios de estudio.
En los últimos años esta condición “débil” hizo proliferar el apelativo de “ciencias” dado a muchas disciplinas. De hecho, toda disciplina para la cual el desarrollo depende de estudiosos que se reconocen y se acepten recíprocamente como expertos en dicha disciplina, conformando una comunidad de prácticas compartidas, que hacen uso del mismo lenguaje, antes o después adquiere las características descritas con anterioridad. El problema de la repetitividad de los experimentos, de la correcta definición de las variables en juego, del sentido que adquieren términos como “riguroso”, “verdadero” etc., tiende a desvanecerse o a sufrir profundas modificaciones.
Lo que hay en común en todas estas interpretaciones es que las teorías científicas no pueden ser creaciones o invenciones de una única persona, sino que requieren de una comunidad de personas entre las cuales rige un sustancial

acuerdo, ya sea sobre los problemas significativos de la investigación, como sobre las modalidades que explica, así como el lenguaje usado.
En esta dirección, Thomas A. Romberg, a finales de los años '80, definía las características peculiares de una teoría científica consolidad y estable afirmando que:

- debe existir un conjunto de investigadores que demuestren intereses comunes; en otras palabras deben existir problemáticas centrales que guíen el trabajo de los investigadores y que sean compartidas;
- las explicaciones dadas por los investigadores deben ser de tipo causal;
- el grupo de los investigadores debe tener elaborado un vocabulario y una sintaxis común, sobre la cual el grupo esté de acuerdo;
- el grupo debe haber elaborado procedimientos propios para aceptar o rechazar los enunciados de forma tal que dicho juicio sea considerado objetivo y ampliamente compartido.

Entre las ciencias entendidas así, entran las didácticas disciplinarias y por tanto, en particular, la didáctica de la matemática. Está en la mirada de todos, de hecho:

- la existencia de un nutrido grupo internacional de investigadores en la diversas didácticas disciplinarias que tienen intereses comunes;
- para quienes existen problemáticas consideradas centrales y compartidas;
- que proponen (desde hace algunos decenios) explicaciones de carácter causal;
- que han elaborado un vocabulario común, y compartido;
- ellos tienen congresos y revistas específicas, en las cuales las propuestas de comunicación o de publicación son evaluadas sobre la base de procedimientos hoy en día ampliamente compartidos.

Estamos entonces plenamente dentro de las condiciones propuestas por Romberg para poder afirmar que la didáctica de la matemática tiene todas las características para ser considerada ciencia consolidada y estable.
El amigo – colega – y tantas veces coautor Luis Radford propone que una teoría sea vista como:

> una forma de producir interpretaciones y modos de actuar basados en:
> un sistema, P, de *principios fundamentales*, que incluya visiones implícitas y afirmaciones explicitas que delinean los confines del universo del discurso y de la prospectiva de la investigación adoptada;
> una *metodología*, M, que incluya técnicas de recolección y de interpretación de datos, sostenidos por P;
> un conjunto, D, de *preguntas de investigación* paradigmáticas (modelos o esquemas que generan preguntas específicas cuando se presentan nuevas interpretaciones o cuando se profundizan, amplían o modifican los principios).

Aún una vez más, la didáctica de la matemática viene como anillo al dedo con este tipo de exigencia-definición.

g) Yo no soy, en ningún caso, favorable a la drástica lucha entre teorías en didáctica de la matemática; soy por el contrario favorable a la llamada unificación de las teorías, en más de una de las modalidades en las cuales esta unificación puede presentarse. Yo mismo tengo trabajos y he aportado un gran número de resultados en esta dirección.

Incentivar y usar varias metodologías de enseñanza, si se quiere producir aprendizaje

Tomo en consideración una frase de Immanuel Kant que, parafraseando y resumiendo, suena más o menos como sigue: así como un líquido adquiere la forma del contenedor que lo contiene, el concepto asume las características de quien lo está construyendo. Por tanto el concepto es de-construido en su aparente objetividad y es re-construido adaptándolo individualmente a cada persona.

La investigación en didáctica de la matemática ha confirmado que es válido para la enseñanza-aprendizaje lo siguiente: frente a un emisor y a una emisión (mensaje), cada uno de los seres humanos está obligado por su misma naturaleza a interpretar dicho mensaje; es decir, el receptor no recibe en realidad el mensaje del emisor, sino que lo transforma, lo personaliza, lo interpreta. Dicho en otras palabras: cada uno aprende siguiendo una forma personal, sobre la base de su personalidad, de su experiencia, de su cultura. Es decir, si en un aula hay varios estudiantes, su aprendizaje no será unívoco, no será banalmente coincidente con aquello que el docente dijo o hizo, cada uno de los aprendizajes personales será el resultado de una interpretación del mensaje inicial. (Naturalmente sabemos muy bien que existen varias posiciones más o menos "fuertes" al respecto, desde algunas muy radicales hasta otras más débiles).

Por tanto la idea de una enseñanza unívoca, del uso de una única metodología de enseñanza, con un método pre-confeccionado, es ya en sí misma un error didáctico; no se puede ni siquiera pensar en proponer UN método en aula. En sólo pensarlo es ya la antecámara de un fracaso seguro en el proceso de aprendizaje. El docente deberá usar más de un metodología, más de un instrumento, más de un método, con la esperanza de "alcanzar", con cada uno de ellos, a algún estudiante; si por casualidad un gran número de estudiantes recibe mensajes "diversos" sobre la base del uso de metodologías diversas, mejor, aprenderán desde varios puntos de vista y como consecuencia la transferencia transfer cognitivo será facilitada y la construcción cognitiva del objeto matemático será más completa.

Sería oportuno científica y éticamente que todos aquellos que han ideado, que piensan haber ideado, un método o un instrumento o una metodología didáctica, la sometieran al severo y serio juicio científico, o lo propusieran en revistas científicas con el arbitraje acreditado que requiere un artículo de estas

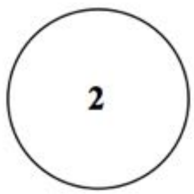
características, o que participaran en congresos de investigación o incluso sólo en congresos en los cuales participan colegas críticos.
En este ámbito, en el pasado era normal crear “material estructurado” (es decir, específicos o específicamente predispuestos: ¿quién no recuerda esta ”expresión”?) para proponer didácticas univocas; recuerdo sólo dos ejemplos que tuvieron un éxito planetario, los bloques lógicos (y otros materiales) del húngaro Zoltan Paul Dienes y los papygramas (y las flechas y el minicomputador) del belga George Papy; los dos dominaron el mundo de la enseñanza de la matemática proponiendo instrumentos unívocos para la enseñanza. Se trataba de dos verdaderos matemáticos, el primero con un doctorado en Londres, el segundo en Bruselas, no aficionados improvisados; tuve la ocasión de conocerlos personalmente y de frecuentarlos de forma privada.
Los estudios analíticos y críticos de Guy Brousseau, el creador de la moderna didáctica de la matemática, demolió en los años ’80 los trabajos de Dienes, mostrando en forma absolutamente evidente un “efecto Dienes” que él mismo Dienes reconoció públicamente (en Forli, el 8 de mayo de 1993, en mi presencia). Mientras, la crítica demoledora a los instrumentos ideados por Papy se presentó dentro del mismo grupo que él había creado (el GIRP, *Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique*, con sede a Walferdanche, Luxemburgo, del cual fui presidente durante tres años).
Hoy nadie habla de estos métodos, sin embargo ilusionaron al mundo, en el interior de aquella trampa que se llamó “nueva matemática” o “matemática moderna”.
No es posible estar en contra de un instrumento o de un método por principio, es más, ¡ojalá el docente tuviera a disposición una gran cantidad de instrumentos! A lo que nos debemos oponer no es al instrumento o al método, el error es la elección unívoca o el delegar al instrumento (en singular) o al método (en singular) un poder taumatúrgico-didáctico que no puede tener, porque este es responsabilidad del docente, del maestro, del ser humano que enseña y no de un instrumento o de un método. El muy delicado y muy complicado proceso de enseñanza-aprendizaje está conectado con los aspectos relacionales que ponen un enlace con los tres elementos de la situación de aula: docente, alumno y Saber (matemático).
Los números en color (las regletas) de Cuisenaire-Gattegno, los bloques multibase de Dienes, las flechas de Papy, la recta numérica, los bloques lógicos de Dienes, los ábacos, el ábaco japonés (el sorobán), las calculadoras, el tablero digital, todos los softwares didácticos, son todos bienvenidos, cuanto mayor números de instrumentos didácticos haya, mayor es la posibilidad de elección por parte del docente. Cuantas más estrategias didácticas conozca mejor, así podrá aplicar diversas.

Lo que es ridículo, anti-didáctico, erróneo es creer que sea posible una elección unívoca, que en un único de estos (o de otros análogos) se esconde la receta, la magia, la panacea.
Es necesario usar, saber usar, cada instrumento, cada metodología, y al mismo tiempo desconfiar, conocer sus límites, porque estos límites existen siempre, en todo instrumento.
Las revelaciones místicas mágicas de los creadores de teorías didácticas infalibles pertenecen a la categoría de las creencias que, en el punto f, denominé "campos de creencias". Son mucho más cercanas a la astrología que a la ciencia o a la didáctica aunque sólo si esta didáctica es entendida como ciencia empírica.

Un ejemplo de análisis de situaciones de aula

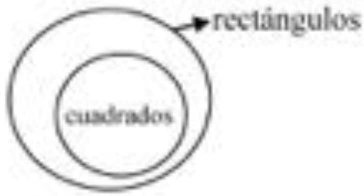
Guy Brousseau y yo estudiamos hace algunos años algunos ejemplos y denunciamos por escrito el fenómeno del "resbalón meta-didáctico". Estos fenómenos aparecen después de una derrota, de un fracaso, generalmente inevitable; pero el hecho no es reconocido inmediatamente como tal en la didáctica ingenua.
Los docentes explican, después explican las explicaciones, las ilustran y después explican las ilustraciones … Cada vez los intentos de corregir el fracaso inicial del aprendizaje se revelan inapropiados. El fenómeno se amplifica y se vuelve rápidamente incontrolable. Y así, como en las grandes pandemias del Medioevo, algunos aprovechan para acusar a toda práctica escolar que ellos pretenden renovar, mutilándolas, para poner al rojo cualquier "teoría" y para olvidar los resultados de las experiencias consideradas nefastas
Pongamos un ejemplo concreto. A finales de los años '50, la reorganización de los conocimientos matemáticos estaba concluyendo un centenar de años de descubrimientos notables. La sociedad, los centros culturales y la enseñanza reconocieron la necesidad de adaptarse. Pero la mayor dificultad estaba en la introducción de los fundamentos: ¿cómo domesticar la axiomática en un proceso de enseñanza acostumbrado asociar unos objetos a sus lenguajes? Todos los aspectos de la matemática tienen necesidad de la lógica bajo una forma apropiada. Se propuso entonces usar una teoría ingenua de conjuntos como sustituto de la lógica clásica y de sustituir la matemática en la escuela por dicha teoría.
Se trató de un primer resbalón didáctico: el instrumento se convirtió él mismo en el objeto de estudio.
Para usar con mayor facilidad la lógica, se le sustituye por una especie de descripción o de modelo. En realidad se simplifica mucho: basta dar unas reglas de uso. Se piensa en la teoría de conjuntos, pero en realidad se introducen gráficos, el lenguaje mismo de los conjuntos se vuelve algo un poco más "concreto" simulando una idea de Leonhard Euler quien usaba

círculos para ilustrar, enumerar y clasificar los silogismos para una alumna suya perteneciente a la nobleza alemana. Para la época parecía que esta idea habría permitido hacer la enseñanza de la lógica de Aristóteles algo mucho más fácil junto con la enseñanza del fundamento del lenguaje matemático, incluso con niños muy jóvenes, de esta forma los términos usados serían los mismos, desde el preescolar hasta la universidad.
Se trata de un segundo resbalón didáctico: del estudio de la lógica se pasa al estudio del instrumento gráfico cuando en realidad este sólo debería constituir un medio de representación.
Pero esta vez la "representación" es sólo una metáfora: los conjuntos no tienen fronteras, mientras que el dibujo sí; la unión de partes no son visibles como "conjuntos" etc. Sin embargo, también en la enseñanza es necesario conjugar nociones bastante bien definidas con otras que no son más que aproximaciones "trasladadas": las reglas del juego son diversas, en particular en los niveles inferiores en los cuales se requieren reglas de uso bien *expresables* y *consistentes*.
El lenguaje coloquial puesto en acción para la descripción de la metáfora de los círculos de Euler constituye un *nuevo resbalón meta*: de estudiar el instrumento gráfico se pasó al lenguaje común que lo describe.
George Papy propuso entonces colorear las fronteras de dichos círculos para identificar las componentes conexas de un mismo conjunto. Pero la materialización de los elementos a través de puntos hace evidente nuevas contradicciones.



No se sabe si el signo 2, representado en el círculo, es su único elemento, o si es una especie de variable numérica, un elemento identificado a título de ejemplo que evoca otros, por ejemplo todos los pares, no representados, o si el elemento es el mismo signo "2".
Se requiere un vocabulario específico para describir estas figuras. En francés, bajo la influencia de George Papy, se llamaron en un primer momento "papas" y después "papygramas"; en italiano no tuvieron una denominación específica en las aulas, sólo "diagramas de conjuntos" o "diagrama de Euler-Venn" y la disciplina relativa se llamó "insiemistica" (en español puede traducirse como "conjuntivistica"). Este nuevo vocabulario se puede considerar como el elemento fundamental de este último y definitivo resbalón: la matemática

inicial se perdió, no hay claridad sobre lo que se está enseñando ni de lo que se está pidiendo de aprender.
Si se quiere aceptar la metáfora de la teoría ingenua de conjuntos, para evitar de un sólo golpe los resbalones sucesivos, se deberían haber restringido los dibujos a un papel puramente ilustrativo, de medio de expresión sin codificarlos ni enseñando los reglas gráficas y lingüísticas relativas. Estos hubieran formado un conjunto de conocimientos implícitos para representar lo que se está diciendo, para convencerse, y que puede ser utilizado; pero sin la necesidad de un estatuto de saberes significativo, comprobante, por tanto sin gramática y sin teoría. Lo que llamamos conocimiento, pero no un saber.
En otras palabras, se puede usar un gráfico como el siguiente:



para ilustrar que "Todos los cuadrados son rectángulo, pero hay rectángulos que no son cuadrados", sin tener que tratar específicamente una teoría de los conjuntos que incluya: conjuntos, propiedades, elementos, pertenencia, conjunto vacío, conjunto universal, inclusión, intersección, unión, subconjuntos, inclusión, producto cartesiano, correspondencia biunívoca, relación reflexiva, simétrica y transitiva, pasaje al cociente, partición etcétera, todo inútilmente sobredimensionado para llegar a un banal uso de algunos gráficos que ya son del todo comprensibles.
Los resbalones meta-didácticos pueden producirse a propósito de cualquier noción matemática, pero también de acciones matemáticas.
Por ejemplo, consideremos la pseudo-enseñanza de los métodos de *problem solving*.
La dificultad que encuentran los alumnos en la resolución de problemas deja por lo general al docente desarmado. El alumno sabe "sus" saberes, "sus" teoremas (en ocasiones sólo "en acto") y sin embargo él no encuentra el medio para usarlos en la resolución de los problemas que le son propuestos. Una respuesta clásica a nivel primario consiste en presentar al estudiante que no tuvo éxito problemas análogos de forma tal que el alumno pueda reproducir la solución que se le enseñó en un caso similar, entendiendo la similitud pero no el sentido de la resolución.
Él no tiene necesidad de saber si su respuesta es adecuada, ni el por qué de esta repuesta; basta que dicha respuesta sea conforme con el modelo esperado por el docente. Él puede así responder en el ámbito de un contrato didáctico

sin entender por qué su solución es correcta. Cualquier cosa que digan en relación a este propósito las diversas teorías del conocimiento y del aprendizaje que se fundan en el "reconocimiento" del saber y sobre su citación, el estudiante simula una resolución que puede no estar comprendiendo.
En un recorrido más concreto, para guiar a los alumnos, George Polya se deja llevar por consejos neo-cartesianos para la organización del trabajo de resolución de los problemas, asumiéndose así mismo como paradigma: comprender el enunciado, conectarlo con conocimientos previos, descomponerlo en etapas, … Él sugiere así intentar pasos heurísticos: buscar similitudes, un ejemplo, un contraejemplo, generalizar, comparar … Este trabajo, que tenía como objetivo ser puramente descriptivo, fue tomado como base de un fallido e ingenuo intento de enseñanza de la resolución de problemas fundado en el uso de estas heurísticas.
Se trata claramente de un resbalón meta-didáctico: la resolución de problemas se vio sustituida por un estudio del proceso de tal resolución. Es probable que los ejemplos dados sean de tal naturaleza que pueden tranquilizar y volver aguerridos a los estudiantes, pero es claro que la situación resbaló sin cambiar de naturaleza: el alumno busca aplicar sus heurísticas así como buscaba aplicar sus conocimientos y sus teoremas y el éxito no está de hecho asegurado, a menos que se elijan problemas ad hoc. ¿Se hace necesario, entonces, buscar heurísticas de segundo orden?
Incluso si el proceso no es recursivo, el engaño es fatal. La única diferencia es que los teoremas son saberes matemáticos que contienen sus mismas condiciones de validez, lo cual no es el caso de las heurísticas que son sólo conocimientos. El tratar estas heurísticas como saberes es un error epistemológico y didáctico.
Aún más mortal es el sueño, persecución acrítica de este resbalón meta-didáctico, de transformar la resolución de problemas en algoritmos. Encontramos dos tipos:
1. En la resolución de un problema hay que construir el diagrama de flujo que lo explica. Esta elección no adecuada llevó a estudiar los diagramas de bloqueos y de flujo como si estos fuesen el objeto de aprendizaje. Esto es un resbalón meta-didáctico.
2. Sistemas normativos de efecto nulo o negativo: "Encierra con rojo los datos numéricos del texto del problema; subraya con color verde la pregunta; busca la palabra clave que te permitirá reconocer la operación que debes usar para resolver el problema …". Todas estas son condiciones para un resbalón meta-didáctico que transforman la resolución de problemas en banalidades que no ayudan en nada al proceso de resolución; tomemos como ejemplo mi problema de 1992: "Un pastor tiene 12 ovejas y 6 cabras. ¿Cuántos años tiene el pastor?"; si encerramos en rojo los datos 12 y 6; si se subraya en verde la pregunta: ¿Cuántos años tiene el pastor?; si se busca la palabrita clave que te

ayuda a decidir la operación … Ya pero ¿cuál? ¿"Cuántos"?, ¿"y"?. Quien intenta resolver este problema siguiendo estas "reglas" está condenado a proporcionar la respuesta "18" que caracteriza la gran mayoría de las respuestas a este problema cuando es formulado de forma oral. El estudiante no lee críticamente el problema para dar un respuesta razonable, viene aturdido por el resbalón meta-didáctico impuesto, efectúa pasos sugeridos y después olvida la lógica del texto y lanza propuestas numéricas que le parecen adecuadas, de hecho aquellas obligadas por el procedimiento demencial sugerido.

El *resbalón meta-didáctico* consiste, para el docente, en cambiar el objeto de su enseñanza ya sea de una actividad o de una noción, hacia uno de sus medios de control. Por ejemplo, el docente de idiomas sustituye la corrección del error de sus alumnos con la enseñanza del enunciado de la regla de gramática que no fue respetada. Esta acción es perfectamente legítima, en principio; pero la percepción que el estudiante se forma de esta actitud del docente es como un alejamiento de la circunstancia específica, una generalización de su error concreto.

Todo esto puede en ocasiones constituir un desvío dañino de la actividad; los personajes involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, docente y alumno, pierden de vista (los dos) su proyecto y se extravíen. Por ejemplo:

- en el estudio de la proporcionalidad, se estudia la regla (llamada "la regla del tres") que se debe seguir para responder a una pregunta sobre la proporción;
- para entender la lógica de los enunciados, se aprenden de memoria las tablas de verdad semánticas de los conectivos;
- en vez de entender las condiciones internas intrínsecas de un sistema de dos ecuaciones lineales, se estudian los métodos de solución, por ejemplo el método de Cramer);
- para el estudio de qué es una superficie, se dan reglas para calcular el área de un cuadrilátero;
- en vez de estudiar y aprender el teorema de Ruffini, se aprende la regla de Ruffini;
- la pruebas nacionales e internacionales, de control de los resultados del aprendizaje, pasan primero a ser objetivos de enseñanza, después medios de enseñanza y por último objeto mismo de enseñanza; estas tienden a transformar nuestras concepciones de conocimiento y de aprendizaje en una especie de ejercitación;

etcétera.

Se trata siempre evidentemente de resbalones meta-didácticos, extremadamente potentes y peligrosos.

Referencias bibliográficas

"Piensen ahora mis 25 lectores" (¿25?; ¡ojalá, querido Alessandro!)[1] lo aburrido que sería si yo intentara tan sólo hacer una lista de aquellos textos a los cuales he hecho referencia implícita …

Me disculpo por esta voluntaria omisión. Pero esta es una ocasión de fiesta.

De otra parte mis alumnos más devotos sabrán a qué trabajos escritos he hecho referencia.

[Traduzione di Martha Isabel Fandiño Pinilla e di Salvador Llinares]

[1] [Alessandro Manzoni (1785 – 1873) es uno de los más grandes escritores italianos, poeta y autor de textos teatrales. Su novela *I promesi sposi (Los novios)* (I edición: 1827; 40ª edición: 1841) es uno de los grandes clásicos de la lengua italiana, al cual sobre todo pertenece el mérito de haber contribuido a la unificación de la lengua italiana en un período en el cual los diversos dialectos y las lenguas regionales hacían imposible la comunicación en aquella tierra que después sería conocida como el Reino de Italia (de 1861 a 1946). En el Capítulo I de la novela, el Autor se dirige irónicamente al destinatario de su magnífica obra con la célebre frase "mis veinticinco lectores", de forma modesta; en realidad el libro tuvo un gran éxito inmediatamente. La novela fue traducida en 21 idiomas, de esta se han adaptado operas, películas, musicales, parodias, comics, …].

Diez años leyendo a Bruno en Cali

Luis Carlos Arboleda
Instituto de Educación y Pedagogía
Universidad del Valle, Colombia

Abstract. *A message on the occasion of the birthday of Bruno D'Amore.*

Si la memoria no me falla, mi encuentro personal con Bruno D'Amore fue a mediados de 2006 a raíz de su vinculación a los seminarios del Doctorado Interinstitucional en Educación de las Universidades Distrital, Pedagógica y del Valle en Bogotá y Cali. Naturalmente antes había tenido conocimiento de sus trabajos. Conocía algunas de sus ideas principales no solo en didáctica, historia y epistemología de las matemáticas, sino también en etnomatemática, todas ellas líneas de investigación y formación de posgrado de los grupos de educación matemática e historia de las matemáticas en Cali.
Con respecto al vinculo de Bruno con la etnomatemática tengo la siguiente anécdota. Recuerdo que por entonces estábamos adelantando en Cali un proyecto consagrado al estudio de la lógica de los arhuacos (comunidad indígena de la Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia). Este estudio se adelantaba a partir del análisis de los patrones de representación geométrica en las mochilas arhuacas. Ubiratan D'Ambrosio, era asesor del proyecto en tanto profesor invitado de nuestro Instituto. En un evento internacional incidentalmente le escuché a Ubi referirse a una publicación reciente de Bruno sobre la lógica hindú (*nyaya*) en la argumentación matemática de los alumnos. Por alguna razón que se me escapa, en ese momento no establecimos la conexión de esta publicación con el proyecto. Solamente después descubriría que este importantísimo trabajo apuntaba en la misma dirección del problema que entonces discutíamos con Ubi en varios grupos de la Sociedad de Historia Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología: cómo definir relaciones pertinentes entre etnomatemática, historia de las matemáticas y enseñanza de las matemáticas. El estudio de Bruno mostraba la necesidad de que el análisis didáctico incorporara marcos epistemológicos de referencia no occidentales, con el fin de determinar la presencia eventual de formas lógicas de argumentación no aristotélicas en el pensamiento deductivo de los alumnos.
En cuanto a las cuestiones propiamente didácticas, el encuentro con Bruno ocurre cuando estudiábamos con algunos de mis alumnos las condiciones bajo las cuales es posible aprovechar ciertos episodios de la constitución histórico-epistemológica de objetos matemáticos (siendo la primera que tales episodios estuvieran convenientemente documentados en la práctica matemática), para formular lineamientos pertinentes a la enseñanza de las matemáticas y a la

formación de docentes. El tema era, y sigue siendo, uno de los principales ejes de reflexión de los seminarios doctorales que desde 1997 veníamos dirigiendo en Cali Carlos Eduardo Vasco y yo, con la participación de filósofos, historiadores y didactas como Duval, Vergnaud, Moreno, Paty, Panza y Álvarez, entre otros.
En el seminario de Duval de 1999 esta cuestión se había abordado de manera sistemática en la perspectiva de su libro sobre semiósis y pensamiento humano, traducido al castellano en Cali a partir del estudio cuidadoso que hicimos bajo su dirección. De manera que, siete años después, Bruno nos ofrecía renovar la reflexión de esta problemática de objetivación y función semiótica en varios frentes importantes, como por ejemplo las dificultades que comporta en la enseñanza de las matemáticas el desarrollo de habilidades que le permitan a un estudiante el paso de una a otra de las representaciones mentales que se forma de un objeto matemático.
Tanto más interesante se reveló el encuentro con Bruno en conexión con el enfoque semiótico y los usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática. Concretamente en lo que tuvo que ver con la circulación entre nosotros de dos publicaciones suyas, una de 2005 en colaboración con Bagni sobre "Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale", y la otra de 2006 en asocio con Radford y Bagni sobre "Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale". Ambos trabajos venían a confirmarnos que se requería más investigación sobre la constitución de los objetos matemáticos en sus respectivos contextos socio culturales, para estar en condiciones de aplicar efectivamente la historia sociocultural en la práctica educativa.
En lo sucesivo varios de nuestros estudiantes adelantarían, siempre contando con la generosa colaboración de Bruno, investigaciones de maestría y doctorado sobre las modalidades de apropiación y uso didáctico por parte del profesor de la historia socio-cultural del conocimiento y el pensamiento matemático. En septiembre del año pasado hice una presentación del enfoque que, a mi modo de ver, compartimos entre mis colegas sobre esta materia, durante el Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática que Bruno y Martha Fandiño organizaron en Santa Marta, Colombia en septiembre de 2015. El tema de estudio, discutido previamente con Bruno y otros colegas en un seminario doctoral de Bogotá, fue la objetivación de los números reales en la perspectiva histórico-epistemológica de la práctica matemática. El componente didáctico de la experiencia involucraba la apropiación de esta historia en la formación docente, utilizando para ello determinada modalidad de interpretación semiótica de la prueba de la completitud.
Los encuentros intelectuales con Bruno han sido la ocasión de identificar publicaciones de otros autores cuya lectura resultaría enriquecedora para ambos. Menciono al menos dos casos. En primer lugar, "Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica" (2010), bajo la autoría de mi querido amigo Marco Panza en colaboración con Sereni. Un

"bello libro muy profundo" como dice Bruno. En efecto, se trata en nuestra opinión del estudio histórico epistemológico mejor elaborado sobre el argumento ontológico del platonismo o realismo matemático. Su lectura despertó en su momento tal interés en ambos que no hace mucho constatamos que de manera independiente nos habíamos visto obligados a estudiar ciertas cuestiones delicadas en las versiones revisadas en francés e inglés. Incluso llegamos a proponernos, *helàs*, sin haberlo cumplido hasta hoy, su traducción al castellano.
Hace un par de años al evocar en una conversación a Jean Dhombres, uno de mis referentes intelectuales desde los inicios de mi carrera como historiador de las matemáticas que sin yo saberlo resultó ser amigo íntimo suyo, Bruno me comentó que recientemente había sido jurado del tribunal de tesis de un tal Caianiello, alumno de Dhombres. Con el tiempo cayó en mis manos la tesis: "La genèse des mathématiques et la puissance dynamique du mental humain", una especie de música celestial para quien se interesa en comprender las razones de ser de la lógica interna de las teorías matemáticas como actividad humana y en cómo valorar adecuadamente el papel de las concepciones y valores matemáticos en tal actividad. Con la tesis vino después otro libro del mismo Caianiello con enfoques renovadores sobre la historia y la enseñanza de las matemáticas: "Espérer dans l'école. Une nouvelle éducation à la science dans le système des lycées".

Gracias Bruno.

Area e volume prima delle formule

Gianfranco Arrigo
SMASI Lugano, NRD Bologna

Sunto. *L'articolo offre una serie di problemi ideati per aiutare l'allievo a costruirsi le prime immagini mentali relative ai concetti di area e volume. Tali attività dovrebbero essere svolte in classe molto prima di giungere alla formalizzazione delle note formule per il calcolo, che, se non preceduta dalla necessaria fase euristica, non consente agli allievi di apprendere correttamente i concetti di area e di volume.*

Abstract. *The article offers a range of problems created to help the student to build the first mental images related to the concepts of area and volume. These activities should be dealt with in the classroom long before reaching the formalization of the well-known formulas for calculation. If this formalization is not preceded by the necessary heuristic phase, it does not allow the students to properly learn the concepts of area and volume.*

1. La questione delle formule

Tutti convengono, credo, che se lo studente, per calcolare aree e volumi, fa capo automaticamente alle formule relative alle figure geometriche canoniche, non si possa dire che lo stesso abbia la padronanza della situazione. Anzi, il ricorso abituale alla formula causa l'offuscamento progressivo delle immagini mentali che concorrono alla formazione dei concetti di area e volume.
L'insegnante che ha mirato direttamente alla memorizzazione delle formule non deve stupirsi e nemmeno arrabbiarsi se, di fronte a un problema che concerne figure insolite – dalle più semplici, composte di figure canoniche, alle più raffinate, la cui scomposizione in figure semplici non è scontata, o ad altre che non si prestano a tali scomposizioni – l'allievo non sa agire in modo conveniente. Lo stesso insegnante non dovrebbe rimanere perplesso di fronte alla classica confusione tra perimetro e area di una figura piana e tra volume e area della superficie di un solido.[1]
Ecco perché occorre lavorare in classe su questi concetti, molto prima di giungere alle abituali formalizzazioni. Queste ultime, poi, dovrebbero essere ridotte all'indispensabile e concernere solo le formule basilari: per l'area quella relativa al rettangolo (facilmente estendibile ai casi del parallelogrammo e del triangolo), per il volume quella concernente il parallelepipedo rettangolo (facilmente estendibile ai prismi retti e con un passetto in più alle piramidi). Un lavoro a parte, con forte valenza concettuale,

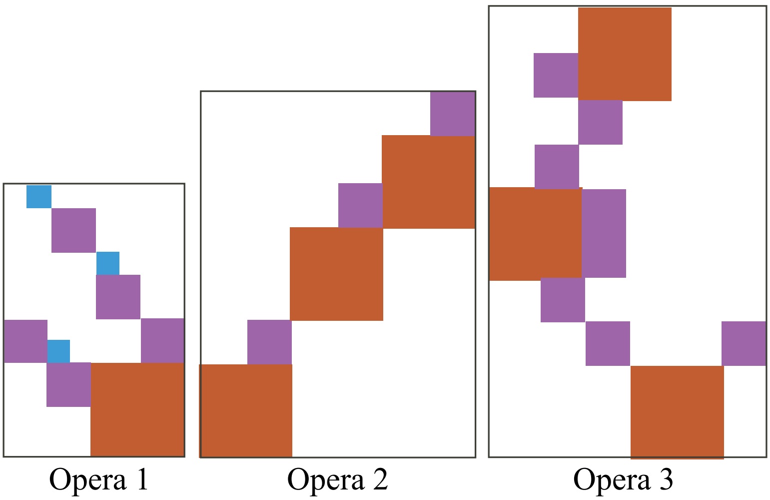
[1] Interessanti esperienze in questo ambito si possono trovare sul testo di Fandiño Pinilla e D'Amore (2006).

va fatto per l'area del cerchio e analogamente per il volume del cilindro e del cono.
Per contro: trapezi, rombi, poligoni regolari, parti del cerchio, così come tronchi di piramidi e coni, cilindri cavi e via dicendo non dovrebbero generare formule da memorizzare, ma costituire un primo campo di ampliamento delle situazioni basilari.
Scopo di questo scritto è di proporre una serie di problemi propedeutici ai concetti di area e di volume, attività che nella scuola, secondo me, dovrebbero essere compiute in un lasso di tempo sufficientemente ampio (l'acquisizione delle prime immagini mentali richiede un certo tempo) e, come già scritto, decisamente prima di mirare alla formalizzazione.
Di ogni problema si propone la consegna scritta, ma è bene ricordare l'importanza di variare i registri semiotici, scegliendo i più adatti alla classe, oppure dando la possibilità agli allievi di convertire la consegna data in un registro semiotico che si presti meglio alla costruzione di possibili iter risolutivi (Arrigo, 2016).
Le domande relative ai problemi riportati di seguito non sono le sole possibili e anche il modo di esprimerle può essere diverso.
Gli iter risolutivi, solo accennati, possono essere sostituiti da altri. Il valore di queste attività sta anche nella possibilità offerta agli allievi di trovare nuovi percorsi risolutivi come anche nuovi interrogativi, nuove situazioni stimolanti.

2. Problemi introduttivi al concetto di area

2.1. Quadri geometrici

Le tre opere sono composte di quadrati di colore diverso. L'area del quadrato più grande (marrone) è 4 volte l'area del quadrato intermedio (viola) e 16 volte quella del quadrato più piccolo (azzurro) dell'opera 1.



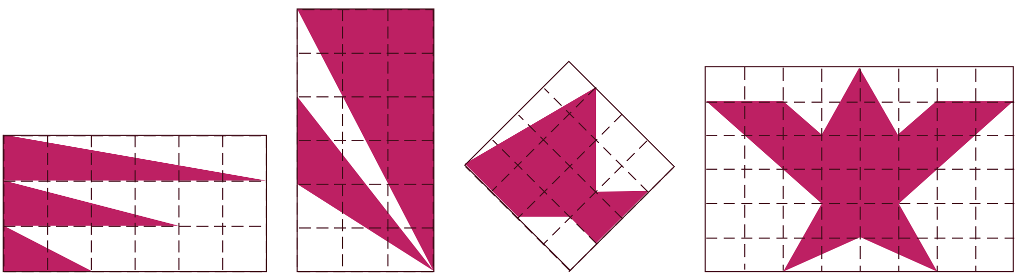
Domande possibili

- *Quanti quadrati grandi ricoprono ciascun quadro? Quanti la parte colorata?*
  (Questo numero lo chiamiamo misura rispetto all'unità quadrato grande.)
- *Quanti quadrati medi ricoprono ciascun quadro? Quanti la parte colorata?*
  (Questo numero lo chiamiamo misura rispetto all'unità quadrato medio.)
- *Quanti quadrati piccoli ricoprono ciascun quadro? Quanti la parte colorata?*
  (Questo numero lo chiamiamo misura rispetto all'unità quadrato piccolo.)
- *Ordina le tre misure che hai ottenuto dalla minore alla maggiore (sia quelle dell'intero quadro, sia quelle della parte colorata).*
- *Scegliendo unità più grandi si ottengono misure più grandi o più piccole?*
- *Se i quadri geometrici ti sono piaciuti, disegnane altri e per ciascuno rispondi alle domande precedenti.*

Commento

L'estensione di ogni quadro viene determinata mediante ricoprimenti con quadrati di tre grandezze diverse. A dipendenza dell'unità scelta si ottengono misure (dell'area) diverse. L'allievo è spinto a rendersi conto che con unità più grandi si ottengono misure minori. Con allievi già introdotti al concetto di divisione si può perfezionare questa conoscenza, giungendo alla conclusione che se l'unità è doppia, la misura è la metà e che se l'unità è quadrupla la misura è un quarto.
La terza domanda permette agli allievi di trasformarsi in artisti e realizzare composizioni decorative personali, variando eventualmente i colori e anche i quadrati unità. Variando i rapporti fra i diversi quadrati unitari, l'allievo può perfezionare la relazione esistente tra l'estensione dell'unità e la misura dell'area (rapporto di proporzionalità inversa), ciò che contribuisce a una migliore conoscenza della grandezza geometrica area.

2.2. Superfici sulla griglia



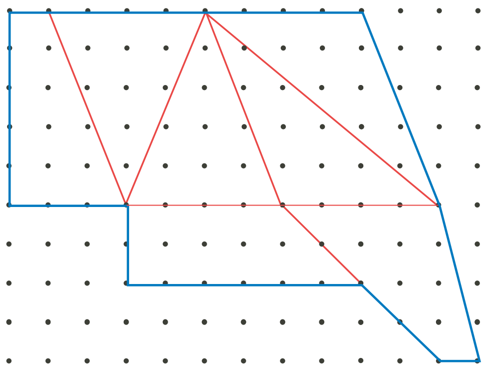
Domanda

Di ciascuna figura trova la misura (dell'area) della superficie colorata rispetto al quadrato unitario della griglia.

Commento

Questa situazione propone figure inserite in una griglia quadrata. Il calcolo dell'area può essere fatto senza ricorrere ad alcuna formula, giocando con addizioni e sottrazioni di triangoli che sono visti come metà di rettangoli. L'attività è un'ottima palestra per rafforzare le capacità di comporre e scomporre figure poligonali.
Si possono invitare gli allievi a disegnare nella griglia altre figure delle quali calcoleranno l'area. All'occorrenza si potrebbero anche inserire nella griglia figure canoniche e ricavarne osservazioni che più tardi verranno formalizzate senza dover ricorrere alla griglia.

2.3. Suddivisione equa di un terreno



La figura rappresenta la mappa di un terreno, inserita in una griglia quadrata.
Un geometra ha tracciato i segmenti rossi che dovrebbero suddividere il terreno in 7 parti di stessa area.

Domande possibili

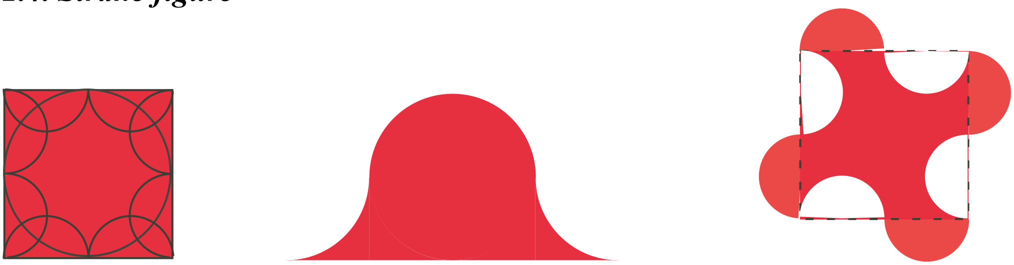
Ci è riuscito? Perché? Spiegalo con tue parole.

Commento

Le 7 parti sono figure semplici che possono essere scomposte come nel problema precedente.
L'allievo può scegliere tra il calcolo dell'area di ciascuna delle 7 parti, oppure ridurre questo lavoro osservando che vi sono parti evidentemente equiestese, oppure ancora calcolando dapprima l'area del rettangolo circoscritto e, mediante sottrazioni, quella dell'intero terreno. Vi sono 6 parti la cui area è

facilmente calcolabile. Se ciascuna di esse risulta essere 1/7 del terreno, lo sarà pure la settima. Ciò permette di evitare il calcolo relativo alla figura più problematica: un'astuzia che permette all'allievo di rendersi conto come sia importante e utile il concetto di additività dell'area.
Poter scegliere fra più modi di calcolare rende il lavoro più interessante e formativo per l'allievo, a condizione che, alla fine, si discutano e confrontino in classe i vari modi di procedere.

2.4. Strane figure



Domande possibili

- *Che relazione c'è tra l'area del primo quadrato e quella delle due figure che seguono?*
- *Come sono state ottenute le due figure non quadrate?*
- *Puoi ottenere altre figure analoghe, ritagliando parti del quadrato iniziale, seguendo le linee disegnate (che sono tutte archi di circonferenza). Confronta poi le aree delle figure ottenute con quella del quadrato di partenza.*

Commento

L'attenzione è sempre rivolta all'area, ma, dalle figure poligonali si passa, con questa proposta, a belle figure con contorni anche curvi (archi di circonferenza). Così l'allievo può da un lato costatare che le due figure curvilinee hanno la stessa area del quadrato di partenza (ciò che di solito genera stupore) e dall'altro ricavare la soddisfazione di essere in grado di calcolare l'area di strane (e belle) figure non poligonali.
Il procedimento risolutivo può per esempio consistere in un lavoro di ritaglio del quadrato di partenza e successiva ricomposizione concretamente eseguita o solo immaginata (ciò che esige dall'allievo un importante processo di astrazione e di intuizione).
L'effetto estetico e la soddisfazione di aver raggiunto questi primi risultati – che testimoniano la possibilità di trovare l'area di figure apparentemente fuori dalla portata di un allievo di scuola elementare – rafforzano l'importante concetto di composizione/scomposizione di aree e stimolano gli allievi a trovare altre figure analoghe.
Estetica e riflessione matematica si uniscono meravigliosamente.

3. Problemi introduttivi al concetto di volume

3.1. Costruzioni con legnetti[2]

Le prime due figure che seguono rappresentano scale di 3 gradini ciascuna, costruite con cubetti unitari che si differenziano solo per il colore.
La terza figura rappresenta una poltrona interamente composta di parallelepipedi rettangoli ottenuti saldando insieme due cubetti.
(Nelle tre costruzioni, le parti nascoste non presentano rientranze.)

scala A3

scala B3

poltrona

Domande possibili

- *Quanti cubetti unitari compongono ciascuna scala?*
- *Quanti pezzi occorrono per costruire la poltrona? Se si volesse ricostruire la poltrona usando solo cubetti unitari, quanti ce ne vorrebbero?*
- *Considera le scale A3 e B3. Quanti cubetti unitari occorrerebbe aggiungere per ottenere un cubo* $3 \times 3 \times 3$*?*
- *Costruisci o immagina le scale A4, B4, A10, B10. Quanti cubetti occorrono per costruire ciascuna scala?*
- *Considera come unità di superficie la faccia di un cubetto unitario. Trova l'area dell'intera superficie di A3, B3 e della poltrona.*
- *Considera come unità di area la faccia di un cubetto unitario. Trova l'area dell'intera superficie di A3, B3 e della poltrona.*
- *Progetta altre costruzioni e di ciascuna trova il numero di cubetti (o altri pezzi) necessari per costruirle e la misura della superficie totale rispetto all'unità faccia di un cubetto unitario.*

---

[2] Le costruzioni sono realizzate con legnetti colorati scelti da una delle diverse scatole gioco per bambini, in commercio.

Commento

Questa è una delle tante attività propedeutiche all'apprendimento dei concetti di volume e di area in un contesto tridimensionale. Potendo lavorare con cubetti unitari, la misura del volume coincide semplicemente col numero di cubetti che compongono il solido. Nel caso della poltrona, vengono usati parallelepipedi rettangoli composti di due cubetti. L'occasione è propizia per costatare che lo stesso volume può avere misure diverse a dipendenza dell'unità usata, come già osservato a proposito dell'area.

A seconda dell'età degli allievi, il lavoro può essere realizzato costruendo concretamente i solidi usando i legnetti unitari, oppure solo esaminando le figure, ciò che esige una certa abitudine a immaginare situazioni tridimensionali, deducendole da rappresentazioni bidimensionali.

La determinazione del complemento delle scale al cubo $3 \times 3 \times 3$ stimola le capacità di vedere con la mente ciò che non è immediatamente visibile a occhio.

La domanda sulle scale A4, B4, A10 e B10 tocca due aspetti interessanti: la struttura della successione di scale che l'allievo è stimolato a intuire – soprattutto per quelle di 10 scalini – e il calcolo numerico da eseguire senza calcolatrice. Questi calcoli, inseriti in un contesto di *problem solving*, stimolano l'allievo a trovare opportuni modi di procedere e creano curiosità relativamente al risultato. Per esempio, si potrebbe procedere associando gli addendi a due a due in questo modo:

per A10

$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30 =$

$= (3+30) + (6+27) + (9+24) + (12+21) + (15+18) = 33 \times 5 = 165$

oppure

$= 3 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 3 \times 11 \times 5 = 165$

per B10

$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 =$

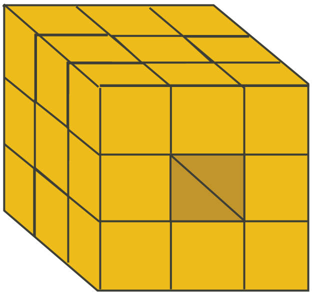
$= (9+1) + (4+16) + (36+64) + (49+81) + (100+25) =$

$= 10 + 20 + 100 + 130 + 125 = 385$

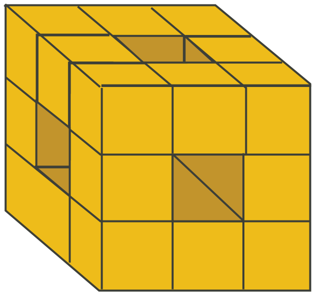
La domanda sull'area è importante perché offre all'allievo un'ottima occasione per confrontare la diversa natura dei concetti di area e di volume. Calcolare l'area di una superficie in un contesto tridimensionale è ben altra cosa che farlo in un ambito bidimensionale. Inoltre, nella situazione qui proposta, il conteggio del numero di quadrati unitari esige l'adozione di un criterio che permetta di eseguire l'operazione senza correre il rischio di dimenticare un quadratino unitario o di contarne un altro due volte. Un buon modo di procedere consiste nel suddividere le facce secondo il parallelismo: si hanno così 3 insiemi di facce ciascuno dei quali facilmente esaminabile.

3.2. I cubi forati

I cubi forati rappresentati di seguito sono ricavati da un cubo di 27 cubetti, togliendone alcuni. Ogni foro va da una faccia a quella opposta; non vi sono altri cubetti mancanti.



Cubo forato 1



Cubo forato 2

Domande possibili

Di ogni cubo forato trova:

– *di quanti cubetti unitari è costituito;*

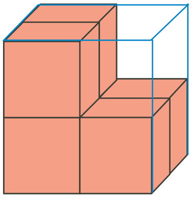
– *l'area dell'intera superficie rispetto all'unità rappresentata dalla faccia di un cubetto unitario.*

Commento

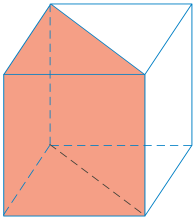
Anche questa attività è propedeutica all'apprendimento del concetto di volume e di area della superficie applicati a un solido particolare. La novità rispetto alla precedente è costituita dal fatto che le costruzioni presentano dei fori e quindi occorre immaginare la parte interna visibile solo parzialmente.
Il calcolo del volume (del numero di cubetti) è relativamente facile: basta sottrarre ai 27 cubetti quelli che sono stati tolti.
A seconda dell'età degli allievi, il lavoro può essere realizzato costruendo i solidi usando cubetti unitari, oppure solo con l'ausilio delle figure, ciò che esige una certa abitudine a immaginare situazioni tridimensionali, deducendole da rappresentazioni bidimensionali.
Per il calcolo dell'area dell'intera superficie, occorre maggiore attenzione. Vi sono facce da togliere e altre da aggiungere. Questo stimola parecchio le capacità di vedere con la mente oggetti tridimensionali non completamente visibili.

3.3. Parti di un cubo

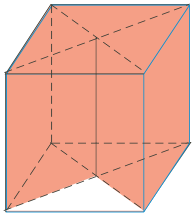
Osserva attentamente i solidi colorati, ottenuti da un cubo.



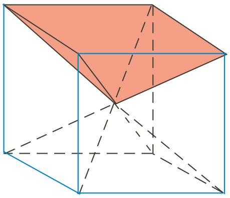
1



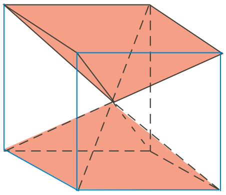
2



3



4



5

Domande possibili

– *Per ogni figura indica quale frazione del cubo circoscritto occupa il solido rosso.*

Considera la figura 5 e immagina di sezionare il cubo circoscritto con un piano parallelo alle facce caratteristiche delle due piramidi. Ottieni due prismi quadrangolari. Concentra l'attenzione su uno dei due.

– *Quale frazione del prisma circoscritto occupa la piramide?*
– *Se conosci il volume del prisma, come calcoleresti quello della piramide? (Puoi indicare con VPRI il volume del prisma e con VPIR quello della piramide).*

Commento

Fra i poliedri basilari, per intenderci quelli che conviene conoscere per poi poter modellizzare oggetti spaziali comuni, vi sono i prismi e le piramidi. È consigliabile entrare contemporaneamente nel mondo di questi due tipi di solidi, mettendo in evidenza elementi comuni e differenze.
In questo ordine di idee, il calcolo del volume è particolarmente interessante. Per entrambi i tipi, le variabili che entrano in gioco sono due: l'area della faccia caratteristica e la relativa altezza. L'unica differenza (importante) tra prismi e piramidi è il coefficiente 1/3 che occorre applicare per la piramide. Questa difficoltà, di solito, a scuola, viene superata empiricamente mediante l'impiego di solidi cavi che vengono riempiti di acqua o di sabbia, oppure mediante immersione di solidi pieni in recipienti graduati riempiti di acqua, o altro ancora.
Vi è però un metodo geometrico, suggerito nella seconda parte delle domande di questo problema, limitatamente al caso del cubo (tralascio in questo scritto la descrizione di possibili modi geometrici per giungere alla generalizzazione).

Le figure proposte nella consegna dovrebbero essere leggibili senza difficoltà dalla maggior parte degli allievi di scuola media. Per gli altri, e in particolare per quelli più giovani delle elementari, può essere utile l'impiego di modellini concreti, facilmente manipolabili. Per l'allievo, la difficoltà maggiore risiede nel vedere che il cubo può essere scomposto in 6 piramidi uguali a quella rappresentata nella figura 4. Di conseguenza, giocando sui rapporti equivalenti 2/6 e 1/3, il volume del solido della figura 5 (doppia piramide) è un terzo di quello del cubo. Infine il passaggio alla scomposizione del cubo in due prismi non dovrebbe creare particolari difficoltà.
Osservo, da ultimo, che il coefficiente 1/3, oggetto misterioso troppo spesso dimenticato dagli allievi delle medie, può essere capito già nella scuola primaria, in casi particolari, d'accordo, ma significativi per la costruzione delle prime fondamentali immagini mentali.

Bibliografia

Arrigo, G. (2016). Il problema nella scuola. *Bollettino dei docenti di matematica, 72*, 77–96.

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria*. Roma: Carocci Faber.

Cottino, L., Gualandi, G., Nobis, C., Ponti, A., Ricci, M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011). *Geometria*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Ragionamento deduttivo e modello argomentativo nyaya

Miglena Asenova
NRD, Università di Bologna

Sunto. *In questo articolo vengono esaminate le caratteristiche del modello argomentativo nyaya, al fine di stabilire il suo legame con il ragionamento deduttivo, facendo riferimento ai lavori di Duval relativi all'analisi del funzionamento cognitivo e alla comprensione dei processi della dimostrazione in matematica.*

Abstract. *In this paper the features of the nyaya argumentative model are examined, referring to Duval's works on the analysis of cognitive functioning and understanding of the processes of mathematical proof, in order to establish its connection with deductive reasoning.*

1. Premessa

Uno dei problemi più controversi nell'evoluzione del curricolo di matematica sia in Italia sia in altri Paesi del mondo è quello relativo all'avvio degli studenti alla pratica didattica della dimostrazione. Nell'ultimo decennio in Italia si è fatta avanti l'idea, rintracciabile nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo d'istruzione, che a questi livelli scolastici non sia possibile introdurre la dimostrazione nel suo più ampio senso logico, ma che sia opportuno avviare gli studenti al ragionamento matematico attraverso l'argomentazione.[1]

L'opinione che l'argomentazione sia propedeutica alla dimostrazione non è tuttavia condivisa da tutti i ricercatori in didattica della matematica e inoltre, come sottolinea Balacheff (1999), l'adesione a una piuttosto che a un'altra concezione di argomentazione induce necessariamente a prese di posizione diverse riguardo a ciò che l'argomentazione può rappresentare nell'ambito dell'azione didattica e in particolare in riferimento alla dimostrazione.

Lo scopo di questo breve articolo è quello di esaminare le caratteristiche di un particolare modello argomentativo: il modello nyaya (il cui nome tradotto significa "logica"), nato nel I secolo d. C, in seno all'omonima scuola filosofica indiana.

Il testo che proponiamo è uno stralcio di un lungo lavoro di ricerca che ci prefiggiamo di condurre nei prossimi anni e che ha preso spunto da un articolo di Bruno D'Amore (D'Amore, 2005), relativo all'argomentazione matematica

---

[1] Si vedano a tale proposito le Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012, p. 51).

spontanea di allievi di scuola secondaria. Nelle nostre considerazioni faremo inoltre riferimento ai lavori di Raymond Duval, relativi all'analisi del funzionamento cognitivo e della comprensione dei processi matematici della dimostrazione (Duval, 1992–93, 2007).

2. L'argomentazione *nyaya*

Secondo la scuola filosofica indiana nyaya, che sviluppò un insieme di regole per la speculazione razionale, la falsa conoscenza è una delle cause che impedisce all'essere umano di uscire dal mondo della sofferenza; il retto pensare è in questo senso uno strumento indispensabile per giungere alla liberazione. La nyaya era dunque strettamente legata alla concezione etica e religiosa dell'omonima corrente filosofica; tuttavia, il Nyaya-sutra di Gautama, del I sec. d. C., nel quale viene esposta la struttura logica di quello che veniva considerato "il retto ragionare", è un vero e proprio trattato di logica. Vediamo più da vicino questo modello argomentativo, mettendo in evidenza i suoi strumenti e il suo schema di ragionamento. A tale scopo seguiamo D'Amore (2005).

La nyaya riconosce un'importanza preminente ai seguenti quattro "mezzi di conoscenza": *la testimonianza*, *l'analogia*, *la percezione* e *l'inferenza*.

La testimonianza comprende tutto ciò che viene considerato degno di fede, come per esempio le preghiere, la rivelazione divina, la storia tramandata etc.

L'analogia è un modo di ragionare che consente di definire un oggetto in base alla sua somiglianza con altri. Il corrispondente a questo concetto nella logica aristotelica è dato dalla definizione per genere prossimo e differenza specifica oppure dalle definizioni tramite il passaggio al quoziente. *La percezione* è la relazione tra l'oggetto (sensibile) e l'immagine che si ha di esso. La nyaya ha un'impronta pratica ed empirista e quindi non deve meravigliare il fatto che essa dia molta importanza alla percezione; tuttavia non si deve trascurare il fatto che per questa dottrina anche l'intelletto rappresenta un senso ed è dunque un mezzo di percezione.

L'inferenza è infine ciò che può essere considerato "il sillogismo" nyaya ed ha la seguente struttura:

1. l'*asserzione* (non dimostrata); è l'enunciazione di ciò che si vuole dimostrare;
2. la *ragione*;
3. la *proposizione generale* o enunciato, seguita da un *esempio*;
4. l'applicazione, detta anche *seconda asserzione*;
5. la *conclusione* (D'Amore, 2005, pp. 5–6).

2.1. L'argomentazione nyaya e il ragionamento deduttivo

Esaminiamo ora lo schema argomentativo nyaya facendo ricorso all'analisi delle caratteristiche dell'argomentazione e della dimostrazione effettuata da Duval (Duval, 1992–93, 2007). Consideriamo a tale scopo la natura delle

proposizioni che sono coinvolte (o coinvolgibili), la natura dell'inferenza a livello locale e la struttura dell'argomentazione a livello globale.
Come abbiamo già accennato, la nyaya è una logica che nasce con un intento speculativo, ma di natura pragmatica, legato cioè alla spiegazione razionale di fenomeni che possono cadere sotto ai sensi. Tuttavia le proposizioni coinvolte in questo tipo di argomentazione sono delle proposizioni di cui si intende dimostrare la verità (o falsità) ed esse hanno dunque un valore logico di verità. Nonostante il loro contenuto sia di tipo informativo, è importante notare che nel modello nyaya si fa espressamente cenno all'esigenza di verità (o di veridicità) e non solo ad un grado di plausibilità delle premesse della proposizione coinvolta (si veda a tale proposito il penultimo passo, quello della seconda asserzione).
Soffermiamoci ora sulla natura dell'inferenza dal punto di vista locale. Trattandosi di un modello argomentativo con un forte legame con la realtà sensibile, il "se … allora …" dell'inferenza nelle singole proposizioni è di tipo causale e non di tipo logico (non è dunque un'implicazione materiale). Però nell'inferenza nyaya si esamina espressamente la verità della premessa e questo fatto consentirebbe a nostro avviso un'eventuale espansione di significato a tutti i casi di valori di verità assegnabili alla premessa e quindi al connettivo logico "se … allora" (D'Amore, 2001). A nostro avviso si può dunque affermare che gli enunciati presi in considerazione dal modello argomentativo nyaya abbiano un valore epistemico teorico e non normativo; infatti, in essa, la legge (o proposizione) generale *garantisce* effettivamente il suo valore di verità. Inoltre, dal punto di vista del ruolo di una proposizione nel singolo passo inferenziale, è possibile notare come nel modello nyaya essa abbia un compito ben definito, in riferimento alla sua azione come premessa, come conclusione o come enunciato terzo (più precisamente come generalizzazione del particolare).
Esaminiamo ora il ruolo di una proposizione nell'organizzazione globale del discorso, cioè in relazione alle altre proposizioni. Ad un primo sguardo, seguendo l'analisi di Duval, si potrebbe pensare che nello schema nyaya, le proposizioni abbiano uno statuto normativo (si fa riferimento ad opinioni autorevoli etc.) e non teorico. Tuttavia, il fatto che l'argomentazione nyaya ponga tra i mezzi di conoscenza la testimonianza (con forti riferimenti ad un'autorevolezza trascendente) e la percezione, non esclude che tali testimonianze possano avere il ruolo di assiomi in un sistema che fa riferimento ad un certo tipo di razionalità. L'argomentazione nyaya rappresenta dunque una struttura argomentativa che consente di attribuire alle proposizioni coinvolte uno statuto teorico, supposto che si fissi un sistema di razionalità appropriato. Nulla vieta che tale razionalità sia quella di una teoria matematica. Infine, possiamo notare la presenza della chiusura del "sillogismo" nell'argomentazione nyaya, che rappresenta in realtà null'altro che un esempio della regola di "… modus ponens allargato al calcolo dei

predicati, un'operazione logicamente corretta ed essenziale al funzionamento di quel sillogismo …" (D'Amore, 2005, p. 7). Dunque la conclusione di un passo può diventare la premessa di quello successivo, creando così una struttura priva di lacune dal punto di vista logico.

2.2. Il ruolo della generalizzazione e degli esempi nel modello argomentativo nyaya

Consideriamo infine due aspetti della struttura argomentativa esaminata, i quali hanno una certa importanza sia dal punto di vista teorico sia da punto di vista didattico: l'uso del concetto di generalizzazione e il ricorso a esempi.
La generalizzazione effettuata nella formulazione dell'enunciato generale dello schema nyaya è chiaramente di natura induttiva e le regole che si devono seguire per poterla effettuare non sono chiaramente esplicitate (probabilmente il concetto di generalizzazione nel sistema di riferimento nyaya è molto diverso da quello della generalizzazione in matematica e si basa su un certo numero di esempi osservati o ipotizzabili coinvolgendo i "mezzi di conoscenza" contemplati (si veda a tale proposito D'Amore, 2005). L'induzione nyaya è naturalmente tutt'altra cosa rispetto al principio di induzione in matematica, e rappresenta forse il suo aspetto più "debole", dal punto di vista logico in senso moderno. Tuttavia, anche qui, nulla vieta di immaginare in questo punto dello schema l'uso di una generalizzazione logicamente corretta, il cui mancato ottenimento dimostrerebbe la falsità della proposizione. Inoltre, se esaminiamo bene la struttura del modello nyaya, possiamo notare come il "vero" sillogismo, cioè quello che corrisponderebbe ad un passo deduttivo (supposta una generalizzazione corretta), è solo l'ultima parte dell'inferenza, mentre gli step precedenti servono al soggetto per prendere confidenza con ciò che deve essere dimostrato. In questo senso, la generalizzazione prende l'aspetto di una vera e propria congettura, nata dall'esame di un dato numero di casi e soprattutto dall'esame di eventuali analogie con altri casi già noti. Nello stesso senso si può valutare anche il fatto che all'inizio la posizione della tesi e dell'ipotesi sono invertite rispetto all'ordine che viene imposto nel ragionamento di tipo deduttivo per noi classico. I passi che precedono la costruzione dell'affermazione generale rappresentano quindi una ricerca preliminare, sperimentale, degli enunciati e dei concetti che devono intervenire nel passo deduttivo.
Facciamo infine alcune considerazioni sull'uso degli esempi. Gli esempi sono sostanzialmente estranei ad un ragionamento di tipo deduttivo, mentre sono tenuti in grande considerazione nel ragionamento nyaya. Tuttavia, se esaminiamo la struttura dello schema nyaya, possiamo notare che l'esempio che deve essere portato a supporto dell'affermazione generale non ha un ruolo "vitale" nella struttura: possiamo infatti immaginare di eliminare il riferimento ad esempi e il ragionamento nyaya sarebbe comunque logicamente corretto; in effetti, in quella filosofia l'esempio ha primariamente una funzione di

ancoraggio alla realtà, di limitazione di ragionamenti puramente speculativi. Nel testo di D'Amore (2005) si danno interessanti e numerosi esempi cui fanno spontaneamente ricorso studenti di scuola superiore proprio nel senso di "ancoraggio" qui descritto.

3. Conclusioni

Il modello argomentativo nyaya rivela ad un'attenta analisi una struttura molto versatile e ricca di potenzialità dal punto di vista didattico. Si tratta di un modello argomentativo che consente di interpretare in un'unica struttura sia gli aspetti legati alla congettura (con riferimenti forti all'uso dell'analogia), sia gli aspetti legati alla deduzione, sia l'uso degli esempi.

Bibliografia

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning on proof.* http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html.

D'Amore, B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica, 1980–2001*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi della scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, 4, 481–500.

Duval, R. (1992–93). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37–61. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 2, 1996, 130–152; appare anche come primo volume nella collana Bologna–Quéretaro, Bologna: Pitagora].

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools* (pp. 137–161). Rotterdam/Taipei: Sense.

Duval, R., & Egret, M. A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repère*, 12, 114–140.

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot7734_12

Matematica e pedagogia

Massimo Baldacci
Università degli Studi di Urbino

Sunto. *Il contributo esamina la relazione tra matematica e pedagogia. In particolare, intende individuare la funzione specifica della pedagogia in relazione all'organizzazione dei contenuti e dei saperi scolastici. Viene, quindi, presa in esame la distinzione tra pedagogia e didattica ricorrendo alla distinzione dei livelli logici di Bateson e al processo di formazione degli 'abiti mentali'.*

Abstract. *The paper examines the relationship between mathematics and pedagogy. Particularly, it seeks to identify the specific function of education in relation to the organization of the content and educational knowledge. Is, therefore, taken into consideration the distinction between pedagogy and didactics resorting to the distinction of logical levels of Bateson and the process of formation of 'habits of mind'.*

Dopo il latino, la matematica è probabilmente la forma di sapere a cui è stata maggiormente attribuita una valenza "formativa" generale, che trascende il suo specifico valore epistemico per porsi come un principio educativo per l'intero curricolo. In questo genere di valutazione, più che un punto di vista didattico, si usa un'ottica pedagogica. Pertanto, nel nostro intervento, intendiamo analizzare lo spazio della pedagogia rispetto a un sapere come la matematica. Ovviamente, si tratta di una questione che coinvolge la funzione della pedagogia rispetto all'arco complessivo dei saperi scolastici.

Un'ipotesi è che la questione dei saperi esuli dalla sfera di competenza della pedagogia. Un primo argomento in questo senso è che la pedagogia si interessa alla *formazione della personalità*, dunque più agli aspetti relazionali che a quelli culturali. L'insufficienza di questa posizione è trasparente: essa trascura l'influenza che l'esperienza relativa ai diversi saperi può esercitare su tale formazione. Parimenti insufficiente appare l'argomento secondo cui la pedagogia si interessa solo ai *metodi* educativi, non ai *contenuti* culturali. Questa posizione, infatti, presuppone una concezione *formale*, secondo la quale l'efficacia di un metodo dipende solo dalla sua bontà intrinseca. Ma quando il metodo è relativo all'insegnamento dei saperi diventa impossibile negare che la sua struttura e la sua efficacia siano condizionate dall'organizzazione interna degli oggetti culturali. Perciò, se la pedagogia si interessa dei metodi senza curarsi dei contenuti, c'è il rischio che abbia da dire cose poco interessanti o scarsamente utili sui metodi stessi.

Queste considerazioni mostrano, però, soltanto che dichiarare la pedagogia estranea alla questione dei saperi diminuisce fortemente il valore del suo contributo alla formazione scolastica, entro la quale i saperi hanno uno spazio fondamentale. Non dimostrano, tuttavia, che la pedagogia sia effettivamente pertinente per il problema dei saperi. Ci proponiamo, adesso, di argomentare tale pertinenza, individuando un ruolo specifico della pedagogia rispetto a questo problema. Il nostro approccio sarà di tipo *minimalista*: non cercheremo, cioè, di dare la massima estensione allo spazio della pedagogia; tenteremo, invece, di individuare almeno una funzione che sia specifica alla pedagogia, e che sia rilevante per la questione dei saperi nella formazione scolastica. Se si riuscirà a mostrare che esiste una funzione di questo tipo, allora sarà legittimato il ruolo della pedagogia rispetto ai saperi scolastici.

Per sviluppare la nostra argomentazione dovremo tematizzare il nesso e la distinzione tra pedagogia e didattica. L'ipotesi che avanziamo è che tale distinzione non sia tanto relativa al "campo" quanto al livello logico. Almeno rispetto al problema in questione, pedagogia e didattica condividono il medesimo campo: quello del *curricolo*, inteso come percorso formativo inerente ai saperi scolastici. Si può, però, distinguere tra una *didattica curricolare* e una *pedagogia del curricolo* sulla base dei differenti livelli logici che caratterizzano i loro sguardi. Per chiarire questa idea, dobbiamo soffermarci brevemente sulla teoria dei tipi d'apprendimento, formulata Bateson.

Secondo Bateson (1997), per evitare confusioni sull'apprendimento occorre distinguere i suoi livelli logici. Ipotizziamo che questo principio sia estensibile anche al curricolo scolastico. A questo scopo, occorre proiettare i tipi dell'apprendimento sulla struttura del curricolo.

Bateson distingue almeno due livelli dell'apprendimento, in base al genere di *cambiamento* che si verifica: l'*apprendimento 1* (o protoapprendimento) consiste in una modificazione del comportamento e della struttura cognitiva del soggetto; corrisponde all'apprendimento comunemente inteso; l'*apprendimento 2* (o deuteroapprendimento) è, invece, rappresentato da un cambiamento dell'apprendimento 1 che ne modifica il successivo decorso: rendendolo più rapido, per esempio; fanno parte di questa tipologia di acquisizioni: l'imparare ad apprendere, il transfer dell'apprendimento, e l'acquisizione di abiti mentali (*formae mentis*, stili cognitivi, competenze, ecc.). Questa struttura può essere proiettata sul curricolo, determinandone un'articolazione a due livelli: il *curricolo 1* corrisponde al protoapprendimento e consiste nell'assimilazione di conoscenze e abilità legate ai vari saperi curricolari; il *curricolo 2* corrisponde, invece, al deuteroapprendimento e riguarda la formazione di abiti mentali astratti (*formae mentis*, stili cognitivi, competenze ecc.).

Per comprendere le implicazioni di questa articolazione del curricolo, occorre qualche nota di approfondimento sulle caratteristiche dei tipi d'apprendimento. In primo luogo, occorre tenere conto del fatto che l'apprendimento 1 è diretto e manifesto, mentre l'apprendimento 2 ha carattere

collaterale (si struttura parallelamente all'apprendimento 1 e solo in connessione con esso) e risulta, perciò, poco evidente. Inoltre, si deve considerare che l'apprendimento 1 produce risultati a breve-medio termine, mentre l'apprendimento 2 dà i suoi frutti solo a medio-lungo termine.
Queste caratteristiche determinano a loro volta la differente natura dei due livelli del curricolo. Il curricolo 1 è relativo ai risultati diretti e immediati delle singole discipline; si tratta, cioè, del curricolo nel senso ordinario del termine: come corso di studio delle diverse materie scolastiche. Il curricolo 2 concerne invece gli effetti formativi collaterali e di lungo termine della scuola, nei termini di mentalità, stili di pensiero, competenze ecc. Inoltre, il primo livello corrisponde a quella che solitamente chiamiamo "istruzione", mentre il secondo è inerente alla cosiddetta "educazione intellettuale"; al tempo stesso, il carattere collaterale dell'apprendimento 2 chiarisce che non si dà educazione intellettuale al di fuori dei processi d'istruzione; essa è annidata in tali processi. Infine, se il curricolo 1 è senz'altro l'oggetto della *didattica curricolare*, il secondo livello tende ad essere proprio della *pedagogia del curricolo*.[1]
L'idea che avanziamo, e che deriva da quanto appena detto, è che lo "specifico" di una pedagogia del curricolo sia legata ad una prospettiva che porta l'attenzione sugli *esiti di lungo termine del curricolo*, piuttosto che sui *risultati immediati* delle *singole discipline*. Precisiamo meglio.
In altre parole, la pedagogia è caratterizzata dal fatto di non limitare il proprio sguardo ai risultati immediati o di breve termine dell'attività educativa (il progresso o meno in un argomento particolare, per esempio), ma al contrario dal pensare le scelte educative nei loro effetti a lungo termine[2] (un intero ciclo scolastico, o almeno una sua annualità); la pedagogia, insomma, tende a guardare lontano. Il compito di una pedagogia del curricolo, in altre parole, è quello di cogliere il *principio educativo* che deve caratterizzare l'orientamento d'insieme della formazione scolastica, l'ideale punto di convergenza verso cui essa deve tendere nel lungo periodo.
Per chiarire meglio questa posizione, e trarne le implicazioni relative alla matematica, è opportuno tracciare un abbozzo dell'organizzazione di un sapere scolastico. Ci limiteremo ad un quadro a *"grana grossa"*, definito attraverso un approccio meramente *"empirico"*, che tiene conto di alcune dimensioni dei saperi rilevanti nella pratica scolastica, senza voler attribuire a tale quadro alcun significato normativo o teorico in senso proprio. Non intendiamo, cioè, descrivere come dovrebbero essere organizzati i saperi, ma come all'incirca viene concepita la loro organizzazione nel senso comune scolastico, cercando però di ridescriverla nei termini di costrutti formali.

[1] Per più estese considerazioni si veda Baldacci (2006).
[2] Questo per Dewey era il principio cardinale della teoria della formazione scolastica; si veda, per esempio, Dewey (1996, p. 45).

In modo grossolano, si può dire che una disciplina scolastica viene vista *almeno* nei termini dei suoi *contenuti* e del suo *linguaggio*, nel senso che solitamente l'insegnamento si preoccupa – *come minimo* – di curare l'apprendimento di queste componenti.
Questo riferimento, per quanto limitato, è sufficiente per i nostri scopi; si deve solo precisare che i contenuti e il linguaggio sono aspetti cruciali ma non esaustivi di una disciplina, la quale presenta almeno un ulteriore livello d'organizzazione epistemica, che include il metodo di ricerca, le strategie euristiche ecc. Ri-descriveremo queste due componenti con i costrutti del "canone" e della "notazione": il *canone* concerne i contenuti culturali della disciplina, mentre la *notazione* riguarda il suo linguaggio; vista alla loro luce, una disciplina appare come uno specifico *dominio simbolico-culturale*, riconducile al sistema simbolico adoperato e alle opere culturali storicamente prodotte attraverso il suo uso.
Analizziamo alla luce di questi concetti la questione degli effetti formativi complessivi di lungo termine di cui si occupa una pedagogia del curricolo. Iniziamo dal canone.
In ambito formativo, in concetto di *canone* indica i contenuti scelti dall'istituzione scolastica per il loro riconosciuto valore culturale. Per l'ambito umanistico può trattarsi di un elenco di autori ed opere letterarie; per quello scientifico di una lista di teorie e di problemi. Relativamente all'ambito letterario, Bloom (1996) ha osservato che il *canone* è reso indispensabile dalla scarsa disponibilità di tempo che abbiamo per leggere (e dalla brevità della formazione scolastica, si può aggiungere); di fronte alla massa di autori e di opere compiere scelte è indispensabile.
Veniamo adesso alla seconda componente: la notazione. In senso stretto, una *notazione* è un sistema di simboli di secondo ordine, che si riferisce cioè non direttamente ad oggetti, ma a simboli di primo ordine. Una notazione adotta un sistema di scrittura: la scrittura linguistica, quella matematica, ecc. (le parole scritte stanno per quelle orali, e così via). Un aspetto importante dell'istruzione è costituito dal conseguimento della padronanza dei sistemi notazionali della cultura. Nel breve termine, tale padronanza è un requisito cruciale per l'accesso al canone di un dato campo culturale, dato che le opere che fanno parte di esso sono codificate entro una data notazione.
Ci si deve adesso chiedere qual è l'effetto di lungo termine della pratica entro i vari sistemi di notazioni. La risposta è che a lungo andare tale pratica, attraverso processi di deuteroapprendimento, porta alla strutturazione di abiti mentali specifici per dominio simbolico. Si tratta, approssimativamente, delle *formae mentis* descritte da Gardner (1987): dell'acquisizione di forme d'intelligenza legate ai vari campi del sapere (l'intelligenza matematica, per esempio). Una forma d'intelligenza specifica per dominio si può descrivere come abilità entro uno specifico *medium* o sistema simbolico (Olson, 1979), e consiste sia nella capacità di trascrivere l'esperienza secondo tale sistema

simbolico, sia nella sicura padronanza delle manipolazioni della sua notazione. Questi abiti mentali possono essere il prodotto più duraturo della formazione scolastica, la componente meno soggetta a decadimento, e possono condizionare in maniera rilevante il futuro dell'individuo. Basta pensare alle diverse conseguenze di una *forma mentis* fortemente polarizzata su un certo sistema simbolico, o al contrario sviluppata in senso maggiormente versatile. Queste poche e rapide osservazioni sono sufficienti per mostrare la pertinenza e la rilevanza di un punto di vista pedagogico sui saperi scolastici. Inoltre, permettono di comprendere la specificità di un punto di vista pedagogico sulla matematica come sapere scolastico. Mettendosi in tale angolazione si mira a cogliere il portato formativo della matematica nei termini degli *abiti mentali* permanenti che la coltivazione del suo dominio disciplinare, nei termini della sua notazione e del suo canone, permette di sviluppare. In altre parole, il valore formativo della matematica è quello di strutturare gli *abiti da matematico*, che nel loro insieme costituiscono quella che può essere definita la *forma mentis* matematica o l'intelligenza matematica. Una forma d'intelligenza che rappresenta una delle conquiste più avanzate del genere umano.

Bibliografia

Baldacci, M. (2006). *Ripensare il curricolo*. Roma: Carocci.

Bateson, G. (1997). *Verso un'ecologia della mente*. Milano: Adelphi.

Bloom, H. (1996). *Il canone occidentale*. Milano: Bompiani.

Dewey, J. (1996). *Le fonti di una scienza dell'educazione*. Firenze: La Nuova Italia. (Lavoro originale pubblicato nel 1929).

Gardner, H. (1987). *Formae mentis. Saggio sulla pluralità dell'intelligenza*. Milano: Feltrinelli.

Olson, D. R. (1979). *Linguaggi, media e processi educativi*. Torino: Loescher.

Algunas investigaciones en desarrollo en el doctorado interínstitucional en educación – DIE Bogotá – dirigidas por Bruno D’Amore

Héctor Mauricio Becerra Galindo, Deissy Milena Narváez Ortíz, Henry Alexander Ramírez Bernal
Estudiantes del Doctorado Interinstitucional en Educación DIE
Énfasis en Educación Matemática
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotá, Colombia

Resumen. *Los autores presentan una breve descripción de los proyectos de investigación que están desarrollando con la dirección del profesor Bruno D'Amore. Estos estudios se realizan en el marco del Doctorado Interínstitucional en Educación (DIE-Bogotá).*

Abstract. *The authors present a brief description of their research projects, which are being developed under the direction of Professor Bruno D'Amore. These studies are developed in the framework of the "Doctorado Interínstitucional en Educación" (DIE-Bogotá).*

1. La problemática semiótica en la representación de los conjuntos infinitos

Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos presentadas en la práctica docente, es un trabajo de investigación que surge de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, ya que se evidencian dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva, estas dificultades están asociadas a la concepción errada de algunos profesores de matemáticas con respecto al infinito y/o la falta de conciencia semiótica en las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos. Para abordar estas dificultades, es necesario que el profesor reflexione sobre la importancia que tienen las representaciones de los conjuntos infinitos en su enseñanza, generando así un cambio de convicción del profesor sobre éstas, que le permita comprender y entender que la comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento […] están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica (Duval, 1999, p. 18).
Las referencias se centran sobre los registros de representación semiótica que aparecen en la definición de los conjuntos infinitos en su desarrollo histórico, las prácticas docentes y los libros de texto; además de las convicciones de los profesores sobre el infinito y los conjuntos infinitos. Esta investigación se

enmarcada en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo-comparativo. Como opción metodológica se hará una observación no participante en el aula de los procesos de enseñanza de los conjuntos infinitos y se realizarán entrevistas a los estudiantes sobre su aprendizaje de los conjuntos infinitos a partir de las representaciones y a los profesores sobre su enseñanza, para describir el cambio de convicción de los profesores sobre la enseñanza de los conjuntos infinitos a partir de las representaciones. Los resultados que se esperan de esta investigación son: la caracterización de los diferentes registros semióticos de los conjuntos infinitos a partir de la historia, de los libros de texto y de las prácticas educativas, justificar los cambios en la forma de actuar de los profesores de matemáticas de la media vocacional (grado 110), en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos a partir de los diferentes registros semióticos y evidenciar la necesidad de formación de los profesores respecto a la didáctica del infinito y de los conjuntos infinitos.

2. El contrato didáctico: efectos y cláusulas

La idea de Contrato Didáctico fue introducida por Brousseau en el campo de la investigación en Didáctica de las matemáticas desde el año 1978 como un recurso para estudiar el fracaso electivo en matemáticas. Esta idea no sólo fue recibida por la comunidad de investigadores con gran aceptación, sino que fue rápidamente convalidada mediante tres estudios publicados en 1980 y 1981, y fue tal su éxito; que transcurridos apenas 10 años ya se había logrado su teorización plena a través de trabajos como los del mismo Brousseau (1984, 1986) y Chevallard (1988). Una vez teorizado, el trabajo posterior alrededor de este concepto permitió comprender muchos fenómenos no sólo en el campo de la enseñanza de las matemáticas, sino también en otras disciplinas, donde se introdujo con éxito. D’Amore, Fandiño, Marazzani y Sarrazy (2010) afirman que éste es probablemente uno de los conceptos más populares en la disciplina de la enseñanza, pero, advierten que “*la celebridad, sin embargo, tiene un precio: la mala interpretación*” (p. 84). Las múltiples interpretaciones de esta idea y la escasa producción de datos empíricos sobre su poder explicativo en situaciones de aula ha debilitado su uso en el campo de la didáctica.

Para abordar esta problemática propongo una investigación que se desarrolla en dos momentos: 1) Un estudio histórico-crítico-analítico de la idea original de contrato didáctico y de los estudios reportados alrededor de este concepto. Los hallazgos en esta fase conducen a la caracterización de dos herramientas: Los efectos y las cláusulas del contrato didáctico. Tales caracterizaciones aportan al estudio de las manifestaciones del contrato didáctico en situaciones auténticas de aula y permiten comprender el poder heurístico y explicativo de este concepto clave de la didáctica fundamental. 2) Un estudio de tipo cualitativo con enfoque etnográfico basado en la búsqueda de datos empíricos en aulas colombianas de distintos niveles escolares. En estas aulas rastreo ejemplos de la ocurrencia de los efectos del contrato didáctico mediante observación no-participante. Los hallazgos permitirán evidenciar el poder explicativo de la noción del contrato sobre la sociología del aula de matemáticas.

3. Cambio de concepciones de profesores sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática

Investigadores como Ball, Thames y Phelps (2008) han señalado que la enseñanza experta (en Matemática) requiere de la capacidad de juzgar el origen de los errores matemáticos; para estos Autores el profesor debe estar en capacidad de analizar los errores matemáticos de sus estudiantes de forma eficiente y fluida. Por otra parte las creencias y concepciones de los profesores sobre la Matemática y su aprendizaje están fuertemente ligadas con su enseñanza: para Vacc y Bright (1999, como se cita en Gagatsis & Kyriakides, 2000) el profesor no solamente sabe y cree ciertas cosas, sino que aplica tal conocimiento y creencias en su trabajo. En particular, las creencias y concepciones de los profesores inciden en la forma como ellos analizan y abordan los errores (y las posibles causas) en Matemática de sus estudiantes. Estudios de Charnay (1989), Economou (1995) y Milhaud (1980) citados por Gagatsis y Kyriakides (2000) revelaron que los profesores atribuyen los errores (en Matemática) principalmente a la falta de interés de los estudiantes o a su falta de preparación. Por otra parte, un estudio realizado por Ramírez (2012) evidenció que los profesores culpan de los errores en Matemática de sus estudiantes a la falta de comprensión de los conceptos matemáticos; esta falta de comprensión es atribuida a factores como: actitudes del estudiante frente a las matemáticas y su proceso de aprendizaje, fallas en los procesos de formación anteriores a la universidad (primaria y bachillerato), una enseñanza tradicional de las matemáticas y la no construcción de los conceptos matemáticos. Investigaciones (como las mencionadas) sugieren que los profesores atribuyen las causas de los errores en Matemática de sus estudiantes a hechos que se distancian de los referentes teóricos y de investigación (por ejemplo desde la Didáctica de la Matemática) que intentan explicar estos errores.

Las anteriores observaciones junto con: la importancia de profundizar sobre la forma en que los profesores aprenden a comprender los errores de los estudiantes (Brodie, 2014), el hecho que docentes de matemáticas en muchos casos aun presentan una preparación deficiente para abordar adecuadamente las dificultades de aprendizaje de sus estudiantes en el aula (D'Amore, 2007) y la necesidad de una toma de consciencia del profesor o estudiante para profesor de sus acciones y de su reflexión sobre ellas pues como lo indica Pehkonen (2006, como se cita en Bohórquez, 2013, p. 5) cuando el individuo reflexiona sobre sus acciones se produce aprendizaje, configuran la problemática que sustenta los propósitos de este trabajo de investigación doctoral. En este estudio se busca profundizar en la comprensión de los posibles cambios que ocurren en las concepciones de un grupo de profesores de Matemática de primer semestre de Universidad sobre las causas de los errores de sus estudiantes durante su proceso de formación matemática. Mediante ejercicios de discusión y reflexión crítica en torno a las causas de estos errores, desarrollados en dos escenarios (entrevistas personales con el investigador y discusiones con pares orientadas en focus group) se busca obtener información que permita determinar y caracterizar mediante un análisis de corte cualitativo: ¿Qué cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas de los errores en el aprendizaje de la Matemática se producen a partir de la reflexión crítica sobre el análisis de los errores de sus estudiantes?¿qué factores inciden en esos cambios? ¿si no hay cambios, a que se debe? ¿cómo incide la discusión entre pares en los cambios de concepción de los profesores?

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special?. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389–407.

Bohórquez, L. A. (2013). Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas. *I CEMACYC, República Dominicana, 2013.* Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/126-506-3-DR-C.pdf

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies In Mathematics*, *85*(2), 221–239.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. *Theory of Mathematics Education*, *54*, 110–119.

Chevallard, Y. (1988). Sur l'analyse didactique: deux études sur les notions de contrat et de situation. *Publications de l'IREM d'Aix-Marseille*, *14*.

D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática en la escuela secundaria. En F. Jurado (Coord.). *Colección Cuadernos del Seminario en Educación, 8,* 5–31. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto". Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Segunda edición. Trad. Myriam Vega Restrepo). Cali, Colombia: Peter Lang/Universidad del Valle. [Original: *Sémiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang, 1995. Primera edición en español: Universidad del Valle, 1999].

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24–58.

Ramírez Bernal, H. A. (2012). *Tipología de errores presentados por estudiantes de primer curso de matemáticas universitarias (análisis epistemoógico, didáctico y semiótico)*. Bogotá: Uniandes.

Sobre el conocimiento del profesor y el estudiante para profesor de matemáticas

Luis Ángel Bohórquez Arenas
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotá, Colombia

Resumen. *En este artículo se presentan documentos teóricos, artículos e informes de investigación en los cuales se evidencian diferentes sobre la caracterización del conocimiento del profesor y del estudiante para profesor. En particular, se presentan la influencia del trabajo desarrollado por el Doctor Bruno D'Amore en estas caracterizaciones. Finalmente se da una caracterización que se considera más completa al tener en cuenta muchas de las caracterizaciones presentadas en el documento.*

1. Introducción

Desde hace algunos años se han presentado una diversidad de respuestas a la pregunta: ¿cuál debe ser el conocimiento y las destrezas de los profesores de matemáticas?. Una de las primeras respuestas es la propuesta por Shulman (1986), quien considera que las categorías para hablar del saber de un profesor como mínimo deberían incluir: el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico general, el conocimiento del currículo, el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento de los contextos educativos y el conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

2. Conocimiento del profesor de matemáticas

Shulman (1986) consideró que el conocimiento didáctico del contenido adquiere particular interés porque identifica los cuerpos de conocimiento distintivos para la enseñanza. Según este autor, este conocimiento representa la mezcla entre materia y didáctica por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos y se exponen para su enseñanza.

Bromme (1998), siguiendo en parte lo propuesto por Shulman (1986) sobre los conocimientos profesionales del profesor de matemáticas, consideró conveniente diferenciar entre: 1) conocimientos de matemáticas, los cuales abarcan entre otras cosas principios matemáticos, reglas y modos de pensar y técnicas matemáticas; 2) conocimientos curriculares, los cuales están descritos en los planes de estudios, codificados en libros de texto y otras herramientas didácticas; 3) conocimientos sobre la clase, los cuales aparecen mediante el establecimiento de relaciones y un especial equilibrio a la medida de las especificas circunstancias de la clase; 4) conocimientos sobre lo que los alumnos aprenden, esto es el profesor debe tener conocimiento sobre la comprensión de sus alumnos de las matemáticas.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, Bromme (1988) se interroga sobre qué permite que tan diferentes tipos de conocimientos como los mencionados se mantengan con coherencia en los maestros. Es decir, se pregunta sobre el conocimiento, sobre la naturaleza de los conocimientos con relación a la escuela y la asignatura, todo esto acorde con los fines y objetivos que han de conseguirse. Al respecto, este autor respondió que son precisamente los metaconocimientos los que permiten establecer cierta coherencia entre los diferentes conocimientos, pues definen el marco de orientación en el que se valoran los conocimientos y su relación con la propia profesión. Bromme (1988) definió el metaconocimiento como la filosofía del profesor en cuanto a las matemáticas y la enseñanza, pero que a pesar de su carácter filosófico tiene muy concretos efectos sobre la práctica didáctica.

Sobre la práctica didáctica del profesor de matemáticas, Bromme (1988) consideró otros conocimientos que el profesor de matemáticas debe tener, a saber: 1) los conocimientos sobre la didáctica de la asignatura, los cuales tienen un carácter especial en cuanto informaciones psicológico-pedagógicas y experiencias del propio profesor se aúnan con los conocimientos matemáticos; 2) conocimientos pedagógicos, los cuales hacen referencia a los conocimientos que son válidos con relativa independencia de la asignatura. Comprenderían determinados aspectos metodológicos de la clase, el proceso con niños de educación difícil y asimismo la organización del centro escolar.

Las clasificaciones de Bromme (1988) y Shulman (1986) sobre el conocimiento del profesor implican necesariamente una separación (al menos analítica) entre los diferentes conocimientos del profesor, lo cual según Gómez (2007) genera dificultades, pues por ejemplo resulta muy difícil imaginar cómo un profesor puede comprender como se organizan, representan y adaptan temas, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes sin tener en cuenta el conocimiento que él tiene de los aprendices. En otras palabras, el conocimientos sobre los aprendices debería incluirse dentro del conocimiento pedagógico de contenido, aunque Shulman (1986) los presenta como independientes. Para Gómez (2007), Simon (1997) resuelve parcialmente estas dificultades al identificar los conocimientos que se ponen en juego cuando, basado en la evaluación del conocimientos de los estudiantes, el profesor formula la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Simon (1997) menciona los siguientes conocimientos del profesor de matemáticas: 1) conocimiento de las matemáticas; 2) conocimiento de las actividades matemáticas y las representaciones de los diversos conceptos; 3) hipótesis sobre el conocimiento de los estudiantes, es decir consideraciones acerca de los conocimientos o preconceptos que tienen los estudiantes; 4) concepciones de los profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje; 5) conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes un tema específico. Según Gómez (2007), aunque Simon (1997) pretende definir una estructura de la relación entre estos conocimientos y los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje, ésta no se logra puesto que sugiere que todo los tipos de conocimiento, excepto el de las actividades matemáticas y sus representaciones, afectan todos los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

A pesar de que Simon (1997) no logra establecer la relación entre los conocimientos y los componentes de la trayectoria de aprendizaje, Gómez (2007) considera que la taxonomía del conocimiento del profesor expuesta por este autor a diferencia de las taxonomías de Shulman (1986) y Bromme (1988) es funcional, pues se asume una posición con respecto al aprendizaje de los escolares, se propone un esquema de enseñanza compatible con esa postura y se identifican los conocimientos que se consideran necesarios para realizar esa enseñanza.

Gómez (2007) encuentra que en la mayoría de taxonomías del conocimiento del profesor estudiadas por él, incluyendo aquellas asociadas en la enseñanza de las ciencias, se aprecia un núcleo común: conocimiento de la disciplina, de cómo "representarla en el aula" (hace referencia a cómo presentar estos conocimientos en el aula), de los estudiantes y de estrategias de instrucción (enseñanza). Según este autor, estas explicaciones buscan caracterizar en cierta forma la integración entre los conocimientos de contenido y de pedagogía. En otras palabras, se trata de esfuerzos por caracterizar la noción de conocimiento pedagógico del contenido.

Como se puede observar en los párrafos anteriores, las caracterizaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas no hablan explícitamente de la didáctica de la matemática como parte fundamental de este conocimiento. Esto puede deberse, entre otras cosas, porque por ese entonces la didáctica de la matemática era poco conocida y se confundía con la pedagogía, la educación general, con las ciencias de la educación, entre otras (D'Amore, 1999). D'Amore (1999) definió la didáctica de la matemática como la disciplina científica y el campo de investigación que tiene por objetivo identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Desde esta perspectiva, para este autor el profesor de matemática debe tener un conocimiento en didáctica de la matemática, pues desde esta disciplina se estudia las condiciones de aprendizaje en situaciones reales del aula, a cualquier nivel, cuando los conceptos a desarrollar son específicos de la matemática (D'Amore, 2002).

Para D'Amore (1999) la didáctica de la matemática proporciona claves para la comprender e interpretar lo que ocurre en el aula. Esto se debe en esencia porque el conocimiento en didáctica de la matemática va más allá de una competencia puramente matemática (o puramente pedagógica), por no hablar de la experiencia y el sentido común (D'Amore, 1999). Según este autor, estas comprensiones e interpretaciones se pueden dar porque hay diferentes perspectivas dentro de la didáctica de la matemática que permiten mirar las situaciones desde los enfoques que en cada una de ellas se prioriza. Algunas de estas perspectivas son: 1) contrato didáctico; 2) teoría de situaciones; 3) las barreras para el aprendizaje; 4) las imágenes y patrones; 5) conceptos figúrales; 6) ingeniería didáctica; 7) transposición didáctica, entre otras (D'Amore, 1999).

Posterior a los trabajos de Shulman (1986), Bromme (1988), Simon (1997) y en paralelo con D'Amore (1999) Ball y Cohen (1999) hacen una caracterización más explícita del conocimiento de la disciplina del profesor de matemáticas y señalan que conocer las "matemáticas que se van a enseñar" supone mucho más que la idea de "conocer las matemáticas del currículo". Supone llegar a conocer el contenido matemático desde la perspectiva de que dicho contenido debe ser aprendido por alguien. Esta condición se apoya en el reconocimiento de que llegar a "conocer las matemáticas que deben ser enseñadas para que alguien aprenda" supone un conocimiento de las matemáticas específico y vinculado a la tarea profesional de enseñar matemáticas.

El equipo de Ball (Ball & Cohen, 1999; Adler, Ball, Krainer, Lin, & Novotna, 2005; Delaney, Ball, Hill, Schilling, & Zopf, 2008a; Heather C Hill, Ball, & Schilling, 2008) propone cuatro categorías para el conocimiento del profesor: 1. Conocimiento común del contenido, como el conocimiento y la habilidad matemática que se espera tenga cualquier adulto educado; 2. Conocimiento especializado del contenido, como el conocimiento que el profesor requiere en su trabajo y que va más allá de aquel que tiene un adulto educado; 3. Conocimiento del contenido y de los estudiantes; 4. Conocimiento del contenido y de la enseñanza (Ball, Hill, & Bass, 2005; Delaney, Ball, Hill, Schilling, & Zopf, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008). Estas cuatro categorías recogen y complementan las presentadas por Shulman (1986), Bromme (1988) y Simon (1997).

En este artículo se asume la postura que adopta Ball, Hill y Bass (2005) sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Sin embargo, cuando se hace referencia al conocimiento sobre el contenido y de los estudiantes y al conocimiento del contenido y de la enseñanza se asume que se está hablando de un conocimiento asociado a la didáctica de la matemática.

3. Conocimiento del estudiante para profesor

Tomando como base lo expuesto por Ball y Cohen (1999), Llinares (2000, 2004) considera que la manera como los estudiantes para profesores y los profesores de matemáticas necesitan conocer las matemáticas difiere de la manera en la que otros profesionales necesitan conocerlas. Como consecuencia de lo anterior, Llinares (2000, 2004) considera que en un programa de formación de profesores el contenido matemático debe ser "diferente" de las matemáticas en otros diferentes perfiles profesionales (arquitectos, matemáticos profesionales, ingenieros, economistas, etcétera). De igual manera, otro aspecto que profundiza esa diferencia entre el contenido matemático de un docente con los de otros perfiles es que establece una diferencia radical en la formación de profesores con relación a otros profesionales es que los futuros profesores de matemática deben prepararse en epistemología de la matemática y en didáctica de la matemática que es la disciplina fundante del profesor de matemáticas (D'Amore, 1999, 2002, 2007; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002, 2013).

Teniendo en cuenta las consideraciones sobre la formación de profesores, para Llinares, Valls y Roig (2008), se genera la necesidad de que los estudiantes para profesor y los profesores investiguen el potencial de las "situaciones matemáticas", viéndolas como instrumentos de aprendizaje matemático. Una tarea previa de los estudiantes para profesor para ver las situaciones matemáticas como instrumentos de aprendizaje es explorar las posibilidades matemáticas del problema, identificar posibles objetivos por conseguir con la resolución de esta tarea en un contexto de enseñanza e intentar prever posibles estrategias de los estudiantes (Llinares et al., 2008).

Según Llinares et al. (2008) para realizar un análisis de la situación de enseñanza, los estudiantes para profesor necesitan comprender la tarea y las matemáticas implicadas. Además estos autores consideran que estas situaciones no sólo implican resolver el problema diseñando estrategias, conjeturando relaciones que deben ser probadas o generalizando mediante la modificación de la presentación del problema, sino también pensar en el problema como un instrumento con el cual es posible generar aprendizaje matemático. De esta manera, según estos autores, la introducción de "lo didáctico" en el análisis de las tareas matemáticas, cuando se ven como instrumento de aprendizaje, se convierte en sí mismo en un objetivo didáctico para el formador de profesores.

De acuerdo con lo anterior, para estos autores el conocimiento profesional del profesor de matemáticas se considera integrado por diferentes dominios (conocimiento sobre la organización del currículo, los modos de representación y ejemplos más adecuados en cada momento, las destrezas de gestión y comunicación matemática en el aula, conocimiento en epistemología de la matemática, didáctica de la matemática, etc.) (D'Amore, 2004, 2007; Escudero & Sánchez, 2007; García, 1997; Gavilán, García, & Llinares, 2007a, 2007b; Llinares, 2000) Sin embargo, para Llinares (2008) el rasgo que caracteriza el conocimiento del profesor no está sólo en lo que conoce (dominios de conocimiento) sino en lo que hace con lo que conoce (uso del conocimiento) (Eraut, 1998).

Llinares (2008) subraya la importancia del uso del conocimiento en la resolución de las situaciones problemáticas generadas en su actividad profesional. Es decir la práctica de enseñar matemáticas entendida como: 1) realizar unas tareas (sistema de actividades) para lograr un fin, 2) hacer uso de unos instrumentos, y 3) justificar su uso (Llinares, 2008). Al considerar la enseñanza de las matemáticas como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida, Llinares (2004) identifica tres sistemas de actividades que la articulan y los componentes del conocimiento profesional que permiten realizarlas, a saber: 1) analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones matemáticas de sus alumnos y comparar estas producciones con lo que él pretendía (objetivos); 2) planificar y organizar el contenido matemático para enseñarlo (determinar planes de acción); 3) dotar de sentido y gestionar la comunicación matemática en el aula. Estos componentes están vinculados al conocimiento en didáctica de las matemáticas que debe tener el profesor.

Para desarrollar cada uno de estos "sistemas de actividad", el estudiante para profesor debe llegar a ser competente en los diferentes aspectos que los definen, y por tanto "conocer" lo que lo fundamenta generándose de esta manera la competencia docente respectiva (Llinares, 2004, 2008). Desde esta consideración aparece de manera natural un llamado a hablar de la competencia como parte fundamental del conocimiento del profesor de matemáticas y del estudiante para profesor de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 359–381.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En G. S. and L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3–32). San Francisco: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14–46.

Bromme, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación Y Experiencias Didácticas*, *6*(1), 19–29.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica* (1a ed.). Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2002). Il problema della formazione degli insegnanti. In G. Lucchini, F. Mercanti, & L. Tallini (Eds.), *Per una nuova scuola: programmi, formazione e tecnologie innovative per l'insegnamento della matematica.* Atti del Congresso nazionale della Mathesis (pp. 71–76), 23–25 novembre 2001, Mantova.

D'Amore, B. (2004). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*, *20*(3), 413–434.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá, DC: Cooperativa Editorial Magisterio.

D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación*, *8*, 36–58.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación matemática*, *14*(1), 48–61.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). La didattica della didattica della matematica: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36*(4), 325–353.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Marazzani, I. (2004). "Ejercicios anticipados" y "zona de desarrollo próximo": comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon*, *57*, 357–378.

Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H. C., Schilling, S. G., & Zopf, D. (2008a). "Mathematical knowledge for teaching": Adapting US measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(3), 171–197.

Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H. C., Schilling, S. G., & Zopf, D. (2008b). "Mathematical knowledge for teaching": adapting US measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(3), 171–197. http://doi.org/10.1007/s10857-008-9072-1

Eraut, M. (1998). Concepts of competence. *Journal of Interprofessional Care*, *12*(2), 127–139. http://doi.org/10.3109/13561829809014100

Escudero, I., & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 312–327. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.11.002

García, M. M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas el concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: GIEM, Universidad de Sevilla.

Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S. (2007a). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial. *Educación matemática*, *19*(2), 5–39.

Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S. (2007b). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemática. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157–170.

Gómez, P. (2007a). Caminos de aprendizaje y análisis de tareas. *Análisis didáctico de las matemáticas escolares para el diseño de tareas*. Bogotá.

Gómez, P. (2007b). Introducción al análisis didáctico. *Análisis didáctico de las matemáticas escolares para el diseño de tareas*. Bogotá.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal For Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430–511. http://doi.org/10.1080/07370000802177235

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional Knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, *6*(1), 41–62.

Llinares, S. (2004). Construir conocimiento necesario para enseñar matemáticas Prácticas sociales y tecnología. En *Seminario ticinese sulla didattica della matematica L'Alta Scuola Pedagógica (ASP)* (pp. 24–25). Lorcano: ASP.

Llinares, S. (2006). Aprendiendo a "ver" la enseñanza de las matemáticas. En S. Sbaragli & B. D'Amore (Eds.), *La matematica e la sua didattica, vent'anni d'impegno* (pp. 177–180). Roma: Carocci Faber.

Llinares, S. (2008a). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. En *III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas Universidad* (pp. 1–19). Bogotá, Colombia: UPN.

Llinares, S., Valls, J., & Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, *20*(3), 59–82.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Simon, M. A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. En E. Fennema & B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55–86). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

L’enseignement des mathématiques en Italie

Giorgio Bolondi
Alma Mater Studiorum, Università di Bologna

Abstract. *The history if the teaching of sciences in Italy has been marked by the footprint of the great Italian mathematicians of the beginning of the XX century: Vito Volterra, Federigo Enriques, Guido Castelnuovo. The state of deep break between the “two cultures” that yet today is present in the Italian school is the result of the defeat of the mathematicians in a hard “cultural fighting” of one century ago and which last twenty years. We examine this historical case, well known and emblematic, in order to understand how the daily job of the teachers is influenced, even after one century, by cultural and epistemological choices, and by the result of fights which may appear, at a first glance, purely academic.*

Sunto. *La storia dell’insegnamento delle scienze in Italia è segnato dall’opera dei grandi matematici dell’inizio del XX secolo: Vito Volterra, Federigo Enriques, Guido Castelnuovo. La situazione di frattura radicale tra le “due culture” che, ancora oggi, è vissuta dalla scuola italiana è il risultato della sconfitta dei matematici in una dura “battaglia culturale” che ha avuto luogo circa cent’anni fa e che è durata quasi vent’anni. Esaminiamo questo caso storico, noto ed emblematico, per comprendere come il lavoro quotidiano degli insegnanti è influenzato, anche dopo quasi un secolo, da scelte culturali e epistemologiche, e dal risultato di scontri che possono sembrare, a prima vista, puramente accademici.*

1. Le cas italien

Dans chaque époque et chaque pays l’enseignement se déroule à l’intérieur de structures, d’architectures scolaires qui en déterminent la forme et posent des contraintes à son évolution : soit à cause de menus détails (nombre d’heures d’enseignement, hiérarchie des filières, relation entre la formation des enseignants et les programmes …), mais surtout à cause de la philosophie qui est derrière la structure globale du système scolaire.
Le cas italien est particulièrement significatif, parce que dans l’école italienne il n’y à pas eu de révolutions à partir de la dernière grande réforme du système, datant de 1922. Les changements sont arrivés par évolution, une longue lissification progressive partant de l’intérieur du système, toujours en « rêvant » d’une modernisation qui n’était jamais achevée. Mais, comme le dit un intellectuel italien, l’Italie n’est pas un pays moderne – mais ceci n’est pas toujours une tragédie. Par exemple, on n’a accepté officiellement les « maths modernes » dans l’école italienne qu’en 1985, ce qui a permis d’éviter beaucoup d’excès et catastrophes.

Lorsqu'il n'y a pas de changement de système, il est d'autant plus important de comprendre comment ce système s'est établi : la genèse du système donne aussi l'imprinting pour les évolutions successives. Dans le cas italien, l'enseignement des sciences au XXe siècle (et même maintenant) est le résultat d'un affrontement à la fois culturel, académique et politique entre la communauté des hommes de science (c'est-à-dire, à ce temps-là, surtout les mathématiciens) et le groupe des philosophes qui sont connus sous le nom de « néo-idéalistes italiens », et dont les figures proéminentes étaient Benedetto Croce et Giovanni Gentile. Le noyau théorétique de cette divergence était, tout simplement, la valeur de la connaissance scientifique. Pour Volterra, Enriques et les autres mathématiciens la connaissance scientifique est intrinsèquement formative, en particulier pour les jeunes ; par contre, pour Croce et Gentile la connaissance scientifique n'est pas une véritable connaissance ; ainsi, elle ne joue qu'un rôle pratique dans la formation des jeunes, en vue de leurs futures professions.

On va donc esquisser l'histoire d'une véritable « guerre » idéologique, qui s'est achevée par la défaite des mathématiciens.

2. Le dessin des chapiteaux

On peut commencer par une affirmation, due à Lucio Lombardo Radice, qui nous permet d'introduire un nom et des mots clefs. Il disait que dans les Lycées Scientifiques italiens il faut faire le dessin des chapiteaux parce que Enriques avait perdu.

Qu'ont-ils à faire les chapiteaux avec un grand géomètre algébrique ? Il faut dessiner le cadre dans lequel s'inscrit la phrase de Lombardo Radice.

Dans l'école secondaire italienne on a les Lycées et les Instituts. Gentile, l'auteur de la réforme de 1922/23, avait voulu cette distinction (qui est maintenant moins marquée, bien sûr, qu'il y a 80 ans) pour séparer formellement les écoles (Lycées) où l'on donnait *la* formation basée sur le véritable savoir, des écoles (les Instituts) qui étaient censées de préparer au travail, et qui donnaient donc d'une façon prépondérante une formation technique. La différence était théorétique et idéologique, bien avant que pratique. Parmi les Lycées, le sommet est représenté par le Lycée classique (où l'on étudie le latin, l'histoire de l'art, le grec, la philosophie …), mais nous avons aussi le Lycée Scientifique et le Lycée Artistique.

Il faut souligner que le ministre auteur de la réforme n'était pas un homme politique (même si le premier ministre était, à l'époque, Benito Mussolini) : il s'agissait d'un « technicien », on dirait aujourd'hui. Comme on l'à déjà dit, Giovanni Gentile était l'un des deux plus éminents philosophes italiens, l'autre étant Benedetto Croce. Dans le noyau de la gnoséologie de sa doctrine, l'actualisme italien, il y avait une distinction explicite entre « savoir » d'un côté et connaissance scientifique de l'autre, la deuxième n'ayant qu'une valeur *fonctionnelle*, et n'étant pas une véritable connaissance en elle-même. Gentile

avait aussi une très cohérente doctrine pédagogique, et, en s'appuyant sur ses constructions théorétiques, il a dessiné une architecture scolaire où la « vraie » connaissance arrive dans les Lycées, les Instituts n'étant que des chemins vers les professions (au point que le Lycée classique seul donnait accès à *toutes* les facultés universitaires). Et la connaissance de la classicité grecque et latine est fondamentale pour la formation dans le véritable savoir en son devenir historique, au contraire de la science, qui n'est que du savoir technique adapté aux besoins du jour. Ainsi, dans les Lycées classiques on *étudie* les chapiteaux et dans certains Instituts on fait beaucoup de dessin technique, mais on ne dessine pas les chapiteaux ; mais dans le *Lycée* qui se veut *scientifique*, qu'est-ce qu'on peut faire, sinon essayer de comprendre la classicité (les chapiteaux) à travers la technique (le dessin) ? Le dessin des chapiteaux est le *quid* caractérisant la *scientificité* du Lycée Scientifique.
Bien sûr, j'ai donné une description simpliste, qui ne veut pas être un jugement sur la valeur globale de la structure due à Gentile, laquelle a néanmoins fonctionné fort bien pendant 50 ans au moins, grâce à sa forte cohérence. Mais la question pour le mathématicien est la suivante : au début du siècle il y avait de très forts mathématiciens en Italie, qui étaient aussi très influents sur le plan politique. Comment ont-ils pu accepter des programmes pour l'école d'élite (le lycée classique), où il n'y avait d'autres mathématiques que la géométrie d'Euclide et des brins de trigonométrie (pas de calcul différentiel !), des programmes des Instituts pour les maîtres d'école où il n'y avait pas de place pour les équations algébriques de deuxième degré … ? Où était-elle la communauté scientifique italienne ? En Italie beaucoup de savants (Guglielmo Marconi, Orso Maria Corbino, Camillo Golgi, par exemple) étaient très respectés, mais les leaders de la communauté étaient, indiscutablement, des mathématiciens : en première ligne, comme prestige, comme valeur mathématique et comme capacité d'organisation Vito Volterra et Federigo Enriques. Volterra et Enriques engagèrent une bataille serrée théorétique et très concrète à la fois : structure de l'université, problèmes de l'enseignement, formation des enseignants, programmes, réforme de l'école. Pendant les années 1900 à 1925 les mathématiciens furent protagonistes de la vie intellectuelle, culturelle et académique de la nation ; ils furent protagonistes par leur nombre, par leur vivacité d'engagement, par leur ampleur d'intérêts, par leur profondeur d'action.

3. Les mathématiciens dans la « nouvelle Italie » : l'âge de l'engagement civil

Pour comprendre comment ils étaient arrivés a cet engagement il faut partir de 1861, date de l'unification (pas encore complète) d'Italie. La date, symbolique bien sûr, fut déjà indiquée par Vito Volterra lors de son célèbre discours à l'occasion du quatrième congrès mondial des mathématiciens, à Rome en 1908. L'unité de la nation marque la renaissance des mathématiques en Italie, et les mathématiciens auteurs de cette renaissance sont Enrico Betti (1823–1892), Francesco Brioschi (1824–1897), Felice Casorati (1835–1890), Luigi Cremona (1830–1903) et Eugenio Beltrami (1836–1900). Les caractéristiques fondamentales de ces hommes (qui expliquent beaucoup de choses sur la genèse de la génération suivante, celle de l'*âge d'or* des mathématiques italiennes) sont :

1) ils sont des mathématiciens d'excellence ; leur noms demeurent célèbres dans les livres et les manuels ;

2) ils ont une grande capacité d'organisation : Betti (re)fonde la *Scuola Normale Superiore* de Pisa, aujourd'hui encore le centre mathématique d'excellence en Italie, Brioschi fonde le *Politecnico* de Milano, la première École Polytechnique en Italie, ils prennent la direction des anciens journaux mathématiques en les vitalisant, ils s'engagent pour la formation des jeunes mathématiciens, ils s'occupent des livres pour les écoles, ils étudient les problèmes de la formation des enseignants ;

3) ils établissent des contacts avec l'étranger : Betti, Brioschi et Casorati font un célèbre voyage à l'étranger pour connaître soit les structures soit les mathématiciens d'Europe, ils reçoivent en Italie leurs confrères européens, Riemann parmi d'autres ;

4) ils sont engagés politiquement soit avant soit après la proclamation du royaume d'Italie : Betti a combattu comme volontaire pendant les guerres pour l'indépendance, et il fut vice-ministre de l'Éducation nationale, Brioschi fut sénateur influent (responsable entre beaucoup d'autres choses de la restructuration des chemins de fer), Cremona organisa la défense de Venise pendant l'insurrection de 1848 et fut ministre de l' Éducation et véritable « patron » de l'université italienne pour une longue période.

En 1861, l'Italie se constitua comme nouvelle entité en unifiant huit états différents ayant de différents systèmes éducatifs, de différentes structures scolaires, de différents pourcentages d'analphabétisme. L'école, dans toutes ses articulations, est l'une des priorités de la nouvelle Italie, et c'est le groupe des mathématiciens qui s'en occupe en premier rang. Les problèmes sont très concrets : il faut homogénéiser l'ensemble des enseignants, qui proviennent d'une dizaine de systèmes formatifs différents, avec des chemins de recrutement incompatibles, il faut renouveler les programmes, écrire les manuels scolaires, fixer des standards communs pour les écoles … Les mathématiciens de la première génération post-unitaire y travaillent longtemps : par exemple, Betti, Cremona et Brioschi s'occupent de l'édition pour les écoles des Éléments d'Euclide et de leur adoption comme texte fondamental pour l'éducation mathématique ; ils travaillent au Parlement pour l'unification des systèmes scolaires, ils sont les réalisateurs d'une réforme de l'université. Donc, l'école qui est née avec l'unité d'Italie est conçue en grande partie par les mathématiciens de l'époque, et par conséquent elle porte

dans son patrimoine génétique, avec toutes les limitations de la culture de l'époque, néanmoins l'idée que la science doit faire partie du bagage formatif des jeunes. Dans les mathématiques, en particulier, il y a soit un côté instrumental soit un côté formatif.
Les mathématiciens parviennent à occuper une position dominante dans la politique scolaire et aussi une position dominante numériquement dans l'université (sur 152 professeurs de matières scientifiques, 69 sont des mathématiciens).

4. La deuxième génération : le souci de l'ouverture culturelle

Au tournant du siècle, il y a une nouvelle génération de mathématiciens, très forts eux-aussi, qui sortent de l'école des pères fondateurs : c'est l'âge d'or des mathématiques italiennes dont on a parlé. En 1909, en Italie sont actifs Dini, Volterra, Arzelà, Peano, Fubini, Pincherle, Vitali, Segre, Castelnuovo, Enriques, Veronese, Severi, Bianchi, Ricci Curbastro, Levi Civita, Bertini, Fano, Burali Forti … Mais il y a des changements importants pour les mathématiques : la crise des fondements a poussé, partout en Europe, les mathématiciens à prendre conscience des implications philosophiques de leur travail. Et parallèlement, on prendre conscience que l'enseignement des mathématiques est strictement lié à des problèmes d'ordre psychologique, philosophique, voire physiologique : il s'agit bien d'un problème *cognitif*. Le tournant peut bien être fixé au moment des congrès de Paris, en 1900. À l'occasion de l'exposition universelle trois congrès ont lieu à Paris : le Ier congrès mondial de philosophie, le IIe congrès international des mathématiciens et le congrès mondial de psychologie. Ici, surtout au congrès de philosophie, la scène est dominée par la *phalange italienne*, selon l'expression d'Hans Freudenthal. Peano et ses élèves (Vacca, Vailati, Pieri, Padoa, Burali Forti) sont au centre du débat avec leur travail sur les fondements de la géométrie et de l'arithmétique. Une anecdote : le jeune Bertrand Russell, qui avait avec lui son travail sur les fondements de la géométrie, après avoir reçu les articles de Peano s'en va sans attendre la fin des congrès, et se retire pour étudier les *reprints*. Giovanni Vailati, l'un des élèves de Peano, parla devant les *trois* congrès !
La deuxième génération des mathématiciens italiens, toujours excellente du point de vue mathématique, a ajouté à l'engagement politique et institutionnel un engagement plus strictement culturel, tout en conservant l'intérêt pour les problèmes de l'école. Bien avant la naissance de l'*Unione Matematica Italiana*, la société mathématique italienne, en Italie est fondée la *Mathesis,* association des enseignants des mathématiques. Ses présidents furent Veronese et Enriques, et ils s'occupèrent de programmes, manuels, recrutements, en organisant des consultations régulières entre les enseignants. Au même temps, les enseignants furent entraînés dans les débats de pointe de la science moderne (par exemple, en 1929 Enriques invita Fermi à débattre

avec les membres de la Mathesis les conséquences du principe de complémentarité de Bohr et Heisenberg, qui avait été publié dans *Nature* en 1928). Tout ceci est parfaitement cohérent avec la pensée de Federigo Enriques : d'après lui les maîtres, les professeurs et les chercheurs doivent toujours fondre les deux aspects, de celui qui cultive une discipline et de celui qui la transmet. Une expression typique de sa pensée était « enseignement dynamique », parce que, il disait, *la connaissance n'est pas un cadeau que l'un fait et l'autre reçoit passivement, mais une conquête que chacun doit faire ou refaire par lui-même ; tout au plus, on peut induire l'autre à la refaire avec nous.* Enriques écrivait que *l'œuvre didactique implique la nécessité d'aller en profondeur (car l'enseignant n'apprend pas une fois pour toutes ce qu'il doit enseigner) ... de chaque doctrine il faut étudier les origines, les connexions, le devenir, pas les aspects statiques.* Il soulignait souvent l'importance didactique de l'erreur : *chaque erreur est une occasion pour apprendre*. Dans le travail de l'élève comme du chercheur il y a toujours une liaison (non nécessairement un parallèle) entre le développement de la discipline dans son devenir historique (la phylogenèse) et dans la connaissance du sujet (l'ontogenèse). La science joue un rôle central dans cette conception dynamique de la connaissance.

Aujourd'hui, ces idées sont patrimoine commun, copartagé par tous les savants, mais ce n'était pas la même chose au début du siècle, surtout en ce qui concerne les mathématiques. Et il vaut la peine de lire ce que Gentile disait de la *vérité mathématique* : *elle est comme une chose qui ne bouge pas, et qui ne change pas : morte, inféconde, aride comme une pierre.*

Résumons donc les initiatives menées par les mathématiciens entre 1895 et 1905 :

- fondation de la *Mathesis*, société de liaison des enseignants entre eux et avec les chercheurs, corporative et culturelle ;
- fondation de *Scientia*, journal de divulgation scientifique, très ambitieux, avec une allure philosophique (parmi les collaborateurs, on comptait Ostwald, Mach, Bergson, Poincaré, Tannery, Pareto …) ;
- conquête de la leadership de la fédération nationale des enseignants ;
- mise en valeur de la SIPS, *Società Italiana per il Progresso delle Scienze,* qui devient une prestigieuse société savante, très influente au niveau politico-institutionnel ;
- conquête de la leadership de l'Accademia dei Lincei, l'académie nationale italienne ;
- contrôle du Conseil Supérieur de l' Éducation nationale ;
- collaboration étroite avec des philosophes (Prezzolini, Papini, Russell, Brentano …)
- et bien d'autres initiatives qu'on verra, plus « dangereuses » encore …

5. Les raisons de l'affrontement

Et nous voilà au point. Cette occupation d'espaces, institutionnels et culturels, cette action à 360°, cet effort culturel qui a une interface étroite avec la société civile et l'école, vient en route de collision avec un autre projet très vaste, fondé sur des bases théorétiques sûrement plus solides : le dessein du néo-idéalisme italien, qui avant la Grande Guerre voyait Croce et Gentile encore solidaires dans l'action. Sans entrer dans les détails techniques, il faut dire que dans le domaine de la philosophie le néo-idéalisme était « totalitaire », et il n'admettait pas d'invasion, surtout si les envahisseurs n'étaient pas des philosophes professionnels.

Il y avait beaucoup de points de friction entre les deux projets : d'abord, le journal *Scientia* était considéré un intenable (et dilettantesque) mélange de sciences naturelles et philosophie. En outre, Enriques avait proposé (et fait soutenir au Parlament) un projet de faculté de philosophie, où des étudiants en provenance de n'importe quelle faculté pouvaient obtenir le degré de docteur ; il avait étudié un système d'écoles supérieures pour la formation des enseignants ; et il devint président de la *Società Filosofica Italiana,* la Société Italienne de Philosophie. La philosophie comme sommet auquel on peut (et on doit) parvenir par plusieurs chemins, c'était la vision d'Enriques ; à l'opposé, pour le néoidéalisme, la philosophie (c'est-à-dire, la philosophie néo-idéaliste, les autres étant fausses) au sommet des activités humaines mais avec les philosophes professionnels comme grands prêtres.

En 1906 Enriques publia *Problemi della Scienza*, œuvre fondamentale, un livre peut-être un peu naïf du point de vue philosophique, mais palpitant, qui fut tout de suite traduit en anglais, français, allemand. Il cherche à construire une théorie générale de la connaissance : connaissance de la vérité, que l'on peut rejoindre en s'appuyant surtout sur le travail de recherche scientifique ; il s'agit là d'une *logique scientifique de la connaissance*. En même temps, Croce écrit sa *Logica*, œuvre très rigoureuse sur le plan théorétique : la connaissance est organisée et la *valeur de la science* pour la vérité est explicitement niée ; la science a une valeur purement instrumentale. Enriques et Severi écrivent des articles polémiques envers le livre de Croce, et ils furent punis par un sarcastique papier intitulé *Se parlassero di matematica …*

Encore une fois il faut le souligner : il n'était pas question que de querelles entre académiciens. Il s'agissait de projets culturels en opposition, impliquant des projets civils diamétralement opposés.

6. La déclaration de guerre

Le moment de la véritable opposition arriva quand Federigo Enriques fut chargé d'organiser et présider le IVe congrès international de philosophie (lui, un mathématicien !), à Bologne en 1911. Il invite (en luttant jour après jour contre Gentile) Poincaré, Paul Langevin, Ostwald, Peano, Boutroux, Bergson … Vito Volterra aussi bien que Benedetto Croce sont présidents de section ; Enriques est le président du congrès, et il prononce l'adresse inaugurale. Après le congrès, Croce ouvre les hostilités, en donnant une interview qui est publiée avec un grand relief dans un journal national, où il qualifie Enriques, en employant des expressions d'impitoyable ironie, de dilettante et incompétent en philosophie. De ce moment-là, jusqu'à 1925, l'opposition est totale.

Après la Grande Guerre, la nécessité de la réforme de l'école était devenue plus pressante ; l'argument est à nouveau à l'ordre du jour. Benedetto Croce devient ministre de l'Éducation nationale ; il présente un projet de réforme où l'enseignement des sciences et des mathématiques en particulier est drastiquement réduit, dans toutes les écoles. Volterra et Enriques mobilisent toutes les armes à leur disposition (*SIPS*, *Mathesis*, l'*Accademia dei Lincei*, les confrères qui sont sénateurs – Volterra l'était aussi …) ; le gouvernement chute et le projet n'est pas approuvé.

Le nouveau ministre est un professeur de Physique très influent, Orso Maria Corbino. Un projet du sénateur Pincherle (le mathématicien) pour la réorganisation des études universitaires en maths et physique est approuvé, une différente réforme de l'école est étudiée, et le gouvernement chute encore.

À partir du mois d'octobre 1922 en Italie il y a un gouvernement que l'on ne peut pas faire chuter, dont le chef est Benito Mussolini. Et le ministre de l' Éducation nationale est Giovanni Gentile, qui dans le délai de quelques mois obtient l'approbation pour sa réforme, qui n'est pas trop différente du projet Croce (bien qu'entre les deux philosophes se soit creusée une fracture radicale : Croce devient le leader des intellectuels antifascistes et Gentile le philosophe du régime). Enriques et Volterra se mobilisent encore une fois, et l'*Accademia dei Lincei*, la plus prestigieuse institution culturelle italienne, organise une commission (avec Guido Castelnuovo comme président) qui présente un projet alternatif, et essaie à plusieurs reprises d'obtenir des concessions de la part de Gentile. Mais le projet général reste intact : l'école italienne est organisée comme une pyramide autour du primat de l'instruction classique.

7. Conclusion

On peut comprendre donc comment on est arrivé à la phrase de Lombardo Radice. Bien sûr, parler de « victoires » ou de « défaites », au delà des résultats immédiats des combats, n'a jamais trop de sens Enriques fut l'un des protagonistes de la vie culturelle et intellectuelle italienne pendant 25 ans, mais à partir de 1925 il resta presque le seul mathématicien à sortir de la tour d'ivoire des mathématiques. Et *une immense zone de la culture moderne est gardée en dehors de la culture italienne : Peano est considéré un maître (en philosophie) dans le monde entier, sauf en Italie* [Lodovico Geymonat]. Jusqu'à 1970, il n'y avait pas de manuel de philosophie où les noms de Peano ou de Enriques fussent présents.

Pour résumer avec une image (elle aussi empruntée à Geymonat) le noyau de la dispute : le point de force de la reconstruction de la culture italienne faite par Croce fut la re-découverte de ses racines en Gianbattista Vico. Enriques affirma avec force qu'aux racines de la culture italienne il y a aussi Galileo Galilei.

Crittanalisi automatica del Vigenére
Il test del chi quadrato in crittografia

Paolo Bonavoglia
Liceo Classico Marco Foscarini, Venezia

Sunto. *La crittografia è a pieno titolo una branca della matematica applicata e può essere un fertile campo per applicazioni nella didattica della matematica, della statistica, dell'informatica; in questo articolo presento un esempio reale di software per il web per la decrittazione automatica del cifrario di Vigenére, software basato sul test del chi quadrato e di alcune funzioni specifiche. Un esempio che mostra bene la potenza degli strumenti matematici e informatici per risolvere problemi un tempo considerati intrattabili.*

Abstract. *Cryptology is a full-fledged branch of applied mathematics and can be a fertile field for applications in the teaching of mathematics, statistics, computer science; in this paper I present a real example of web software for automatic decryption of the Vigenère cipher, software based on the chi-squared test and some specific functions. An example that shows well the power of mathematical and computer tools for solving problems once considered intractable.*

1. Crittologia e matematica

La crittologia, scienza delle scritture segrete, può tranquillamente considerarsi parte della matematica applicata.
La sua prima branca è la crittografia, l'insieme dei metodi di cifratura da un testo chiaro a un testo cifrato che risulti inintelligibile agli estranei.
I metodi di cifratura sono di fatto operazioni matematiche, permutazioni, funzioni, addizioni modulari, trasformazioni lineari ecc. I cifrati moderni sfruttano funzioni aritmetiche che sono relativamente facili da calcolare, mentre le loro inverse sono di complessità proibitiva; i due esempi più noti sono: la moltiplicazione di due numeri primi nel cifrario RSA (operazione inversa: fattorizzazione di un numero molto grande), la potenza in un'aritmetica finita nel cifrario DH, Diffie-Hellman (operazione inversa: calcolo del logaritmo in un'aritmetica finita).
La seconda branca è la crittanalisi che è l'arte di recuperare il testo chiaro da un testo cifrato; anche qui gli strumenti principali del crittanalista sono di tipo matematico, statistico in particolare.
Prima di tutto è bene illustrare alcuni semplici cifrari, l'ABC della crittologia.

2. Il cifrario di Cesare e i cifrari monoalfabetici

Tra i più antichi cifrari conosciuti è quello che Svetonio attribuisce a Giulio Cesare;[1] per scrivere in modo riservato ai suoi familiari avrebbe usato il semplice espediente di sostituire ogni lettera del messaggio chiaro con quella che lo segue di tre posti nell'alfabeto. Le ultime tre lettere si sostituiscono ordinatamente con le prime tre.
Il messaggio "PREGOINVIARENUOVETRUPPE" si cifra allora:

PREGOINVIARENUOVETRUPPE

SUHJRLQYLDUHQXRYHWUXSSH

Matematicamente si tratta di un'addizione modulo 3.
In crittologia viene oggi chiamato cifrario di Cesare, un cifrario consistente di un'addizione modulo n. Usando il moderno alfabeto internazionale di 26 lettere, deve essere $0<n\leq 25$ (per $n = 26$ ovviamente …).

Appare evidente che la sicurezza di un tale cifrario è pressoché nulla; ci sono solo 26 cifrari di Cesare possibili; basta nel peggiore dei casi fare 25 tentativi per trovare il valore corretto.
Pur nella sua semplicità il cifrario di Cesare è un primo esempio di cifrario per *sostituzione*: ogni lettera chiara viene sostituita da un segno detto cifra (lettera o numero); è inoltre un esempio di cifrario *monoalfabetico*.
Un cifrario monoalfabetico consiste nel sostituire ogni lettera del testo chiaro con una differente lettera dello stesso alfabeto, secondo una corrispondenza biunivoca da concordarsi tra mittente e destinatario. Questa corrispondenza si può rappresentare facilmente come una *lista cifrante*. Per esempio consideriamo la seguente tabella di cifratura:[2]

chiaro	**A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z**
cifrato	M T S A O W X Y Z Q D B N E F G R K P I J U V L C H

Usando questo cifrario il messaggio "PREGOINVIARENUOVETRUPPE" si cifra in:

PREGOINVIARENUOVETRUPPE

GKOXFZEUZMKOEJFUOIKJGGO

Appare evidente che il cifrario monoalfabetico è molto più sicuro di quello di Cesare; qui le liste cifranti possibili sono *26!*= numero enorme, ben più di 25!
Ciononostante un testo cifrato monoalfabetico sufficientemente lungo può essere facilmente decrittato grazie alla crittanalisi statistica (vedi oltre).

---

[1] Vedi le pagine web http://www.crittologia.eu/critto/caes.htm e http://www.crittologia.eu/critto/caesar.htm

[2] Come vedremo meglio al prossimo paragrafo, nella crittografia classica si usano solo le lettere maiuscole e si ignorano spazi e segni di interpunzione.

3. Cifrari monoalfabetici e loro varianti come relazioni matematiche

Il cifrario monoalfabetico può essere visto come un esempio di corrispondenza biunivoca tra insiemi, l'insieme A dei caratteri chiari e quello B delle loro cifre che possono essere numeri come nell'esempio visto sopra, ma anche numeri di due cifre (*bicifre*).

Per aumentarne la sicurezza si sono date diverse varianti; possiamo classificarle matematicamente in quattro famiglie:

1. Relazioni *non ovunque definite*: alcuni caratteri non hanno una cifra corrispondente; a prima vista sembra un'idea insensata, ma è proprio quello che si fa di norma in crittografia classica dove vengono cifrate solo le lettere alfabetiche maiuscole; spazi e segni di interpunzione non hanno una cifra, di fatto sono rimossi dal testo; le lettere minuscole sono convertite in maiuscole, i numeri sono scritti per esteso, per esempio QUATTROUNO per 41. Nella crittografia contemporanea invece si cifra tutto, ogni simbolo e soprattutto si cifra a livello di bit non di lettera.
2. Relazioni *non univoche*; alcune lettere, di solito le più frequenti vengono cifrate con segni diversi da distribuire a caso; questo espediente se usato con accortezza complica molto la crittanalisi statistica; le cifre che stanno per uno stesso carattere si chiamano *omofoni*.
3. Relazioni *non suriettive*: alcuni segni cifrati non corrispondono ad alcun segno chiaro; per questo sono detti *nulle*. Anche questo serve a confondere la crittanalisi statistica; venivano usate spesso insieme agli omofoni.

Relazioni *non iniettive*: più lettere chiare vengono cifrate con uno stesso segno cifrato, detto *polifono*. Altro espediente con il solito scopo di confondere i crittanalisti, ma che ha il non piccolo difetto di rendere la vita difficile anche al legittimo destinatario, perché la decifratura non è più univoca; occorre calibrare i polifoni in modo da rendere inequivocabile la decifratura in base al contesto; cifre del genere sono state popolari a livello di crittografia dilettantesca, molto più rare a livello professionale.

4. Il cifrario di Vigenère

L'uso di omofoni e nulle può essere efficace per aumentare la sicurezza di un cifrario ma si tratta di strumenti piuttosto delicati da usare; basta un cifratore sprovveduto per rovinare tutto.

Una soluzione più efficiente fu trovata tra Quattrocento e Cinquecento da alcuni crittografi italiani come Leon Battista Alberti e Giambattista Bellaso con i cosiddetti cifrari polialfabetici; una lettera del chiaro non viene più cifrata sempre con la stessa cifra come nei monoalfabetici, ma con cifre diverse a seconda di una chiave che può essere una parola segreta, una tabella o una regola sempre segreta.

Il cifrario polialfabetico più semplice e comodo da usare fu quello che ottenne il maggiore successo anche se, come si intuisce facilmente, semplicità e comodità d'uso non vanno quasi mai d'accordo con la sicurezza.
Si tratta della celebre cifra (o tavola) di Blaise de Vigenère, pubblicata nel 1586 in un trattato di cifre nel quale per la verità c'erano anche cifrari più complessi. Considerata per secoli inattaccabile, ebbe grande fortuna, durata fino a molti decenni dopo che era stato pubblicato un primo metodo di decrittazione: quello del Kasiski nel 1863.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

©2016 Paolo Bonavoglia

Figura 1. La tavola di Vigenère.

Il metodo si può considerare una generalizzazione del cifrario di Cesare; invece di spostare sempre dello stesso numero di posti la lettera da cifrare, questa viene spostata di un numero di posti variabile, determinato in base ad una parola chiave, da concordarsi tra mittente e destinatario, e da scriversi sotto il messaggio, carattere per carattere; la parola chiave è detta *verme*, per il motivo che, essendo in genere molto più corta del messaggio, deve essere ripetuta molte volte sotto questo, come nel seguente esempio, nel quale sono riportati anche i valori numerici corrispondenti a ogni lettera:

Chiaro DEBELLOGALLICO 03 04 01 04 11 11 14 06 00 11 11 08 02 14 +

Chiave VENEZIAVENEZIA 21 04 13 04 25 08 00 21 04 13 04 25 08 00 =

Cifrato YIOIKTOBEYPHKO 24 08 14 08 10 19 14 01 04 24 15 07 10 14

Il testo cifrato si ottiene spostando la lettera chiara di un numero fisso di caratteri, pari al numero ordinale della lettera corrispondente del verme. Come

è evidente da questo esempio matematicamente il Vigenère si riduce a un'addizione modulo 26 tra gli ordinali della lettera del chiaro e di quella della chiave.
Per semplificare le cose il Vigenère propose l'uso della seguente tavola quadrata, composta da alfabeti ordinati spostati. Volendo ad esempio cifrare la prima R di ARRIVANO si individuerà la colonna della R, quindi si scenderà lungo la colonna fino alla riga corrispondente della corrispondente lettera del verme (qui E); la lettera trovata all'incrocio è la lettera cifrata (qui V); la seconda R invece sarà cifrata con la lettera trovata sulla riga della R di VERME, e cioè con la I.
Il vantaggio rispetto ai codici mono-alfabetici è evidente: la stessa lettera del testo chiaro non è sempre cifrata con la stessa lettera; e questo rende più difficile l'analisi statistica del testo cifrato e la decrittazione. Come vedremo più avanti la distribuzione delle frequenze di un polialfabetico è molto più uniforme di quella di un monoalfabetico e quindi fornisce minore informazione sul chiaro.
Chi riceve il messaggio per decifrarlo deve semplicemente usare il metodo inverso, in sostanza una sottrazione modulo 26 invece di un'addizione; riferendosi all'esempio di sopra si avrà:

Cifrato YIOIKTOBEYPHKO 24 08 14 08 10 19 14 01 04 24 15 07 10 14

Chiave VENEZIAVENEZIA 21 04 13 04 25 08 00 21 04 13 04 25 08 00

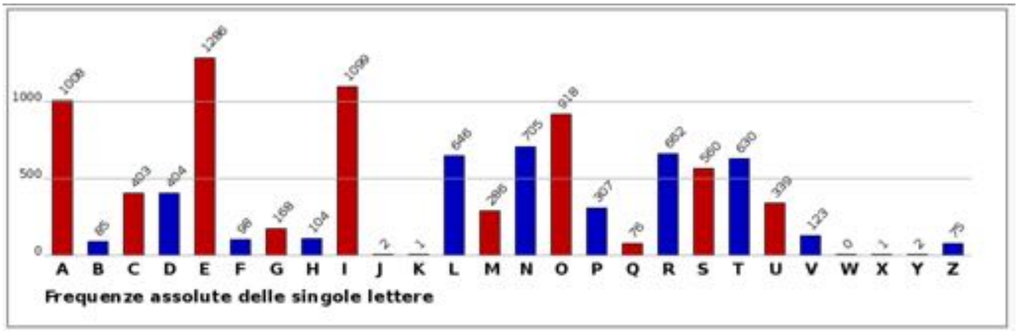
Chiaro DEBELLOGALLICO 03 04 01 04 11 11 14 06 00 11 11 08 02 14

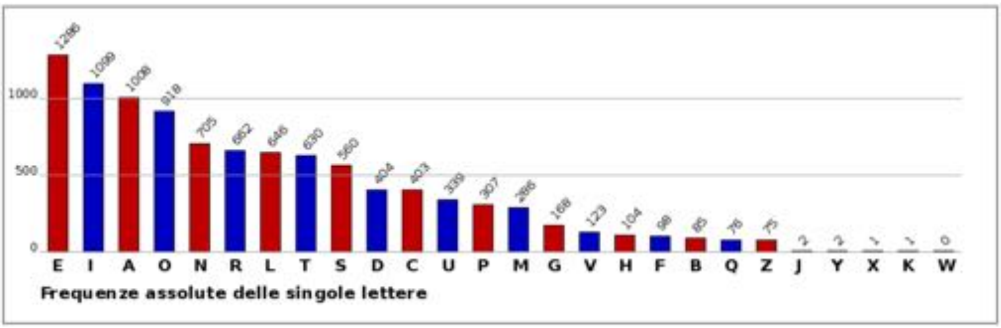
La sicurezza del Vigenére dipende principalmente dalla lunghezza della chiave; usando chiavi brevi e facili da ricordare la sicurezza è molto bassa, con chiavi molto lunghe è maggiore, al limite, come ha dimostrato Claude Shannon, con una chiave infinita e formata da lettere scelte a caso, il cifrario diventa inattaccabile; infatti in questo modo il cifrario non contiene più alcuna informazione sul chiaro.
Come ora vedremo oggi con l'aiuto di un normale computer è possibile forzare un cifrato di Vigenére a chiave breve in una frazione di secondo, usando test statistici come quello del chi quadrato; è questo l'esempio che illustrerò nei prossimi paragrafi.

5. La crittanalisi

La branca forse più affascinante della crittologia è la crittanalisi, l'arte di recuperare il testo chiaro da un testo cifrato del quale non si conosca la chiave; una branca la cui storia si intreccia strettamente con quella della crittografia: chi progetta cifrari deve tener conto dei metodi crittanalitici se vuole un cifrario sicuro; e il crittanalista deve conoscere bene i metodi crittografici.
Il compito del crittanalista può riassumersi in questi passi: 1) determinare la lingua in cui è scritto il chiaro; 2) determinare il metodo di cifratura usato; 3) determinare la chiave; 4) ricostruire il testo chiaro.

Sin dal medio evo lo strumento principale del crittanalista è stata la statistica. Ogni lingua ha infatti una distribuzione delle frequenze delle lettere, dei digrammi, dei trigrammi, delle parole che è caratteristica, quasi un'impronta digitale. Le seguenti tabelle mostrano la distribuzione delle frequenze delle singole lettere dell'alfabeto nella lingua italiana:





Queste tabelle costituiscono una vera e propria impronta digitale, caratteristica di ogni lingua. Ancor più caratteristiche sono poi le distribuzioni dei digrammi e dei trigrammi.

6. Crittanalisi di un cifrario monoalfabetico

Come esempio un breve cenno alla crittanalisi di un cifrario[3] monoalfabetico, definito nel paragrafo precedente come funzione cifrante biunivoca.

Supponiamo ora di essere venuti in possesso del seguente cifrato di 473 caratteri del quale non conosciamo la chiave:

PVKXG GMFCV EXERV VBBCE MLKME MPVAV NNAML MEBVW CXEML VAVCE BMAAX BBVYE VNACG VZXPB VLMEW VKRMC PLCNV ACXLV SSVLL CVPPX AKRMC PFCAM BBXAM KVNXK

[3] Nel gergo crittologico, si definisce *cifra* un particolare metodo di cifratura; la stessa parola si indica per indicare il segno segreto per una singola lettera chiara; per esempio nella tabella sopra la lettera M è la cifra di A. Si chiamano invece *decifre* le lettere chiare corrispondenti a una data cifra; nell'esempio precedente A è decifra di M. *Cifrario* è invece la particolare cifra usata, a volte lo si usa per indicare la tabella, foglio o libro che permette di cifrare in pratica. Per evitare confusioni si usa la parola numeri anche per indicare numeri come 1, 2, 3 …

XGCKX MCPKV NXFMC NMALX EVTTC LCACB CAMAV EEXNM AKXEK MABVA PXLKM EVACX MTPCV BBXAC LTXGS AMAVE EXCPN VPKXL KMECK XYEVL MKXEF VZXPB VVPPX AKRMN MACLS VTPCX CPGVK KRCEC LBVSY BBMAV TCYCP LCNVA CXBAX ZMAVE EXTPC LNMBB VBXAC MEBAV EFXEM PPVLV PVFMP BMVBA XVPWV BXCPL CNVAC XMCPN VPKXL KMECK XKXGM FCTCX AEXLM EWVUY CEBME MLKME VUYVL CVPSY CXMZY XBXNM AKRMV SSCVE XDCEF VNACE KCNCX PCGNA MLLCX EMFYE XLNMB BVKXP XEXEN AMNVA VBX

(Il testo cifrato, per consuetudine, viene trasmesso in gruppi di cinque caratteri).

La prima cosa da fare è una statistica delle frequenze:

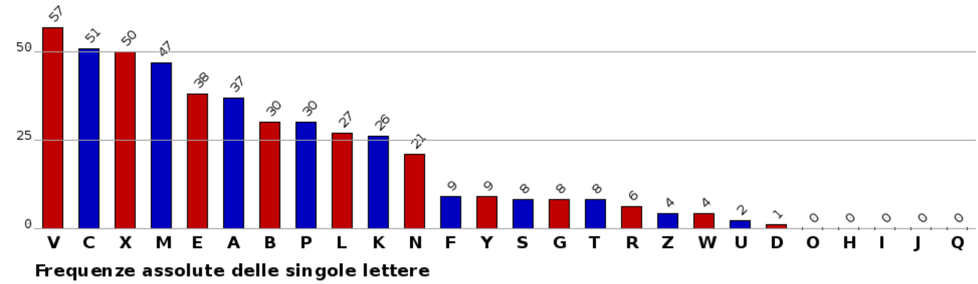


Figura 2. Grafico delle frequenze del testo cifrato.

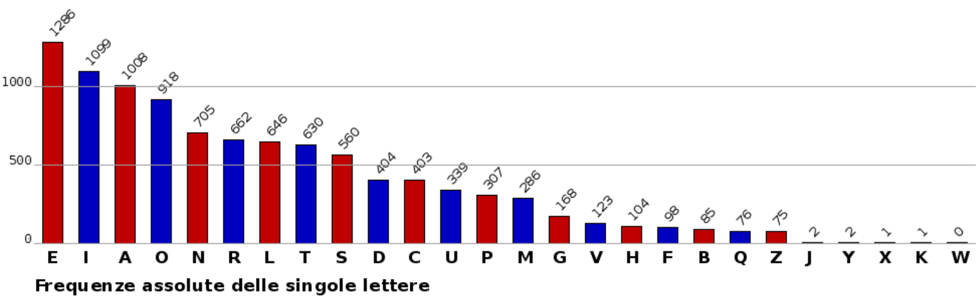


Figura 3. Grafico delle frequenze della lingua italiana, su 10000 lettere.

Il confronto tra i due grafici dice già qualcosa: le presenze sono 21 in buon accordo con l'ipotesi che la lingua sia l'italiano. In italiano, lingua molto *vocalica*, le vocali sono le più frequenti, possono darsi fluttuazioni nella frequenza di ognuna ma la loro somma, frequenza di una vocale quale che sia, è piuttosto stabile e vale 46,4%, 43,4% per le più frequenti in assoluto E A I O.

La prima ipotesi sul cifrato è che le 4 lettere più frequenti V C X M siano le cifre di E A I O; la somma delle frequenze è 43,34% in ottimo accordo con l'ipotesi, che quindi può essere presa come punto di partenza; non è però detto

che siano proprio E A I O in quest'ordine; le lettere seguenti in ordine di frequenza sono E A B P L quasi certamente N R T L S; la lettera U compare solo due volte sempre seguita da Y, quasi certo che U = Q e Y = Q; oltre tutto i trigrammi che iniziano per U sono UYC e UYV chiaramente stanno per QUA QUE QUI QUO. La Y = U compare 9 volte, 3 volte seguita da E, tre volte seguita da C; confrontando con le frequenze dei digrammi, il più frequente con iniziale U è UN, quindi quasi certamente E = N, confermando quanto emerso dalle frequenze.
Continuando questa analisi anche con il confronto con le statistiche dei digrammi e trigrammi più comuni è facile ricostruire un po' alla volta le principali lettere.
Non è qui necessario descrivere la decrittazione di questo esempio in dettaglio; il lettore che volesse cimentarvisi può a questo punto proseguire da solo … prima di leggere le righe seguenti.
Qui basta rendersi conto che l'impronta statistica di una lingua fornisce uno strumento formidabile per decrittare un cifrato monoalfabetico; unica condizione che questo sia abbastanza lungo da dare campioni statistici significativi; si può stimare in qualche centinaio di caratteri il minimo necessario; ma molto dipende anche dalle informazioni che abbiamo sul messaggio; se siamo ragionevolmente certi della presenza di una o più date parole nel testo,[4] questo è un aiuto formidabile con il quale si può forzare anche un cifrato di qualche decina di caratteri.
Tornando al nostro esempio alla fine del lavoro risulta questa lista (i puntini stanno per caratteri non presenti in questo testo):

VSKFMDTRC..PGEXNUALBYZ...W

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

E il testo chiaro è

LACOMMEDIANONHAATTINESCENELARAPPRESENTAZIONESARAI
NTERROTTAUNAPRIMAVOLTASENZACHEILSIPARIOSABBASSIALL
ORCHEILDIRETTORECAPOCOMICOEILCAPODEIPERSONAGGISIRITI
RERANNOPERCONCERTARLOSCENARIOEGLIATTORISGOMBRERA
NNOILPALCOSCENICOUNASECONDAVOLTAALLORCHEPERISBAG
LIOILMACCHINISTABUTTERAGIUILSIPARIOTROVERANNOGLISPE
TTATORIENTRANDONELLASALADELTEATROALZATOILSIPARIOEI
LPALCOSCENICOCOMEDIGIORNOSENZAQUINTENESCENAQUASIA
LBUIOEVUOTOPERCHEABBIANOFINDAPRINCIPIOLIMPRESSIONED
UNOSPETTACOLONONPREPARATO

(premessa ai "*sei personaggi in cerca d'autore*" di Luigi Pirandello).

[4] Un esempio famoso anche se con cifrari più complessi e sicuri: nella II guerra mondiale molti messaggi tedeschi contenevano alla fine un prevedibile "Heil Hitler". Comunque una formidabile ingenuità crittografica,

7. Il metodo Kasiski

Il cifrario di Vigenère è stato per secoli considerato inattaccabile, ma si tratta in verità di un sistema piuttosto debole; consideriamo infatti l'esempio seguente:

Testo chiaro - ARRIVANOIRINFORZI

Verme - VERMEVERMEVERMEVE

Testo cifrato - VVIUZVRFUVDRWAVUM

Le due R di ARRIVANO vengono cifrate la prima con una V la seconda con una I come deve essere in un cifrario polialfabetico. Ma le due A vengono invece cifrate con la stessa lettera, la V. Come mai? Il motivo è evidente: le due A si trovano a cinque caratteri di distanza l'una dall'altra e cinque è proprio la lunghezza del verme! Di fatto il cifrario di Vigenère si riduce qui a cinque cifrari di Cesare intercalati.

Il primo a pubblicare un metodo di decrittazione fu il colonnello prussiano Friedrich Kasiski, in un suo libro, nel 1863.

L'attacco di Kasiski si basa sull'osservazione che in un crittogramma alla Vigenère si trovano spesso sequenze identiche di caratteri ad una certa distanza l'una dell'altra; questo avviene evidentemente per il motivo esposto sopra; se per esempio usando la chiave VERME come sopra si scrive due volte la preposizione DEL a 30 caratteri di distanza questa sarà cifrata in modo identico essendo 30 un multiplo della lunghezza del verme che è 5.

Se allora si individuano le sequenze, digrammi o trigrammi, ripetute (e in un testo lungo o in più testi se ne troveranno molte) si dovrà cercare il massimo comun divisore tra le distanze tra sequenze identiche che sarà la lunghezza della chiave, o tutt'al più un suo multiplo.

Il metodo ha però il difetto che a volte le sequenze ripetute sono meramente casuali; occorrerà quindi un lavoro di cernita per individuare le sequenze utili giocando proprio sul fatto che queste devono avere distanze tutte multiple della lunghezza della chiave. Ovvio che se le distanze sono numeri primi grandi o con divisori grandi è probabile che si tratti di coincidenze casuali. Sta di fatto che si tratta di un metodo difficilmente automatizzabile.

Una volta individuata la lunghezza *n* della chiave, il messaggio si riduce a *n* messaggi intercalati, tutti cifrati con un cifrario di Cesare ed è allora molto facile completarne la decrittazione. Basta incolonnare il testo su *n* colonne ed esaminare le frequenze come per un monoalfabetico, ma qui basta un confronto tra i grafici per individuare la posizione delle lettere rarissime e il gioco è fatto.

Dopo Kasiski sono stati individuati altri metodi per forzare il cifrario di Vigenère, ma lo schema di fondo resta lo stesso, scomposto in due passi fondamentali:

1. Individua la lunghezza della chiave;
2. Individua la chiave;

Nei prossimi paragrafi ne presenterò uno basato sul test del χ^2 al posto della ricerca del M.C.D.
Il metodo si presta ad essere convertito facilmente in una procedura informatica; usando uno pseudo-codice la sequenza principale è:
Lunghezza <- CalcolaLunghezza(cifrato);
Chiave <- TrovaChiave(cifrato, lunghezza);
Testochiaro <- Decifra(cifrato, chiave)
Regola generale è che questi metodi funzionano solo se il testo è molto più lungo della chiave, grosso modo almeno 10 volte la lunghezza della chiave.
Al limite con un verme di lunghezza infinita, formato da una sequenza casuale di caratteri, il cifrario sarebbe sicuro al 100%, come ha dimostrato Shannon, e in questo caso prende piuttosto il nome di cifrario di Vernam.

8. Il metodo del Chi quadrato

Vediamo prima di tutto come funziona il test del χ^2.
Il test consiste nel confrontare una serie di dati osservati sperimentalmente con la serie dei dati attesi in base a un'ipotesi teorica e di stimare la bontà di questa ipotesi; rientra quindi nella famiglia dei cosiddetti *test delle ipotesi*.
Il metodo consiste nel calcolare per tutti i dati, la differenza tra il dato atteso (e_i) e quello osservato (o_i), elevarla al quadrato e dividere per il dato atteso, e quindi sommare tutti questi valori; la formula è:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathrm{e_i} - \mathrm{o_i})^2}{\mathrm{e_i}}$$

Questo valore, che prende appunto il nome di χ^2, è una misura della differenza complessiva tra dati osservati e dati attesi. È poi necessario stimare la probabilità che si verifichi una differenza di tale valore e quindi di farsi un'idea sulla sua verosimiglianza.
Come esempio supponiamo di lanciare 120 volte un dado allo scopo di controllare se il dado è buono o truccato e di ottenere la distribuzione di frequenze riportata nella tabella qui sotto:

	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
Osservati	17	23	21	25	15	19
Attesi	20	20	20	20	20	20

I valori attesi sono dati dal calcolo delle probabilità: essendo la probabilità di ottenere un qualsiasi numero 1/6, su 120 lanci il valore atteso sarà 120·1/6 = 20.
Il χ^2 si calcola allora così:

$$\chi^2 = \frac{(20-17)^2}{20} + \frac{(20-23)^2}{20} + \ \dots\ = \frac{70}{20} = 3.5$$

Il χ^2 vale dunque 3,5. Questo numero ci dà una misura della deviazione osservata della distribuzione dall'ipotesi teorica. Ma 3,5 è una deviazione grande o piccola?
Per rispondere a questa domanda occorre studiare la distribuzione del χ^2 e calcolare la probabilità che il χ^2 abbia un certo valore; la probabilità dipende anche da N numero dei gradi di libertà che è il numero dei parametri che possiamo dare liberamente senza violare i vincoli del problema. In questo caso ci sono sei frequenze attese, ma dovendo essere il totale pari a 120, solo 5 frequenze sono libere e dunque N = 5.
I manuali di statistica riportano tabelle del χ^2 e oggi molti software hanno funzioni χ^2 già pronte, per esempio Excel ed OO Calc hanno tre funzioni relative al test χ^2:

- **=DISTRIB.CHI(C; N)**: calcola la probabilità che per N gradi di libertà il χ^2 sia maggiore di C; nel nostro esempio **=DISTRIB.CHI(3.5; 5)** = 0,6234 probabilità che χ^2 > 3.5.
- **=TEST.CHI(O; A)**: calcola la probabilità che dati i valori attesi A si osservino i valori O o valori ancor più distanti da quelli attesi; nel nostro esempio si scriverà: **=TEST.CHI(B2:B7; C2:C7)** = 0,6234 (come sopra, ovviamente).
- **=INV.CHI(P; N)**: calcola per N gradi di libertà il valore di χ^2 tale che sia P la probabilità di avere un χ^2 maggiore o uguale a quello; nel nostro esempio **=INV.CHI(0.6234; 5)** dà ovviamente 3.5; in altre parole per 5 gradi di libertà e una probabilità del 62.34% il valore limite di χ^2 è 3,5.

Nel nostro esempio il valore di χ^2 ari a 3,5 ha una probabilità del 62,34%, nel senso che ci sono 62,34% probabilità che in 120 lanci di dadi si riscontrino deviazioni dalla media uguali o maggiori di questa (con χ^2 > 3,5).
Dobbiamo quindi concludere che non c'è motivo di sospettare che il dado sia truccato.
Va detto che anche valori troppo piccoli del χ^2 , troppo buoni insomma, possono dare adito a sospetti!
In questi casi di solito si considerano critici valori di probabilità di 0.10, 0.05, 0.01 e si effettuano test a questi livelli; se la probabilità risulta minore di questi vuol dire che si è verificato qualcosa di molto improbabile e che quindi c'è da sospettare che l'ipotesi sia sbagliata (qui che il dado non sia buono nel senso di avere probabilità uguali per tutte le facce).
Molti libri di statistica usano valori complementari a quelli usati da Excel e OO Calc; invece di una probabilità di 0,6234 qui avremmo ottenuto 0,3766 che è la probabilità di avere un χ^2 minore di quello ottenuto. In questi libri i test di cui sopra sono riportati come test allo 0.90, allo 0.95, allo 0.99.

9. Un prezioso indicatore crittografico: le presenze

In crittanalisi sono stati definiti molti indicatori preziosi per l'analisi di un testo cifrato:

Concettualmente semplice ma utilissimo per decidere se un cifrato è monoalfabetico o polialfabetico è il numero di ***presenze*** che è il numero di caratteri diversi presenti in un testo cifrato; in un cifrato che usi un alfabeto di A segni è ovviamente inferiore ad A; in un testo cifrato il numero di presenze è una funzione del numero di caratteri N del testo cifrato che si avvicina sempre più ad A; Sacco (2014) nel suo libro propone questa funzione empirica $p(N)$ che ben si adatta abbastanza bene a un cifrario monoalfabetico:

$$p(N) = \frac{2B}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{N}{A}\right)$$

Dove B una costante caratteristica di ogni lingua (in Italiano vale circa 20,5) che indica grosso modo il numero di lettere *non eccezionalmente rare* dell'alfabeto.

Per i cifrari polialfabetici viceversa l'andamento della funzione è molto diverso; una formula che lo approssima abbastanza bene è la seguente:

$$q(N) = \frac{2A}{\pi} \arctan\left(\frac{2N}{A}\right)$$

Il seguente grafico[5] mostra l'andamento delle due funzioni confrontato con quello di un testo cifrato; nel primo caso si tratta di un brano dantesco ("*Lo maggior corno della fiamma antica ...*") cifrato con un monoalfabetico, nel secondo dello stesso brano cifrato con Vigenère; appare evidente a colpo d'occhio che si tratta di un monoalfabetico:

[5] I grafici sono stati realizzati con una pagina PhP del mio sito: www.crittologia.eu/critto/php/presenze_testo.html

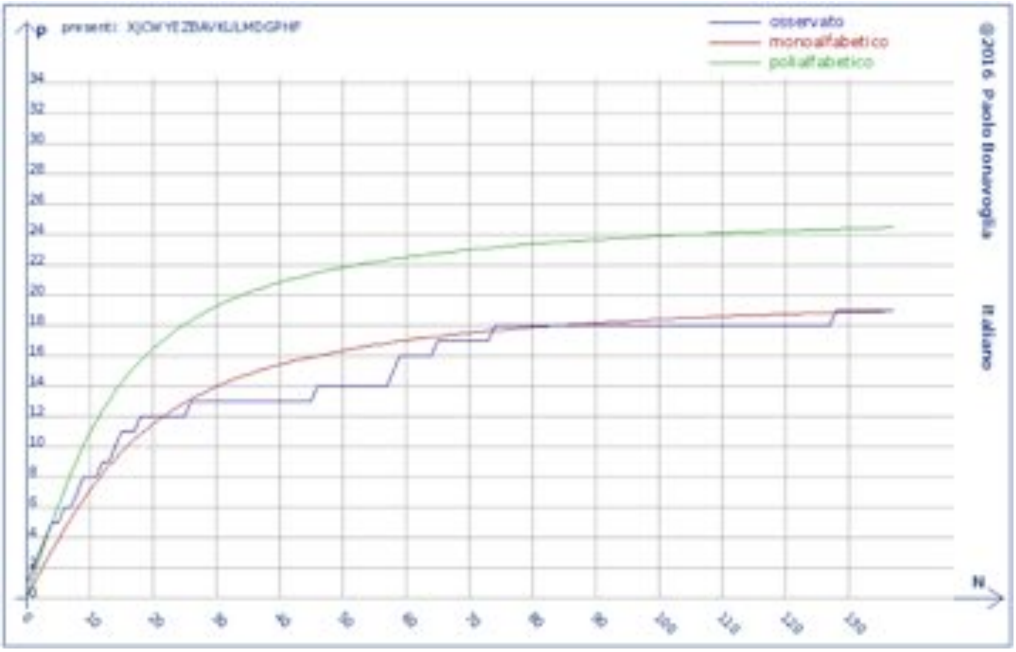


Figura 4. Confronto del grafico delle presenze di cifrato monoalfabetico con quelle teoriche.

Figura 5. Grafico dello stesso testo cifrato con Vigenere.

10. Crittanalisi automatica del Vigenère

A questo punto ecco come ho realizzato la decrittazione automatica del Vigenère, usando il linguaggio PhP.[6]

Il primo passo è quello di determinare la lunghezza del verme *n*; si fa una ricerca sequenziale provando tutti i valori di *n* da 1 fino ad un limite massimo prestabilito dall'utente, che deve anche selezionare il livello di probabilità minima richiesto tra 90%, 95%, 99%; per ogni valore il testo viene distribuito su *n* colonne che sono possibili testi cifrati con Cesare; per ogni colonna si calcola lo scarto tra il numero di presenze osservato e quello atteso per la data lingua; si calcola quindi il valore del χ^2; quando il χ^2 risulta minore del livello corrispondente alla probabilità prestabilita, la ricerca si ferma e il valore di *n* viene assunto come lunghezza della chiave.

Una volta trovato *n* il messaggio cifrato risulta spezzato in *n* testi cifrati con Cesare, dunque ci sono solo 26 ipotesi possibili; (per esempio spostamento di 3 A->D, B->E …; spostamento di 6 A->G, B->H …); queste 26 ipotesi vengono analizzate una per una e anche qui per ognuna viene calcolato il χ^2 tra le frequenze osservate e quelle medie per la lingua del testo; alla fine si individua l'ipotesi per la quale il χ^2 è minimo, e quindi la lettera della chiave.

Questo lavoro viene ripetuto per ogni colonna e alla fine si ottiene una ipotesi completa per il verme. Applicando il verme al cifrato si recupera il testo chiaro.

Da prove fatte il metodo è pressoché infallibile se la lunghezza del testo è almeno venti volte quella del verme (o chiave). Per rapporti tra dieci e venti alcune lettere della chiave possono essere sbagliate, ma se si tratta di una parola di senso compiuto non ci vuole molto a completarla; persino per valori inferiori a 10 il metodo riesce ancora ad azzeccare alcune lettere della chiave e il crittanalista può ancora arrivare manualmente alla soluzione.

Il passo più delicato della procedura è il primo, la stima della lunghezza della chiave; in qualche occasione il programma dà una lunghezza che è un multiplo della lunghezza vera; non è un vero e proprio errore, se la chiave era "SECRET" (lunghezza 6), anche "SECRETSECRET" (lunghezza 12) è chiave valida e la decrittazione funziona ugualmente; però una chiave di 12 caratteri è un po' più difficile da ricavare di una di 6 perché i singoli crittogrammi di Cesare sono più brevi, e, se il messaggio è corto, potrebbe risultare errata mentre una chiave di 6 verrebbe ancora identificata. In questo caso occorre un

[6] PhP è uno dei linguaggi preferiti per la realizzazione di pagine web dinamiche; la sua sintassi è fondamentalmente quella del C con la curiosa caratteristiche che le variabili devono iniziare con il simbolo del dollaro; per esempio $a $conta sono variabili; le variabili non sono tipizzate e possono essere numeri interi, a virgola mobile, caratteri, stringhe … a seconda di come vengono assegnate. Punti di forza del PhP sono le numerose librerie di funzioni e in particolare quelle che consentono di interagire con un database, in particolare con MySQL che è un po' il partner abituale di PhP. Moltissime pagine del Web sono basate su PhP e MySQL. Documentazione completa sul sito ufficiale http://php.net/docs.php .

intervento umano per correggere 12 in 6 e quindi viene meno la completa automazione della procedura.
Un fatto curioso è che spesso questo metodo fornisce la chiave corretta o in buona parte corretta anche usando la tabella delle frequenze di una lingua *sbagliata*; in effetti le lingue europee hanno distribuzioni di frequenza non molto dissimili.
Come è facilmente comprensibile, se il verme ha lunghezza paragonabile al testo e le *n* colonne contengono solo 2 o 3 o 4 o 5 caratteri non è più possibile fare confronti significativi con le tabelle di frequenza e il metodo fallisce.
Infatti, se il verme è lungo come il testo, si tratta in pratica di un Vernam, che è il cifrario sicuro e inattaccabile per eccellenza. E anche questo metodo non può che fallire in questo caso.

11. Alcune funzioni in dettaglio

Per chi è interessato al codice PhP, non essendo ovviamente possibile riportare qui l'intero codice, molto lungo, riporto solo un paio di funzioni basilari commentate.
Le funzioni sono inserite in una classe[7] *TestoSemplice* che contiene il testo vero e proprio, alcune proprietà e alcune funzioni tra le quali appunto quelle che seguono.
Vediamo prima la funzione *Presenze* che ha in ingresso due parametri: *$periodo* è il periodo che stiamo provando, *$posto* l'ordinale della colonna esaminata; $this->Testo è il testo completo memorizzato nella classe. La funzione ritorna il numero di caratteri presenti nella colonna; per calcolarlo si parte da una stringa vuota *$presenti,* si esamina passo passo la colonna e ogni volta che si incontra una lettera nuova la si aggiunge alla stringa; alla fine la lunghezza di *$presenti* fornisce il valore richiesto.

[7] La *classe* è lo strumento base del cosiddetto *Object Oriented Design*, OOD = progettazione orientata agli oggetti; vedi per esempio (Booch, 1991); PhP era nato come linguaggio tradizionale, imperativo, e solo in un secondo tempo vi sono state introdotte le classi. In estrema sintesi nella programmazione imperativa venivano prima le funzioni/procedure e poi gli oggetti (numeri, stringhe …) visti come parametri o variabili interne della funzione; nella programmazione OOD vengono prima gli oggetti/classi, poi variabili e metodi (procedure/funzioni) che sono visti come proprietà di una classe. Gli oggetti sono istanze di una data classe. Qui per esempio la classe astratta *TestoSemplice* ha le istanze testochiaro e testocifrato.

```
function Presenze($periodo, $posto){
	$len   = strlen($this->Testo);  \\ calcola la lunghezza del testo
	$presenti = ``;                        \\ inizializza a vuota la stringa
$presenti
	$pos = $posto;               \\ inizia dalla posizione $posto
	while ($pos < $len) {
		$lett = $this->Testo[$pos];   \\ lettera del testo alla
posizione $pos
		if (strpos($presenti, $lett) === FALSE)
			$presenti .= $lett;   \\ se non è già tra le presenti la
		aggiunge              $pos += $periodo;            \\ avanza
		lungo il testo di $periodo
	}
	return strlen($presenti);          \\ restituisce il risultato
}
```

Questa funzione lavora con caratteri latini, codificati in ASCII; per usare alfabeti non latini occorre passare alla codifica UTF-8, usando le funzioni apposite di PhP.

Questa funzione verrà richiamata per ogni colonna; i valori vengono confrontati con quelli attesi in base all'ipotesi del monoalfabetico con il test χ^2, al livello di significatività richiesto. Se il test è superato allora *$periodo* è la lunghezza della chiave; se non è superato si passa al prossimo valore di *$periodo*.

Una volta trovata la lunghezza si esaminano una per una le colonne, calcolando le frequenze delle singole lettere e confrontandole con quelle attese per la lingua del chiaro che si presume nota, sempre con il test χ^2. Trattandosi di un cifrario di Cesare, se l'alfabeto è quello internazionale, ci sono solo 26 valori e bastano quindi 26 tentativi per trovare l'ipotesi corretta. La differenza tra chiaro e cifrato è l'indice della lettera della chiave, per esempio se vale 0 la lettera è A, se vale 2 è B ecc.

Vediamo quindi la funzione *Chi2* che calcola questo chi quadrato tra i due vettori che contengono le frequenze osservate ed attese; i parametri sono gli stessi di prima *$periodo* e *$posto;* la procedura non fa altro che tradurre la formula vista in precedenza, scorrendo la colonna allo stesso modo della funzione *Presenze*.

```
function Chi2($periodo, $posto){
	$freqAtt = $this->FrequenzaAttese();
	\\ genera un vettore con le frequenza attese chiamando una funzione
	$freqOss = $this->FrequenzeParz($periodo, $posto);
	\\ genera un vettore con le frequenze osservate su questo testo alla
colonna $posto
	$sum = 0;                              \\ inizializza il chi
quadrato a zero
	for ($ind = 0; $ind < $this->AlfabetoLun; ++$ind){
	\\ ciclo per ogni lettera dell'alfabeto
		$freq = ($freqOss[$this->Alfabeto[$ind]]- $freqAtt);       \\
calcola (e_1 - o_i)
		$sum += $freq*$freq/$freqAtt;                             \\
calcola e somma
	}
	return $sum;
	\\ restituisce il valore di chi quadrato
}
```

12. La pagina web

Per finire riporto più sotto la pagina web che permette la crittanalisi automatica.

http://web.crittologia.eu/critto/php/vigenereminquad.phtml

In basso ci sono due finestrelle, in quella a sinistra va inserito il testo cifrato con Vigenère.

A questo punto si può procedere in due modi:

1. **Modo semiautomatico**: si fa clic su “Deduci lunghezza verme” dopo aver selezionato il livello di significatività del chi quadrato (consigliato 90%); dopo un attimo viene visualizzato il valore calcolato; a questo punto fare clic su “Deduci verme” e viene mostrato il verme ricostruito, quindi su “Decifra” e appare il testo decifrato.
2. **Modo automatico**: per il genere *mi sento fortunato* fare clic su “Decritta” e tutte le tre fasi precedenti sono eseguite nell’ordine; dopo un attimo appare il testo decrittato.

13. Applicazioni alla didattica

Appaiono evidenti dal testo precedente i numerosi addentellati con la matematica, la statistica e l'informatica.

La crittografia fornisce tantissimi spunti per esercitazioni nelle scuole secondarie superiori, cito solo alcune aree da esplorare in questo senso:

1. In matematica come esempio di funzioni anche non numeriche;
2. In statistica per l'analisi statistica delle frequenze di una lingua;
3. Sempre in statistica a un livello superiore come campo di sperimentazioni dei test delle ipotesi; il test del chi quadrato può essere introdotto facilmente a livello intuitivo e può bastare l'uso di un foglio di calcolo come Excel che ha sempre disponibili le tre funzioni elencate più sopra.

In informatica ottimo campo per realizzare esercitazioni, da quelle più semplici (realizzazione di un cifrario di Cesare, monoalfabetico, di Vigenére) a quelle più complesse come quella qui esposta.

Bibliografia

Bauer, F. L. (1997). *Decrypted Secrets*. Berlin: Springer Verlag.

Bonavoglia, P. (1996–2016). *La Crittografia da Atbash a RSA*. http://www.crittologia.eu

Bonavoglia, P. (2010). *Crittanalisi semi-automatica del Vigenère*. Tratto da *La crittografia da Atbash a RSA*. http://www.crittologia.eu/critto/php/vigenereminquad.phtml

Booch, G. (1991). *Object-oriented design, with applications*. Redwood City, CA: Benjamin/Cummings.

Sacco, L. (2014). *Manuale di Crittografia* (P. Bonavoglia, Ed.). Milano: Apogeo.

Spiegel, M. R. (1994). *Statistica*. Milano: McGraw-Hill.

Una guida ‘lonely planet’ per il regno dei segni

Luigi Borzacchini
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Abstract. *Already Leibniz knew it: our science is a syntactic science, expressed by algebraic, logic, algorithmic signs. In addition, today our teenagers and young people are digital natives and we live immersed in the realm of signs. But we do not know which kind of things they are, so we don’t know what our science is built on and which kind of world we are facing. ‘Sign’ is a very old term, something of that kind was already well known in Greek science, <smoke is the sign of fire>. But are the algebraic signs like those or are something else? Why are they paradoxically so indigestible even to our digital native students? I’ll try to deliver a short guide to the scouting of that mysterious realm.*

Non sono un esperto in didattica della matematica, ma mi interesso di storia e filosofia della matematica. Non è la stessa cosa, ma ci sono innumerevoli connessioni. E poi insegno matematica da 48 anni, e, last but not least, sono amico di Bruno, un ‘amico di penna’, e quindi colgo l’occasione per toccare una di queste connessioni: la navigazione nel ‘regno dei segni’.
Già Leibniz l’aveva capito: la nostra scienza è una scienza sintattica, che si esprime tramite segni algebrici, logici, algoritmici. Inoltre oggi i nostri adolescenti e i nostri giovani sono nativi digitali e noi viviamo immersi nel regno dei segni. Ma non sappiamo che tipo di cose essi siano, e quindi non sappiamo su cosa si è costruita la nostra scienza e quale tipo di civiltà abbiamo costruito con essi.
Nelle mie saltuarie lettura sulla didattica della matematica ho letto spesso delle difficoltà che uno studente incontra quando incontra i ‘segni’ nella forma delle ‘lettere’ dell’algebra, e del resto già Jean Piaget aveva parlato di una fase specifica, ‘astratta’, dello sviluppo cognitivo del ragazzo.
La storia e la filosofia della matematica mi portano entrambe a considerare quella che nasce col Seicento un’‘altra’ matematica. Precedentemente, dall’antichità al medioevo, gli attributi matematici erano parte del linguaggio comune (aggettivi) e del mondo dell’essere quotidiano, stabile e immediato – erano numeri e figure geometriche – , dal Cinquecento essi si confrontano con la prassi artificiale, variabile e accidentale, nel laboratorio e nella macchina, e diventavano prima termini inconsueti – segni, algoritmi, grandezze numeriche, logaritmi – , e poi, nel Seicento, del tutto inediti – numeri reali e complessi, derivate e integrali, serie e limiti, infinitesimi e infinito. Qualcosa che non esisteva né in cielo né in terra, ma solo nel nuovo (autonomo e artificiale) linguaggio matematico, nato per rappresentare il ‘mondo dei segni’.

Che cosa è il ‘segno’? La nostra civiltà è ormai il “regno dei segni” e al suo centro c’è il computer, la macchina sintattica. Il computer è entrato ormai in tutte le nostre attività, lavoro, cultura, intrattenimento e giochi, comunicazioni. Il cuore delle nostre auto, dei nostri telefonini, dei nostri elettrodomestici sono piccoli microchip. Tutto il mondo e le sue comunicazioni sono basate su una rete di computer interconnessi. Tutto ciò che ci circonda, prima di essere stato fabbricato in plastica, metallo, silicio, è stato progettato in un mondo di segni, le nostre fabbriche sono organizzate da computer e tutta l’attività finanziaria su cui si regge l’economia globale è regolata da una rete planetaria di computer con i quali la ricchezza ha ormai la forma puramente sintattica del capitale finanziario, tanto che gli analisti addebitano ad essi il carattere esplosivo delle crisi degli ultimi 15 anni. Noi abbiamo pin, codici fiscali, password, etc. che regolano il nostro rapporto col mondo, e anche il nostro corredo cromosomico è codificato dal DNA, sul quale cresce l’ingegneria genetica e le biotecnologie. Il nostro stesso cervello è fatto da neuroni, piccoli automi interconnessi in una rete estremamente complessa, nella quale si scambiano ‘segni’ come segnali elettrochimici.
I segni non hanno però mai avuto un grande apprezzamento, in quanto “sono solo ‘segni’!”. Un filosofo o un artista o un letterato sarebbe contrario a dare loro un ruolo centrale, magari direbbe con una punta di disgusto che “i segni sono la morte dello spirito!”. Ma anche un fisico finirebbe col dire “i segni sono importanti, ma sono più importanti le idee”, eppure io ho visto tanta fisica scritta quasi solo di segni, ma niente di interessante, dopo le *Lettere ad una principessa tedesca* di Euler, scritto solo tramite ‘idee’.
Tuttavia la cultura scientifica dominante nel XX secolo, e quindi di riflesso anche la didattica delle discipline scientifiche e matematiche, da Ernst Mach al positivismo logico ed ancora oggi, ha avuto un carattere fortemente empirista e pragmatico, con la matematica e la logica derubricate al solo ruolo ‘economico’ di ‘compressione-dati’ di una conoscenza scientifica puramente basata sull’esperimento di laboratorio, una sorta di ‘zucchero sintattico’ per immagazzinare in pochi segni una quantità di dati immensa.
Eppure nella prima metà del Novecento ci sono ancora state voci dissonanti che hanno attirato l’attenzione sul mondo dei segni.
Nel formalismo la logica assumeva un ruolo strumentale, e la matematica aveva un contenuto ed un fondamento sicuri a prescindere dalla logica. Alle operazioni logiche doveva essere aggiunto qualcos’altro, qualcosa che esplicitamente per David Hilbert ricorda un a-priori kantiano, necessario per fondare la matematica al di là della logica, e addirittura necessario per le stesse operazioni logiche:

> qualcosa deve già essere dato alla nostra capacità di rappresentazione, certi oggetti concreti extralogici che sono intuitivamente presenti come immediata esperienza prima di ogni pensiero. Se l’inferenza logica deve essere affidabile deve essere possibile controllare questi oggetti completamente in tutte le loro

> parti e la loro presenza e che differiscono l'uno dall'altro e che essi seguono l'un l'altro deve essere dato intuitivamente con gli oggetti, come qualcosa che né può essere ridotto ad altro né richiede riduzione. Questa è la posizione filosofica di base che io considero requisito per la matematica e in generale per tutto il pensiero scientifico, la comprensione e la comunicazione. E in matematica in particolare ciò che noi consideriamo sono gli stessi segni concreti la cui forma, in accordo con la concezione adottata, è immediatamente chiara e riconoscibile. (Hilbert, *On the infinite*, 1925)

I segni appaiono qui gli a-priori cognitivi formali della struttura logica della matematica.
In Edmund Husserl:

> Quanto più cresce l'edificio delle scienza, quanto più ricca si fa la sua 'metodica', tanto più il lavoro principale passa nella sfera del pensiero simbolico; i concetti che originariamente erano orientati sulla base della intuizione vengono usati in modo puramente simbolico … ciò che a un grado inferiore era relativamente evidente, a un grado superiore viene simbolizzato e privato della evidenza comprensiva (considerata un superfluo gravame per il pensiero). (Husserl, *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica, III*, 871)

Il progresso della scienza è quindi il passaggio da una conoscenza intuitiva ed evidente verso la conoscenza sintattica, anche se la forma sintattica vi appare come un residuo, qualcosa che resta dopo uno "svuotamento di senso".
In Ernst Cassirer:

> E che in effetti vi sia una attività pura dello spirito che si rivela nella creazione dei vari sistemi di simboli sensibili, trova anche una sua espressione nel fatto che tutti questi simboli fin dall'inizio si presentano con una determinata pretesa di obbiettività e di valore. Essi nella loro totalità oltrepassano la sfera dei fenomeni coscienti meramente individuali e pretendono di porre davanti a questi ultimi un elemento universalmente valido … per lo più addirittura come la vera e propria essenza dell'obbiettività e del 'reale'. (Cassirer, *Filosofia delle forme simboliche* I, 24)

Qui è chiaro, che, sebbene siano sensibili e individuali, i segni sono la conditio-sine-qua-non per l'oggettività e universalità della nostra scienza. Il 'simbolo' è qui qualcosa di più esteso del nostro 'segno' e riguarda anche il linguaggio, l'arte e il mito, ma è proprio il 'segno matematico' quando Cassirer caratterizza la scienza moderna come 'forma simbolica'.
Il *Tractatus Logico-philosophicus* di Ludwig Wittgenstein eleva la struttura sintattica a paradigma totale del dicibile, e considera il sistema logico dei segni del tutto ovvio al punto da ipotizzarne un quasi isomorfismo con la realtà e col pensiero:

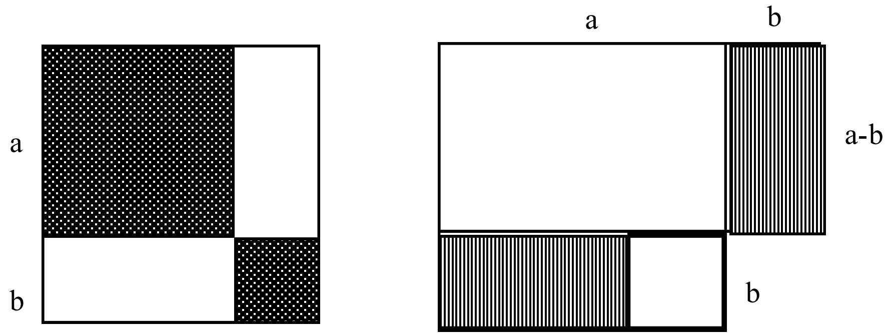
> 3. L'immagine logica dei fatti è il pensiero.
>
> 4. Il pensiero è la proposizione munita di senso.
>
> 4.01. La proposizione è un'immagine della realtà.

Riproponendo, col linguaggio logico formale al posto del linguaggio naturale, la stessa struttura rigida del paradigma sintattico con cui esso era nato con Parmenide.
Più problematiche le ultime opere di Wittgenstein, soprattutto le *Philosophical Investigations* e i *Remarks on the foundations of mathematics*, nei quali l'autore indaga quale tipo di connessione si istauri tra 'significato' sincronico immediato e il variegato 'uso' linguistico diacronico di una parola. Per quanto ci interessa più da vicino la questione investe la relazione tra un "essere" fisso, stabile, il significato che viene istantaneamente compreso, ed un "divenire", il molteplice e mutevole "uso" della parola nei vari momenti e contesti, in definitiva l'unico vero modo di definire lo stesso 'significato' della parola.
Wittgenstein comprende che la formula e il calcolo simbolici, tutt'altro che secondari, in realtà danno un significato inattingibile in loro assenza: sono "lo strumento più raffinato per la determinazione del significato" ('56, appendice II). Ma come riescono ad avere tale significato? "ogni segno da solo sembra morto. Che cosa gli dà vita? Nell'uso esso vive" ('53*,* I, 432).
E tutta la analisi di Wittgenstein finirà con l'arenarsi nel *problem of rules*, laddove ogni regola per essere applicata richiede che le sottoregole che la compongono nella sua interpretazione vengano applicate e quindi a loro volta interpretate. Il regresso si deve fermare a regole elementari, essenzialmente fondate sulla 'concordanza' o 'uguaglianza', che a sua volta però deve richiedere una interpretazione univoca per non riproporre la necessità di una interpretazione. E l'"uguaglianza", come anche le altre 'primitive', si rivela qualcosa che può essere predicato solo dei segni, e che quindi il ridursi di tutto il problema delle regole al riconoscimento della uguaglianza significa solo che *non esistono regole senza segni.*
E questo viene garantito solo dall'addestramento ad un uso socialmente condiviso: la compartecipazione allo stesso *gioco linguistico* finisce con l'essere l'unica fondazione possibile all'uso intersoggettivo di quelle rappresentazioni formali elementari a cui si riduce tutto il conoscere.
'Segno' è un termine molto antico, qualcosa del genere era già ben noto nella scienza greca, <il fumo è segno del fuoco>. Ma i segni algebrici sono qualcosa di analogo o sono qualcos'altro? E possiamo fornire una breve guida per l'esplorazione di quel regno misterioso?
Il significato tradizionale della parola 'segno' è quello che ritroviamo nel *sēma* greco, dal quale derivano termini quali 'semantica', 'semiotica' o 'semaforo'. Il 'segno' era qualcosa di notevole, che attirava l'attenzione, il fumo richiamava il fuoco, la febbre segnalava la malattia, la tomba non significava niente di particolare ma si distingueva nel panorama, il 'segno' era epifania, rivelazione, manifestazione: nel Vangelo di san Giovanni i miracoli sono i 'segni' della natura divina del Cristo.
Ma il segno cominciava ad essere anche una testimonianza, qualcosa di pragmatico, qualcosa che richiama alla mente qualcos'altro di non immediato,

ereditato soprattutto dalla medicina e dalla divinazione. Ed il segno era diventato argomento di filosofia naturale come antecedente in una implicazione: <se c’è il fumo allora c’è il fuoco>, qualcosa di abituale e indipendente dall’interprete, una semplice implicazione – causale, analogica o convenzionale – , e qualcosa di cui il linguaggio era solo un esempio tramite l’idea di ‘significato’: in Aristotele le ‘passioni dell’anima’ sono immagini delle cose, e la significazione collega le parole a tali immagini e quindi alle cose.
I suoni della voce sono simboli delle affezioni che hanno luogo nell’anima e le lettere scritte sono simboli dei suoni della voce. Allo stesso modo poi che le lettere non sono le medesime per tutti, così neppure i suoni sono gli stessi; tuttavia suoni e lettere risultano segni anzitutto delle affezioni dell’anima che sono le medesime per tutti e costituiscono le immagini degli oggetti, già identici per tutti. (*De Interpretatione,* 16a 3–7)
Ma nel tardo Medioevo il *segno* vive una ‘second life’: l’emergere del *segno algebrico* è un processo lungo e complesso, e poco noto.
Una traccia già nella tarda antichità in Diofanto, ma la sua opera verrà riscoperta solo nel Cinquecento. In Leonardo Fibonacci *signum* è termine usato per lo 0, mentre le altre sono ‘cifre’ e quindi numeri, oppure è usato per i numeri rappresentati come configurazioni delle dita nel calcolo con le mani. In entrambi i casi il segno sembra un tradizionale *aliquid stat pro aliquo*, convenzionale (né causa/effetto, né somiglianza) come il cerchio di foglie nella taverna medievale per indicare la vendita del vino, ma già accade che *il suo ‘senso’ sia da ascrivere agli algoritmi che lo utilizzano:* il significato dello 0 dipende dalla sua posizione nel dato e dall’algoritmo che lo sta usando.
Il segno algebrico grafico medievale a prima vista sembra avere un’origine solo notazionale: una semplice stenografia per i testi di contenuto algebrico – come era comune nelle troncature e legamenti usati dagli amanuensi. Ma col tempo il segno algebrico comincia a diventare qualcosa di più: diventa parte integrante e indispensabile delle procedure atte a risolvere problemi*,* soprattutto i *segni algebrici* si caratterizzano come ‘oggetto’ degli *algoritmi*.
Il segno si svuota di significato e di senso, della ‘*x*’ non conosciamo immediatamente il valore, ma neanche la natura (lunghezza, prezzo, peso, molteplicità, etc.): è l’incognita nelle equazioni – un segno della ignoranza! – , poi diventerà la coordinata generica nella geometria analitica – un segno della genericità! – , poi ancora la grandezza variabile nelle leggi fisiche – un segno del divenire! – , e infine il *Leerstelle*, il posto vuoto da riempire con ‘qualcosa’, nella logica di Frege – un segno dell’indeterminato!. Insomma: il segno algebrico è segno del negativo!
Le stesse cifre indo-arabe sono una rivoluzione non perché posizionali, né per la presenza dello zero, ma perché già nella matematica islamica diventano gli ‘ingredienti’ essenziali degli algoritmi, le nostre operazioni in colonna, diversamente da quanto accadeva con l’abaco in cui si operava sui sassolini, e

nel quale i numeri erano solo simboli per registrare dati. Così le antiche operazioni sull'abaco diventano gli algoritmi sintattici, e sono loro i portatori del senso perduto dei segni numerici, ed è la manipolazione algebrica a trasformare il problema in equazione: il significato del segno è negli algoritmi che lo utilizzano, *non sono pensabili algoritmi senza segni né segni senza algoritmi*.
Si afferma la coincidenza tra 'processo meccanico' e 'algoritmo', il segno è anfibio, nel contempo materiale e ideale, e si lega alla macchina, un aspetto che appare forse per la prima volta con gli orologi meccanici, ed è quindi ingrediente di una tecnologia che usa i segni: la stessa ruota dentata che appare nell'orologio apparirà nelle prime macchine calcolatrici di Pascal e Leibniz.
La manipolazione algebrica e il simbolismo algebrico saranno creazioni strettamente medievali. E sottolineo la parola 'creazione' perché niente del genere si ritrova nella grande matematica greca di Archita, Euclide, Archimede, Apollonio. Per giunta è del tutto 'non teorica': l'algebra prima dell'Ottocento non è mai stata una specifica 'teoria', e l'uso dei segni, tanto indo-arabi che algebrici, veniva insegnato all'interno della tradizione pratica, quindi solo attraverso esempi e applicazioni. In questo la *Geometrie* cartesiana (niente assiomi o postulati, niente definizioni, niente teoremi) è diametralmente opposta agli *Elementi* euclidei: è un dizionario per tradurre la geometria nel linguaggio algebrico.
Dopo il Cinquecento la carriera dei 'segni' diventa travolgente. Da stenografia essa diventa un linguaggio universale: dall'algebra simbolica e dalla geometria analitica alla logica matematica ed ai linguaggi algoritmici e di programmazione, passando per l'analisi matematica e le strutture algebriche.
Che cosa può dire questa storia alla didattica della matematica? Chiedo scusa preventivamente se le mie opinioni sembreranno inapplicabili o sbagliate, ovvie o banali.
In primo luogo occorre non sottovalutare l'alterità della matematica dei segni rispetto a quella dei numeri e delle figure. È un mondo del tutto nuovo e diverso, estraneo alla conoscenza comune quotidiana. È come staccarsi dal latte materno, e questo, insieme col ruolo tecnico che la matematica aveva assunto in molte nuove professioni nel Rinascimento, spiega il carattere fortemente 'autoritario' affermatosi nell'insegnamento della matematica sin da allora. Il vero problema oggi è salvare anche qui l'imperativo platonico "niente di matematico deve essere insegnato per costrizione all'uomo libero" (*Respublica,* 536 e 1–2).
In secondo luogo, proprio per realizzare questo obiettivo, è forse utile ricordare che la via di accesso al linguaggio algebrico storicamente è stata la natura originariamente geometrica dell'algebra babilonese (l'approccio aritmetico inizia tra tardo medioevo e Rinascimento), che ritroviamo nel II libro degli *Elementi* di Euclide, la cosiddetta *algebra geometrica* [in figura le dimostrazioni geometriche delle formule algebriche:

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \qquad (a + b) (a - b) = a^2 - b^2$].
E non dimentichiamo che i matematici babilonesi erano capaci così di risolvere geometricamente in maniera del tutto generale anche problemi riducibili a equazioni quadratiche in forma normale.



In terzo luogo il segno algebrico è l'altra faccia dell'algoritmo algebrico: *niente segni senza algoritmi, nessun algoritmo senza segni*. E gli algoritmi vanno costruiti o capiti, non necessariamente eseguiti: a quello ci pensa il computer, e lo studente non è una copia imperfetta del computer. È ridicolo imparare a memoria l'algoritmo per l'estrazione della radice quadrata. Esso va solo costruito con tecniche di algebra geometrica e immediatamente generalizzato a radici terze, quarte, n-esime, e solo allora è lecito eseguirlo. Analogamente è assurdo imparare la prova del nove, senza capire perché funziona, e perché la prova del nove è meglio della prova del sette pur essendo altrettanto (quasi) corretta.
In quarto luogo la matematica sintattica è il linguaggio universale di un mondo tecnico. Essa si costruisce in laboratorio e nell'uso di macchine. Altrimenti è solo una tortura mentale, perché 'filosoficamente' i segni sono solo scarabocchi! E questa è l'altra faccia, quella tecnologica, della natura algoritmica del regno dei segni.
E soprattutto occorre ricordare che i segni non sono solo 'segni'! Anche se è irrilevante chiedersi che cosa essi siano.

Matematica e oggetti concreti: alcuni limiti della costruzione geometrica della radice di 2 come diagonale di un cortile quadrato

Laura Branchetti
NRD, Università di Bologna

Sunto. *In questo breve lavoro, dedicato senza alcuna pretesa ma con il massimo affetto a Bruno D'Amore in occasione del convegno in suo onore, discuto alcune criticità da un punto di vista didattico legate alla scelta di un esempio concreto per l'introduzione dei numeri irrazionali nella scuola secondaria di secondo grado, facendo riferimento alla letteratura di ricerca e a una ricerca in cui sono stati intervistati insegnanti di matematica di tale livello scolastico con diversa formazione iniziale e in servizio.*

Abstract. *In this brief paper, written with no ambitions but great affection for Bruno D'Amore in occasion of the conference organized for him, I discuss some critical aspects of using concrete examples to introduce irrational numbers in the high school, taking in account results from the literature and from a research in which mathematics high school teachers with different backgrounds have been interviewed.*

1. Introduzione

In una ricerca che ho condotto nel 2013 nell'ambito della mia tesi di dottorato in Didattica della matematica, ho chiesto a insegnanti di scuola secondaria di secondo grado italiani se un problema formulato in contesto concreto (misura del perimetro di un cortile di forma quadrata da recintare) potesse aiutare gli studenti a comprendere i numeri reali e fornisse un'immagine dei numeri reali utile nello studio della matematica. Ho raccolto i dati mostrando un video esemplificativo di una possibile introduzione di $\sqrt{2}$ come numero irrazionale, chiedendo di commentare il video in una prospettiva didattica.

Ciò che mi ha portato a presentare questo esempio in questo breve lavoro è la discrepanza che ho potuto osservare tra la grande disomogeneità del gruppo di insegnanti intervistati (soprattutto relativa alla formazione e al percorso universitario) e il fatto che tale scelta fosse considerata buona quasi all'unanimità. Era come se, in un certo senso, questa scelta mettesse un po' tutti d'accordo, nonostante la presenza di una grande eterogeneità nelle risposte dei docenti, all'interno della stessa ricerca, su altri aspetti della trasposizione didattica dei numeri reali.

Un fattore importante, che potrebbe essere stato decisivo nel creare un tale accordo, è il connubio tra la semplicità della costruzione e la concretezza del problema, formulato in contesto realistico.

Rendere concreto ciò che è percepito come astratto, formale, lontano dalla vita quotidiana è di certo affascinante per un docente, in quanto questo avvicinamento alla realtà può creare la speranza di avere più attenzione da parte degli studenti e poterli coinvolgere con maggiore successo nell'attività didattica.
A questo proposito Bruno D'Amore, in un articolo pubblicato nel 2008 su Vita Scolastica e riferito alla scuola primaria, scrive:

> NON si deve identificare la matematica solo con ragionamenti astratti e formali a causa dell'età del discente che necessita di ancoraggi al reale; ma NON si deve neppure fare il contrario. […] Non tutto in matematica si può modellizzare in modo concreto, se non si vuol rischiare un insuccesso clamoroso; e non tutto si deve offrire solo formalmente od astrattamente, per lo stesso motivo. […] Dietro il concreto, spesso, ci si rifugia noi adulti, perché non sappiamo compiere corrette trasposizioni didattiche. (D'Amore, 2008, p. 3)

In questo breve lavoro, dedicato senza alcuna pretesa ma con il massimo affetto a Bruno D'Amore in occasione del convegno in suo onore, discuto alcune criticità da un punto di vista didattico legate alla scelta di un esempio concreto per l'introduzione dei numeri irrazionali nella scuola secondaria di secondo grado, riadattando il problema e le riflessione al livello scolastico in esame e facendo riferimento a una ricerca in cui sono stati intervistati insegnanti di tale livello.

2. La diagonale del quadrato nelle diverse matematiche

La costruzione geometrica della diagonale di un quadrato è un'operazione estremamente semplice. Costruendo un quadrato che ha come lato la diagonale di un altro quadrato si ottiene un quadrato di area doppia rispetto a quella del quadrato costruito inizialmente. Procedendo in questo modo si possono ottenere costruzioni molto interessanti da un punto di vista artistico.
Costruzioni così semplici da realizzare in contesto geometrico diventano immediatamente molto complesse se si decide di riflettere sulla misura dei segmenti ottenuti tracciando diagonali di un quadrato il cui lato viene preso, per semplicità, come unità di riferimento. La relazione tra il segmento e il numero che rappresenta la sua misura è infatti il cuore del problema dell'incommensurabilità tra grandezze omogenee.
Forse è questa la ragione per cui è possibile rintracciare in quasi tutte le culture matematiche del mondo, presenti e passate, un cenno all'affascinante problema della descrizione delle caratteristiche di questa diagonale. Si possono ricostruire alcune di queste tracce, ad esempio, nel saggio *La favolosa storia della radice quadrata di due* di Benoit Rittaud (2010), docente di teoria dei numeri e di sistemi dinamici dell'Università Paris-13. ma anche appassionato divulgatore della matematica.
Si pensi, per iniziare, al problema dell'incommensurabilità formulato all'interno della scuola pitagorica. Per i Pitagorici i numeri erano l'essenza del

mondo: "tutto è numero". Attraverso il concetto di monade, entità microscopica, materia viva che componeva l'universo, i Pitagorici tentavano di descrivere la perfetta armonia della natura. Il numero è l'*archè* di tutte le cose, il principio unificatore della realtà. Ma, dal momento che i numeri contengono tutti l'unità, in quanto nascono tutti dall'unità sommata a se stessa, i Pitagorici possono affermare che l'*archè* è *l'uno*.
La natura poteva essere descritta perciò, detto in un linguaggio moderno, in termini di numeri razionali positivi, ovvero numeri naturali e loro rapporti. Per i Pitagorici il fatto che esistesse un oggetto così semplice – la diagonale di un quadrato di lato 1 unità – ottenuto dalla più elementare delle figure geometriche, che non si lasciava descrivere da questa teoria era tutt'altro che un problema di tipo pratico, concreto, applicativo. Il problema era di natura filosofica e riguardava l'esistenza di una parte della realtà che sfuggiva a un supposto ordine.
Si pensi ora ad un esempio concreto, ad esempio ad un ragazzo che si pone il seguente problema: quanta rete serve per recintare un cortile quadrato che ha come lato la diagonale di un quadrato di lato 1 km? In questo caso si entra in un discorso assai lontano dal problema teorico legato al problema dell'incommensurabilità.
Allo stesso modo, nonostante ci sia una grande differenza tra il contesto culturale del mondo greco e quello in cui si è sviluppato il pensiero razionale di fine Ottocento, il problema presentato da Dedekind per la caratterizzazione aritmetica del continuo non è riconducibile al calcolo di lunghezze di perimetri "irrazionali" per comprare una recinzione, o in generale, alla risoluzione di problemi concreti.
Siamo già in presenza di tre diverse categorie di problemi, tutti riconducibili al tema della descrizione numerica della misura della diagonale del quadrato, ma per nulla identificabili dal punto di vista delle filosofie di fondo, della conoscenza e competenza matematica che servono per porli e affrontarli e dei contesti in cui è stato formulato il problema.
Il problema matematico, nel diventare un problema didattico, è influenzato da una cultura, da una filosofia, da un approccio, da una relazione tra il reale e l'osservatore e, soprattutto, da una *epistemologia scolastica,* per usare le parole di Brousseau (2008). Questo può influenzare non poco un aspetto cruciale dell'apprendimento, che è il senso di ciò che si sta chiedendo agli studenti di fare e di imparare.
La ricontestualizzazione di un problema antico, che non era tanto legato al concreto quanto a interrogativi emersi nel tentativo di descrivere la realtà attraverso i numeri, non era formulato in senso applicativo ma come quesito teorico e filosofico, nell'epistemologia scolastica di una classe in cui tutta la matematica è funzionale all'applicazione può perdere profondamente di significato. Gli effetti indesiderati potrebbero essere principalmente due: da un lato non far comprendere il senso del problema dell'incommensurabilità come

problema teorico e filosofico, dall'altro confondere le idee in merito alla differenza tra il concetto di misura in matematica, che può avere a che fare con numeri irrazionali, e la misura realizzata attraverso strumenti concreti, necessariamente discreta. C'è certamente una relazione profonda tra i due tipi di misura, tra i due tipi di problema ma la natura di tale relazione meriterebbe un'adeguata riflessione e non può essere data per scontata.
Perché allora proporre un esempio concreto, che apre innumerevoli questioni non banali? La convinzione che gli esempi concreti aiutino gli studenti ad imparare la matematica, qualunque sia il problema, fa parte in un certo senso della tradizione didattica, almeno in Italia.
In D'Amore et al. (2009, p. 178–179), articolo dedicato al ruolo dell'epistemologia si trova una possibile interpretazione di questo fenomeno:

> Nel momento di prendere le loro decisioni in aula, gli insegnanti usano esplicitamente o implicitamente ogni tipo di conoscenze, di metodi e di convinzioni sul modo di trovare, di apprendere o di organizzare un sapere. Questo bagaglio epistemologico è essenzialmente costruito empiricamente per rispondere alle necessità didattiche. Questo, a volte, è il solo mezzo di cui gli insegnanti dispongono per proporre i processi didattici scelti e di farli accettare dai loro allievi e dal loro ambiente. L'insieme delle convinzioni degli insegnanti, degli allievi o dei genitori su ciò che conviene fare per insegnare, per apprendere e per comprendere i saperi in gioco, costituisce una epistemologia pratica che è impossibile ignorare ed eliminare.

Il tentativo di motivare gli studenti attraendoli con problemi concreti legati ai numeri irrazionali si può scontrare, almeno secondo un'analisi a priori, con la natura tutt'altro che concreta del problema degli irrazionali. Nonostante questo la maggior parte degli insegnanti intervistati ha affermato che partire da un problema concreto relativo alla misura della diagonale del quadrato può aiutare gli studenti a comprendere i numeri reali, a crearsi buone immagini dei numeri reali e così via.

3. Il problema presentato agli insegnanti: un filo lungo $\sqrt{2}$ km

A 115 docenti di Matematica della scuola secondaria di secondo grado sono stati presentati in un questionario online alcuni spunti didattici in forma multimediale (video) e sono stati chiesti alcuni pareri sull'efficacia didattica di tali proposte.
Una delle proposte didattiche presentate è stata proprio la presentazione in contesto reale dei numeri irrazionali a partire dalla costruzione della diagonale di un quadrato di lato 1 km.
Fin dall'inizio il problema presentato veniva contestualizzato in una situazione di vita reale: un ragazzo vuole recintare un giardino di forma quadrata che ha il lato che misura quanto la diagonale di un quadrato di lato 1 km. Il quadrato era rappresentato attraverso un cartoncino, appoggiato su una retta orientata su cui è indicata una unità di misura.

Il segmento corrispondente alla diagonale del quadrato era proiettato su una retta orientata, che viene chiamata “retta dei numeri reali”, attraverso l’uso di un compasso centrato nell’estremo sinistro del segmento, che veniva fatto coincidere anche con lo 0.
Il video proseguiva con la rappresentazione dell’equivalenza tra la superficie coperta da due quadrati di lato 1 km e il quadrato che ha per lato la diagonale del quadrato iniziale.
Il lato del recinto di forma quadrata era denominato “un filo lungo $\sqrt{2}$ km”.
In seguito si mostravano alcune approssimazioni progressive della misura del lato di tale quadrato e si osservava che il valore dell’area si avvicina progressivamente a 2.
A questo punto, prendendo in considerazione nuovamente il contesto iniziale, veniva calcolato l’errore che si compie ogni volta che si rinuncia alla precisione del numero “esatto” e si mostrava come, avvicinandosi sempre di più al numero, i metri di rete sprecati diminuissero.
A questo punto si chiedeva quando potesse terminare questo processo di approssimazione e si mostrava l’impossibilità di terminare questo processo, con la precisazione relativa al fatto che per ottenere l’approssimazione esatta servirebbero infinite cifre.
Il materiale proposto è stato selezionato all’interno di un elenco di video presenti su YouTube relativi all’introduzione dei numeri reali o a loro proprietà o a problemi che avessero come soluzioni insiemi di numeri reali.
Per la ricerca complessiva sono stati scelti altri due video, uno relativo alla corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta realizzato attraverso uno *slider* in movimento e uno relativo a una spiegazione molto classica relativa a un metodo risolutivo per le disequazioni e alla rappresentazione dell’insieme delle soluzioni. I video sono stati selezionati in base a criteri analoghi, di modo che le risposte fossero confrontabili attraverso parametri comuni.
In tutti i casi sono stati scelti video che presentavano proposte didattiche che potessero ricordare agli insegnanti pratiche didattiche messe in campo nella scuola italiana e che fossero significative rispetto a qualche problema presente nella storia dei numeri reali. Un ulteriore criterio di scelta è stato formulato a partire da un’analisi della letteratura di ricerca sia relativa all’apprendimento dei numeri reali, sia relativa a teorie più generali sull’insegnamento-apprendimento della matematica. In questa direzione sono stati selezionati materiali audiovisivi che includessero scelte di rappresentazione, anche verbale, e scelte di pratiche didattiche che fossero in qualche misura problematiche e tali da suscitare negli insegnanti reazioni che permettessero di raccogliere informazioni relative a obiettivi, conoscenze e convinzioni rispetto alla proposta didattica.
Mentre sui video relativi rispettivamente alla corrispondenza sui numeri reali e i punti della retta e alle disequazioni le opinioni si sono diversificate e tra i

commenti dei docenti si trovano anche posizioni radicalmente opposte, il video relativo all'introduzione del problema della misura della diagonale del quadrato ha raccolto quasi l'unanimità dei consensi.
Nei confronti del video si è riscontrato un gradimento alquanto superiore rispetto a quello che si poteva ipotizzare, dal momento che in esso i nodi cruciali affrontati in modo poco problematico e superficiale e i piani del discorso si confondevano senza attenzione alle criticità.

4. Misura e continuità: un problema "reale"?

Come si è anticipato, ci sono diverse criticità che emergono nel video, rispetto alle quali un insegnante potrebbe prendere posizione. Ne prenderò in esame una, di natura epistemologica, anche se la complessità del problema dal punto di vista didattico è ben superiore e richiede un'analisi molto raffinata.
Parto dalla contestualizzazione del problema nel caso reale. Per farlo parto proprio dal significato dell'aggettivo "reale" usato per caratterizzare questi numeri, che può creare ambiguità.
C'è infatti differenza tra la concezione di problema reale, ovvero problema di modellizzazione matematica di un problema riguardante la vita reale, e l'aggettivo "reale" usato per la prima volta da Cartesio in contrapposizione all'aggettivo "immaginario", usato nell'insieme dei numeri complessi.
Alcune ambiguità potrebbero essere generate anche solo dal titolo del video: *Numeri irrazionali: vediamoli nella realtà!*. Il problema che soggiace a questa sovrapposizione tra problema pratico in contesto reale e numero reale è legato al concetto di misura, a sua volta suscettibile di interpretazioni diverse all'interno di contesti differenti. Infatti a rendere "reale" il problema presentato sono in questo contesto gli oggetti coinvolti (il giardino, il recinto, il ragazzo, la rete, …) e la situazione descritta (recintare, acquistare la rete, risparmiare denaro, …), ma la concretizzazione degli oggetti pone di fronte a un bivio tra il problema matematico della misura (inteso nel senso della teoria della misura) e l'azione concreta del misurare.
Per comprendere quanto cruciale sia questo tema e quanto poco ovvio sia scegliere l'una o l'altra prospettiva sul problema riportiamo un estratto da *L'immagine del mondo* di Erwin Schröedinger, uno dei padri della meccanica quantistica:

> Io prendo come punto di partenza la tesi seguente: ogni osservazione quantitativa eseguita a scopo di misurazione è, per sua natura, discontinua. Vediamo di chiarire ciò col più semplice degli esempi, la misurazione delle lunghezze. Ammettiamo di misurare una distanza con un regolo suddiviso in millimetri. Troviamo 23 mm o 24 o 25. Il nostro apparato non ci consente un risultato intermedio. Ma forse possiamo valutare i decimi di millimetro. O, meglio ancora, usiamo un nonio. Allora troveremo 23,6 o 23,7 o 23,8 mm. Fra mezzo non c'è niente. Con una certa pratica si possono valutare le mezze suddivisioni del nonio. Ma anche allora è possibile ottenere solo la serie discreta di misure: 23,6, 23,65, 23,7, 23,75 eccetera. E cosi possiamo spingere la precisione tanto lontano quanto

> vogliamo: però è possibile sempre solo una serie discreta di risultati, serie fissata fin da principio dalla qualità dello strumento di misura […]. La materia prima della nostra conoscenza quantitativa della natura ha dunque sempre questo carattere decisamente primitivo, discontinuo. Noi non ne siamo soddisfatti. Lo completiamo ricorrendo essenzialmente all'interpolazione, […] interpoliamo i punti intermedi e arriviamo cosi al concetto della traiettoria percorsa con continuità. Quest'ultima non è il risultato di un'osservazione quantitativa immediata. Con che diritto interpoliamo? […] L'interpolazione ha un senso ed è legittima sempre quando, e solo quando, le misurazioni in un certo numero di punti intermedi possono essere ritenute eseguibili, in linea di massima. (Schröedinger, 1931)

Può sembrare azzardato il confronto, ma ci sono elementi comuni tra il tema di riflessione proposto da Schröedinger e quello affrontato nel video. Uno studente di scuola secondaria non deve necessariamente porsi il problema di descrivere la realtà nella sua intima essenza, né deve diventare un raffinato conoscitore del problema della formalizzazione dei numeri reali. Ciò che è però inappropriato è confondere i due mondi, i due problemi, e, in definitiva, le due logiche e i due concetti che emergono nelle due diverse prospettive. I numeri decimali periodici e non periodici non sono misure in senso fisico, né sono a maggior ragione misure concrete che si possono effettuare andando a comprare una rete per recintare un cortile!

Per acquisire competenza di modellizzazione è necessario imparare ad operare una distinzione consapevole tra ciò che è concreto, ciò che è percepito, ciò che è misurato nella realtà e i modelli, supposti continui, di cui gli insegnanti di matematica, soprattutto nella scuola secondaria, fanno uso in modo quasi esclusivo.

Per tale ragione il tentativo di motivare attraverso l'uso di esempi concreti, già commentato da diversi ricercatori nell'ambito dei rapporti tra epistemologia e matematica e tra semiotica e matematica, sembra quantomai critico in questo caso, specialmente in una prospettiva a lungo termine che tenga conto della concezione che gli studenti maturano, talvolta implicitamente, attraverso gli esempi e i problemi che l'insegnante propone.

Bibliografia

Brousseau, G. (2008). L'epistemologia scolastica spontanea e la cultura dei problemi matematici. *La matematica e la sua didattica*, *22*(2), 165–183.

D'Amore, B. (2008). Falso dilemma. *Vita Scolastica*, *63*(4), 16–18. ISSN: 0042-7349.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2009). Il ruolo dell'epistemololgia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *32B*(2), 171–192.

Rittaud, B. (2010). *La favolosa storia della radice quadrata di due.* Torino: Bollati Boringheri.

Schrödinger, E. (1931). *L'immagine del mondo.* Torino: Bollati Boringhieri, trad. it. 2001.

Hommage à Bruno D'Amore

Guy Brousseau
Professore emerito
IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maitres) d'Aquitaine
Bordeaux, Francia

Abstract. *In these few lines I face a tremendously difficult task: to summarize the traits of the eclectic personality of Bruno D'Amore, friend and colleague of extraordinary fruitfulness and depth, comparable to those of the Italian Renaissance geniuses.*

La personnalité de Bruno D'Amore est si riche en facettes si diverses et étonnantes que personne, je crois, ne peut lui rendre un hommage satisfaisant.
Ce qui surprend d'abord, c'est son extraordinaire fécondité d'auteur et d'éditeur. Et c'est aussi la variété des domaines qu'il aborde en scientifique et qu'il conjugue d'une façon très personnelle pour éclairer, instruire et ravir ses lecteurs.
Tous ceux qui l'ont approché ont pu apprécier parmi ses qualités, la pénétration de ses opinions, l'étendue de sa culture, la variété et l'élégance de ses très nombreuses publications, la vigueur de ses efforts en faveur de la diffusion des connaissances mathématiques et didactiques en direction des enseignants …
Pour ma part, je n'ai pas vraiment connu le mathématicien, le professeur, l'animateur, … mais seulement un peu l'auteur, le co-auteur, surtout le « passeur » … et enfin l'indéfectible ami qui n'a cessé de me surprendre et de me charmer.
J'ai beaucoup apprécié plusieurs de ses « Rencontres avec la Mathématique », à Castel San Pietro avec ses étudiants, les enseignants et les formateurs. Son discours y trouve un exact équilibre entre la valeur scientifique des apports et l'intérêt qu'ils pouvaient présenter pour son auditoire – fait de professeurs et de chercheurs – et à travers eux pour leurs élèves. Il y révélait son intérêt universel, son attention soutenue … et aussi, ce qui est plus rare, il n'y négligeait pas les réserves et les avertissements que la didactique scientifique est bien obligée d'opposer aux enthousiasmes prématurés.
J'ai apprécié l'interlocuteur scientifique, le co-auteur de quelques textes ou ouvrages et j'ai eu la chance de profiter de son efficacité dans ses traductions …
Dans toutes ses œuvres, Bruno D'Amore, auteur prolifique et habile, a l'originalité de s'y révéler à la fois un scientifique moderne, un pédagogue avisé et un amateur d'art. Nombre de ses ouvrages sont agrémentés de

références et d'illustrations artistiques et littéraires élégantes et opportunes … Elles sont un effet de son amour pour les œuvres d'art qu'il collectionne avec discernement. Il a l'éclectisme et le charme de l'homme de la renaissance italienne …
Ma rencontre avec Bruno a été pour moi un événement bénéfique. Il m'a invité à écrire à nouveau pour des enseignants et pour des formateurs, en oubliant un peu mes craintes de voir nos lecteurs adopter nos textes comme des exemples pour leur travail. La Science Didactique est trop jeune pour assumer la responsabilité des interprétations que la culture professionnelle actuelle inspirerait aux acteurs, enseignants et conseillers, mais ce n'est pas une raison pour s'abstenir de la diffuser. Bruno sait relativiser, accepter et dépasser les contradictions qui apparaissent du fait des évolutions divergentes de la Science Didactique, de la formation des professeurs et de l'enseignement lui-même.
Comme un savant de la Renaissance, Bruno D'Amore cultive les Arts, la Science et les techniques, et il en fait part à ses contemporains.

Matematica e difficoltà

Andrea Canevaro
Professore emerito
Alma Mater Studiorum, Università di Bologna

Sunto. *La matematica nasce e vive nel linguaggio. Come la parola, diventa mediatore simbolico, e come tale si collega a un percorso di mediatori concreti, che permettono di proporre una logica e di permettere un controllo. E su questa struttura, anche un errore può essere fecondo. Nella storia, le vicende del "ragazzo selvaggio", a cavallo del XVIII e del XIX secolo, in Francia, hanno mostrato una prospettiva e in un percorso. Il percorso significa: regolare una organizzazione di informazioni perché diventi significativa in una finalità. La pluralità di informazioni è educazione cooperativa, da Claparède a Freire, a … Bruno D'Amore.*

Résumé. *Les Mathématiques sont nés et vivent dans la langue. Comme le mot, deviennent médiateurs symboliques, qui se connecte à un chemin de béton, qui permettent de proposer une logique, pour rendre possible une vérification. Et sur cette propriété, une erreur peut être fructueuse. Dans l'histoire, l'histoire du « sauvage », au tournant du 18e et 19e siècles, en France, a montré une perspective et un chemin d'accès. Le chemin signifie : régler une dénonciation organisateur afin qu'il devienne significatif dans une finalité. La pluralité de l'information est l'éducation coopérative, de Claparède à Freire, à … Bruno D'Amore.*

1. Chi nasce entra nel mondo trova il linguaggio, ovvero la lingua "materna". Trova anche la "matematica materna"?

La lingua si impara dalla nascita, entrando in un mondo che parla. Chi nasce ascolta, percepisce, emette dei suoni, imita ciò che sente, e le lallazioni diventano un richiamo che chi è accanto riconosce come parola. Inizia un processo, che può portare a parlare. È la "lingua materna". I problemi sono rappresentati dalla differenza fra tale espressione linguistica e la lingua "ufficiale" di una comunità allargata. O possono essere rappresentati da particolari problemi, dalla sordità all'afasia all'autismo. Ma una grande maggioranza di persone ritiene che la lingua sia un percorso "naturale", e che l'insegnamento linguistico possa procedere da quella base sostanziale.
Per la matematica, è probabile che la stessa ampia maggioranza abbia altre convinzioni.
L'idea diffusa è che la matematica sia "trasmessa" interamente. Al più, vi sono convinzioni molto radicate che alcuni bambini e alcune bambine siano portati naturalmente alla matematica ("abbiano il bernoccolo della matematica").
Queste convinzioni naturalistiche condizionano fortemente le percezioni delle difficoltà, e quindi i modi di affrontarle. È noto che i soggetti con sindrome di

Down erano ritenuti “naturalmente” incapaci di far funzionare il pensiero matematico. Si diceva che ne erano privi, sostenendo che non sapevano andare oltre i numeri a una cifra, ed erano privi di pensiero astratto. Per molti, matematica e pensiero astratto erano legati da un’unica sorte.
Qualcosa dunque è cambiato. Ma crediamo che non tutte le conseguenze di questo cambiamento siano state “coscentizzate” da chi ha compiti educativi in ruoli sociali (famigliari) e professionali (insegnanti ed educatori sociali, ed anche psicologi ed altre professioni “d’aiuto”).
Il testo di Bruno D’Amore, Martha Isabel Fandiño Pinella, Ines Marazzani e Silvia Sbaragli (2008), affrontando il tema delle difficoltà, può aiutare a capire meglio un assunto importante: veniamo al mondo e troviamo la lingua e la matematica; e sono più connesse di quanto si creda, unite da un processo culturale e fisiologico che ha una strutturazione storica complessa e affascinante. Tiene insieme dimensioni “micro” e “macro”: l’individuo, con le sue caratteristiche specifiche e originali, i suoi limiti sia ordinari che, in qualche caso, speciali; e il periodo ampio che chiamiamo “era”. E, ed è questo il fascino, le due dimensioni si influenzano reciprocamente e quindi non possono essere rappresentare come una dentro l’altra. Per questo parliamo di strutturazione complessa.
Si pensi ai soggetti già citati con sindrome di Down. Ma aggiungiamo gli individui con lesione cerebrale: non molti anni sono passati dalla convinzione diffusa (presente ancora, e in individui la cui preparazione culturale rende quasi incredibile la permanenza di tale convinzione) che la lesione, colpendo il linguaggio, renda impossibile il pensiero. Le tecnologie, e non solo, hanno reso possibile scoprire l’inattendibilità di tale convinzione. E crediamo che queste dimensioni “micro” influenzino la dimensione “macro” in cui sembra che dobbiamo solo essere immersi.
Chi cresce deve compiere esplorazioni in molti modi, non solo con la propria esperienza diretta, ma attraverso processi deduttivi ed induttivi, composizioni di dati osservati o ipotizzati. E deve continuamente adattare ciò che ha ordinato nella propria memoria. È un processo di crescita mai uniforme e mai identico. Comincia dall’inizio della vita, e la scuola ha un grande compito: far passare un processo naturalistico individuale in una strutturazione allargata e codificata capace di immettere in una potenzialità ampia e in continuo divenire.
Questo passaggio è delicato. Possono nascere difficoltà, alle quali si possono aggiungere le difficoltà nel riconoscimento delle difficoltà. Sembra un paradosso, e in parte lo è.
Le difficoltà possono essere affrontate a partire da alcune “credenze”:
– ritenere che le attitudini (l’intelligenza) siano dati innati, e che la proposta didattica possa spostare di poco, o niente, gli esiti della dotazione;

– ritenere che vi siano processi di apprendimento nel segno della continuità (dalla “lingua materna” all’educazione linguistica), ed altri nel segno della più netta discontinuità (la matematica);
– ritenere che chi ha difficoltà previste da una diagnosi di tipo sanitario debba avere una strada a cui sono stati tolti gli ostacoli (un percorso facilitato), in una previsione di apprendimenti meno impegnativi;
– ritenere che chi dimostra di avere difficoltà accompagnate da una diagnosi di tipo sanitario, debba esercitarsi e allenare la propria volontà, ripetendo esercizi secondo un modello ritenuto normale.

A queste “credenze” possiamo contrapporre altrettante ipotesi di lavoro:
i processi di apprendimento vivono un intreccio di aspetti informali e formali che riguardano tutti i campi del sapere e le diverse discipline;
la continuità e la discontinuità sono sempre necessarie, e devono giocare in un intreccio costruttivo dinamico e variato;
la resistenza all’apprendimento è parte integrante dell’apprendimento, e toglierla di mezzo per facilitare un soggetto con particolari difficoltà può essere un modo per accrescerne le difficoltà (si pensi a chi ha problemi di dislessia o discalculia, e viene incitato ad esercitarsi … Un sadismo certamente non voluto e frutto di ignoranza del problema);
tutti i soggetti possono essere aiutati a cercare la propria strategia di apprendimento. La pluralità di strategie può accompagnare una prospettiva unitaria.

2. Il linguaggio e la matematica sono un unico processo

Gli studiosi dell’origine del linguaggio negli umani hanno trovato un punto centrale nelle loro ricerche nella domanda: “Quale rapporto è possibile stabilire fra l’utilizzazione di un linguaggio codificato e la nascita di strumenti e utensili e quindi di tecniche?” Questa domanda rende possibile la formulazione di ipotesi che evitino lo sviluppo incontrollabile di fantasie suggestive.

Consideriamo tali le idee espresse da chi, basandosi su limiti anatomici dell’*homo erectus* per la produzione del linguaggio ha ritenuto che dovesse esserci stato uno stadio di tipo gestuale, precedente all’orale. Queste considerazioni, oltre a non essere controllabili, sembrano poco credibili per due ordini di fattori:
– il primo riguarda la distinzione fra linguaggio e comunicazione;
– il secondo riguarda la necessità che vi siano condizioni anatomo-fisiologiche perché si sviluppi in codice linguistico gestuale; e tali condizioni sono le stesse necessarie per un codice linguistico orale

Non sembra ipotizzabile quindi una prima organizzazione fisiologica che permetta il codice gestuale e che preceda, come apripista perché arrivi il codice linguistico orale. Le due possibilità sono basate su una stessa organizzazione fisiologica.

La distinzione fra linguaggio e comunicazione non è sempre molto chiara in chi ritiene che il linguaggio non verbale comprenda la gestualità mimica spontanea: le posture, le reazioni di gioia, di dolore, di rabbia, l'espressione di disgusto, di golosità per i cibi e le bevande, tante altre manifestazioni. Chi parla di linguaggio del corpo utilizza un'espressione che richiama l'attenzione, ma che è carica di ambiguità e di travisamenti. Il più delle volte non è linguaggio. È comunicazione. A meno che non si parli di un linguaggio codificato come ad esempio la Lingua Italiana dei Segni, o LIS.
Vi può essere una comunicazione con una codifica circoscritta a chi vive con un soggetto che non ha accesso ad un linguaggio. Viene trattenuto nella memoria il significato di alcune espressioni con un loro segno convenzionato ristretto a due. La convenzione allargata ha bisogno di una codifica che permetta l'apprendimento del codice e non esclusivamente la sua produzione spontanea. Non possiamo illuderci o illudere che la produzione spontanea di un modo di esprimersi sia linguaggio. È piuttosto comunicazione.
Non tutto ciò che è comunicazione è dunque linguaggio. Il linguaggio ha una sua strutturazione complessa, permette una codifica simbolica e quindi una trasposizione nel tempo e nello spazio. Chi pensa che il linguaggio non orale, come appunto la già richiamata LIS, abbia una struttura debole perché circoscritta alle possibilità di visualizzazione deve riconsiderare queste sue idee. Anche il linguaggio orale si appoggia su un intreccio di evocazioni di elementi non presenti e di altri presenti ed è quindi sottoposto ai limiti spaziali in presenza.
Non vi è dunque un rapporto da debole a forte: entrambe hanno loro limiti senso-percettivi. La strutturazione complessa non promette di abbattere tali limiti. Vuole prenderli in considerazione, tenerne conto e permetterne una dimensione organizzativa.
Linguaggio e matematica – ovvero osservazione, studio, calcolo, ipotesi progettuale, adattamento nella realizzazione … si incontrano a Terra Amata, vicino a Nizza. È il luogo dove un'équipe di archeologi ha ritrovato un'abitazione preistorica di circa 380.000 anni orsono. È una strutturazione ovale di 6 metri di lunghezza e di 4 metri di larghezza: un'abitazione che permetteva un domicilio di più persone e che è stata attribuita agli ultimi rappresentanti dell'*homo erectus*.
Costruire un'abitazione di questo tipo voleva dire avere un gruppo di costruttori capaci di collaborare avendo delle tecniche e un linguaggio orale che permettesse la loro utilizzazione tra soggetti diversi. Questa è una delle condizioni che fa collegare la cooperazione alla strutturazione di conoscenze per potersi organizzare. Una società complessa mette insieme le risorse ma mette insieme anche i limiti e le debolezze individuali. Si organizza con un linguaggio orale che però non ha la forza di superare i limiti spaziali; ma ha la forza di organizzarsi per tenerne conto. Deve calcolare, i materiali, le forze, il

tempo … Anche le tecniche non sono in grado di superare ogni limite: devono organizzarsi in uno studio per tenerne conto.
Come si fa a fare questo? Lo si fa lavorando a partire dal fatto che ciascuno dei collaboratori, o cooperatori, ha dei limiti e di conseguenza ha bisogno di avere dei mediatori linguistici in un'ipotesi matematica per permettere di comunicare e organizzare. *Abbiamo bisogno di mediatori.*
Il gruppo che costruì l'abitazione di tanti, tanti secoli fa aveva dei mediatori che non erano certamente le parole che usava ma anche gli oggetti, gli attrezzi, la possibilità di riferirsi ad un contesto in cui trovava utile utilizzare certi materiali: il legno, le pietre, l'argilla. Erano mediatori che permettevano adattamenti e metamorfosi; permettevano quello che i linguisti potrebbero chiamare per le parole la polisemia e che, per l'esempio citato, potrebbe essere la polifunzionalità, degli oggetti e anche dei calcoli: la trasformazione di una funzione in un'altra secondo il progetto. Permette di individuare la funzione giusta per il posto giusto nel progetto.
Costruire dei mediatori è certamente possibile in un piccolo gruppo. Ma è necessario e forse indispensabile in una società complessa che deve avere *un progetto culturale e sociale (politico, dunque) in cui i mediatori vengano organizzati*, non siano degli elementi-sorpresa, che si costruiscono a seconda delle spinte spontanee. Costruiamo un progetto in cui il ruolo dei mediatori organizzati sia un elemento importante e permetta lo sviluppo delle prospettive inclusive che diano qualità di percorsi e che permettano di superare l'idea che vi siano dei destini segnati dal fatto di nascere disabile o di essere raggiunti dalla disabilità; o di essere problematico, trovandosi sempre di fronte a difficoltà.
Non destini segnati ma possibilità di cambiare la rotta. Questo è possibile con mediatori competenti. Derivata ed è derivabile dalla possibilità che i mediatori non siano sottoposti alla logica dell'emergenza né improvvisati ma abbiano la continuità di un'organizzazione stabile, raccogliendo la sfida delle "buone prassi". In questo senso, il contributo del libro è fondamentale: aiuta a *precarizzare l'handicap con la stabilità dinamica (incremento continuo) delle competenze in un progetto*. Può accadere, e accade, il contrario: la precarizzazione delle competenze stabilizzando o incrementando gli handicap, le difficoltà.
La qualità della prospettiva inclusiva è legata alla capacità di produrre un progetto credibile per tutti.

3. Calcolo delle disabilità e delle difficoltà

Dovrebbero sapere in molti che le cifre della disabilità sono più dense in alcune parti del mondo e le cifre delle risorse non coincidono con le zone in cui vi sono i grandi numeri relativi ai soggetti disabili. Le risorse, le ricchezze, le possibilità di utilizzo di sistemi complessi e dotati di tecnologie si concentrano in alcune parti del mondo, più "leggere" sul piano dei numeri

delle disabilità. In altre parti del mondo i disabili – uomini e donne, bambini e bambine – sono molto più numerosi e i numeri cresceranno. Le previsioni vanno nel senso che mentre in una parte del mondo vi è un relativo assestamento dei numeri in altre parti vi sono delle crescite rilevanti.
Naturalmente ci si può domandare se i numeri bassi sono il prodotto della presenza di risorse alte. E ci si può porre al domanda opposta: i numeri elevati e in crescita, sono il frutto della concentrazione delle risorse?
Nel 2000, su 6 miliardi di abitanti della Terra, 2,7 miliardi di persone vivevano sotto la soglia della povertà, e fra queste, 1,3 miliardi definite come "estremamente povere", non disponendo di un dollaro al giorno..
Nel frattempo, le spese militari nel mondo sono arrivate, nel 2004, a 1.040 miliardi di dollari, e di questi 455 miliardi sono spesi dagli Stati Uniti.
Il mondo è certamente cambiato rispetto a quello che si poteva raffigurare cinquanta anni fa circa. Nel 1950 vi erano 2 miliardi e mezzo di abitanti in tutto il mondo. Oggi, 2005, siamo fra i 6 e i 7 miliardi, e diventeremo 7 miliardi in poco tempo. Questa crescita ha cambiato la fisionomia del mondo. Se esaminiamo i cambiamenti per aree geografiche, scopriamo elementi molto interessanti ma anche preoccupanti. Se in alcune aree geografiche la riduzione del numero delle nascite per madre si è verificata in tempi lunghi – in aree europee arrivare all'1,5% di nascite per madre ha voluto dire percorrere una gradualità di un secolo e mezzo – , in altre parti del mondo lo stesso lo stesso risultato è stato ottenuto o sta per essere ottenuto al termine di un decennio. È il caso della Cina, ad esempio.
Questo è un elemento che solitamente – ed è così anche in queste nostre considerazioni – si correla con l'aumento della longevità e quindi con la presenza nella stessa area geografica di una popolazione più anziana. Avere un maggior numero di anziani è un fatto certamente positivo, e segnala qualcosa relativamente alla qualità della vita. Ma se avviene con una gradualità che percorre l'arco di un secolo e mezzo, ha una possibilità di essere percepito altrettanto gradualmente, e di essere accompagnato da cambiamenti complementari con tempi di adattamento sopportabili; mentre se avviene in un arco di dieci anni riesce difficilmente riesce ad avere adattamenti assorbibili. Sbalordisce e sorprende anche le più previdenti delle popolazioni.
Queste situazioni hanno una connessione con la disabilità. Ed è importante che le maggiori fonti delle istituzioni internazionali – le Nazioni Unite, l'Organizzazione Mondiale della Sanità – e le azioni delle agenzie collegate ad esse si siano rese conto di una necessità di cambiamenti concettuali da cui possono derivare dei cambiamenti di comportamento, di prassi professionali, di relazioni d'aiuto. Le Nazioni Unite hanno certamente un compito maggiormente legato all'affermazione dei diritti. All'interno delle Nazioni Unite è presente una corrente di pensiero autorevole che sembra far propria – anche senza fare riferimento a questo – una certa idea di Canetti. Elias Canetti (2004, pp. 565 e ss.) ha spesso ragionato sul pericolo che rappresenta l'essenza

di un certo modo di vivere la società riassunto nella *"costrizione a superare"*, con l'esaltazione del sopravvissuto, che ha superato tutti. Nella nostra società, bisogna sempre ottenere un superamento, che ovviamente crea dei *superati*, dei *rifiuti*, come suggerisce Bauman (2005, 2004). E bisogna eliminare i rifiuti, gli scarti: le *vite di scarto* di tutti coloro che sono superati o che si oppongono al superamento inteso come crescita.

Le Nazioni Unite, nelle loro menti più illuminate, si stanno orientando, come testimoniano alcuni documenti, all'idea che bisogna avere dei limiti, che il superamento non può essere una parola da mettere sempre al centro di ogni logica e che la crescita deve essere fatta in termini compatibili con le risorse. Questo elemento è di grande importanza ma è difficile tradurlo nelle riorganizzazioni dei comportamenti quotidiani. Lo *sviluppo compatibile* indica una prospettiva non sempre chiara. Può essere chiarita se messa in relazione con le pratiche di *negoziazione*. "Voglio chiarire subito che sviluppo sostenibile indica fondamentalmente un processo di *consensus building*, di costruzione del consenso; cioè: nessuno ci può dire tecnicamente che cos'è 'sviluppo sostenibile'; il contenuto è sempre e necessariamente il risultato di un processo di negoziazione. Ho notato che in Italia spesso il concetto di negoziazione ha un uso limitato: è l'ultima fase di una trattativa di patteggiamento, in cui in qualche modo si va a una spartizione: tu prendi questo, io prendo questo altro. Nel *mutual gains approach*, nel *consensus building* è invece l'intero processo a essere inteso come negoziazione. La negoziazione comincia quindi con la preparazione, con l'analisi degli interessi; non è affatto solo l'ultima fase in cui si divide la torta. La negoziazione allora è un concetto molto più ampio; praticamente ogni comunicazione in cui ci sono degli interessi in gioco inizia a essere una negoziazione" Ida Koppen (2003) è vice presidente della Sustainability Challange Fondation.

Scopriamo il malinteso delle *buone prassi*. Di buone prassi si può parlare quando si ha un'organizzazione adatta non solo ad accogliere ma anche a far vivere le differenze: di genere, di cultura, di status, di funzionalità e quindi di abilità e disabilità, di età.

Le buone prassi riguardano tutte queste differenze e la buona prassi è una buona organizzazione che permetta percorsi e progetti di vita per, nelle e per le differenze. Deve permettere di non sentirsi con un destino segnato e immutabile.

Questo è un elemento importante e questo finisce per essere uno dei punti su cui la cattiva interpretazione crea dei paradossi drammatici. Le Nazioni Unite giustamente insistono su diritti di cittadinanza per tutti. Dagli organismi internazionali – che non sono senza macchie e senza colpe, ma che rappresentano punti di speranza – nascono richiami importanti ad affrontare, sul piano culturale e nell'azione politica, le negazioni dei diritti e le loro cause. Le Nazioni Unite a loro volta hanno bisogno di essere rinforzate in una visione di natura etica e politica mondiale che veda la possibilità di affermare il

principio del dialogo e di avere delle strutture che lo rendano una pratica consueta.
E accanto alla Nazioni Unite poniamo l'Organizzazione Mondiale della Sanità. Ricordiamo la prospettiva che ha ritenuto impellente per l'OMS rivedere la classificazione internazionale delle disabilità e cambiarne la fisionomia – parliamo dell'I.C.F. o Classificazione Internazionale del Funzionamento, della Disabilità e della Salute. Il 'funzionamento' è il collegamento inevitabile ai contesti: noi funzioniamo in relazione ad una pluralità di contesti e grazie ad una libertà di movimento nei contesti. Questo corrisponde ad un'affermazione di diritto alla cittadinanza attiva e ad altri già valori richiamati.
L'I.C.F. incoraggia a prendere in considerazione non più e solo i soggetti con diagnosi di tipo medico, ma a rivolgere attenzione ai soggetti con Bisogni Educativi Speciali. E il calcolo dei soggetti con difficoltà aumenta, se esaminiamo le condizioni e i numeri di chi cambia paese e cultura, per uscire dalle guerre, dalla fame, o per conquistarsi un futuro diverso. Certamente rischia di trovarsi in un contesto dove deve ricostruire legami e alleanze con cose e persone. È possibile che si trovi ad affrontare quelle che i nostri Autori indicano come "difficoltà di gestire le diverse rappresentazioni semiotiche". È ben detto e, nel testo, ben spiegato, con ipotesi e sperimentazioni per superarne l'esito deprimente.

4. Una scuola plurale e su misura

Edouard Claparède, in un testo la cui prima stesura risale al 1923, rivisitato a ampliato nel 1933, ragionava sulla possibilità della costruzione di una scuola su misura. La sua riflessione partiva da un quadro storico che, per quanto riguarda l'Europa e in particolare l'area francofona, vedeva la metà dell'800 come il momento in cui si cominciava ad interessarsi a quei bambini considerati ritardati e anormali, scoperti nella popolazione scolastica e collocati nei ricoveri.
Scopriva che l'estensione della scolarità acquisiva alla scuola dei soggetti con caratteristiche particolari, che furono collocati in classi speciali sia per dar loro un insegnamento appropriato sia perché costituivano per l'insieme della classe normale un *impedimentum* – Claparède lo scrive con un termine latino che nobilita e rende forse più attento il lettore – definito molto imbarazzante.
Procedendo, lo studioso si rende conto che le differenze non erano esclusivamente di tipo quantitativo, derivabile dall'idea che ci sia una piena normalità e un'altra minore, ma vi erano differenze qualitative. Oggi tradurremmo questo termine anche con aspetti legati alle differenze di approccio socioculturale all'apprendimento e quindi alla scuola.
La scuola ha il limite, individuato da Claparède, di voler sempre gerarchizzare le differenze. Siccome invece di differenziare gerarchizza, Claparède implicitamente critica il sistema falsamente differenziale perché lo vede

soprattutto una classificazione gerarchizzata delle differenze. Ritiene che sarebbe necessario sostituire alla pedagogia a una dimensione una pedagogia a due dimensioni. Ha in mente la *scuola su misura* capace di svilupparsi nella direzione delle *attitudini personali di ogni bambino*.
Questo è il sogno che ha riguardato e riguarda molti educatori e molte educatrici. L'elemento '*attitudini personali*' diventa importante: strategico per orientare lo sviluppo, la valorizzazione di ogni bambino, di ogni bambina. Le attitudini così individuate hanno un carattere individuale e quindi differenziale ma non gerarchizzato, secondo Claparède. Le attitudini non vanno considerate come competenze di base – il comunicare, il parlare la lingua materna – ma investono quello che verrà dopo.
Claparède rimanda a un'epoca in cui il tema culturale non era percepito come lo percepiamo noi oggi. Non vi era l'evidenza di culture che oggi potremmo malamente definire etniche ma di culture sociali: la cultura del contadino e del mondo contadino e quella del cittadino e del mondo cittadino.
Sia Binet – contemporaneo e predecessore di Claparède – sia Claparède fanno riferimento a queste differenze culturali e ritengono però che non siano tali da dovere intaccare la base comune del comunicare e del parlare la lingua materna. Oggi avremmo qualche problema in questo senso: avremmo bisogno di considerare come il parlare la lingua materna per qualcuno possa diventare rimanere prigioniero di una sua origine che forse vorrebbe tenere come una base da cui non prescindere ma che vorrebbe completare e connettere a nuove lingue, del mondo che ospita, con tutte le possibili complicazioni ma anche arricchimenti.
Scuola su misura: il sogno di una certa cultura attiva. Rimasto tale? Svegliandoci abbiamo forse detto: "non se ne parla più! È un sogno, e la realtà è altro …?".
Qualcuno ha ripresto il sogno per farne un progetto che va dal tempo pieno scolastico alla prospettiva inclusiva, passando attraverso la scuola pubblica per tutti e unitaria.
Qualche altro lo ha trasformato in una idea – non è condivisibile – relativa ad una scuola su misura in cui ciascuno si serve come sa e può. L'abbiamo chiamata più volte una scuola 'self service': una scuola a passo variabile che permetta a ciascuno di connettersi a ciò che sa, vuole, può fare, e investa, anche indebitandosi (è incoraggiato a farlo …), per poter sviluppare o investire di più, forse per poter ripagare il debito.
La possibilità che diventi immediatamente un'impresa commerciale e un oggetto di vendita trasforma il conoscere e l'apprendere in elementi di un mercato. È un rischio per la conferma di vecchie disuguaglianze o per crearne di nuove.
Accanto a questa modalità di pensare la scuola su misura (d'acquisto) ve ne sono state altre pensate per questi periodi di trasformazione.

Un'idea dell'educazione e della scuola si caratterizza con la *dimensione dialogica*: più della preoccupazione di rivedere l'architettura istituzionale, l'attenzione principale va posta alla qualità professionale. Questa richiede una capacità da parte degli adulti educatori e insegnanti di avere un progetto culturale fondato sulla dialogicità: collegarsi a più fonti, valorizzare le attitudini all'interno di un modello che il docente struttura e sa organizzare. Sa costruire insieme al gruppo-classe gli strumenti per controllare il percorso e le procedure di apprendimento. Philippe Meirieu (2004) utilizza la formula di *scuola e formazione plurali*, indicando la capacità di valorizzare il gruppo come composto da differenze, e realizzare una didattica che si rifà in grande parte alla *cooperazione*.

La flessibilità diventa l'elemento importante. Ma questo termine viene scambiato per precarietà, per effetto di contaminazione dall'economia corrente, che ha confuso i due termini nella necessità di realizzare un'economia capace di adattamenti improvvisi. In realtà ha prodotto frammentarietà, superficialità dei contatti, esasperando la provvisorietà.

Anche la scuola della cooperazione rischia questa deriva confusiva se non viene meglio approfondita la sua logica. La flessibilità esige stabilità e competenza sempre in crescita. Deve curare e permettere l'innovazione accanto alla conservazione delle conoscenze e delle tecniche prodotte in altre epoche e di farle diventare un patrimonio utile. In questo stanno le condizioni di sviluppo complessivo e sempre originale, che contiene la prospettiva inclusiva delle persone disabili. Cambia la connotazione della scuola, da un'impostazione su percorsi sostanzialmente paralleli: una normalità che procede su obiettivi didattici distinti rispetto alla capacità di creare dei vincoli affettivi che non modificano il fatto che parallelamente c'è un percorso didattico particolare per un soggetto "diverso".

Questa non è più una scuola plurale. È una scuola a due velocità. Qualcuno lo dice dicendo: "È inutile soffrire per sogni irrealizzabili. Facciamo una scuola a due velocità, con realismo, smettendo di rincorrere modelli impossibili".

Riteniamo poco credibile questa operazione proprio sul piano della realtà. La realtà contiene le differenze individuali. La storia ci insegna che una scuola che dichiara due velocità, ne impone una, producendo continuamente degli scarti – i superati di Elias Canetti. Come tali, non vengono più considerati, avendo perso competitività nella gara delle conoscenze che diventerebbe la scuola.

La scuola della cooperazione è valorizzazione in un impegno nell'apprendimento, portando avanti tutti compresi i disabili.

Nell'apprendimento cooperativo vi è l'idea forte di una cittadinanza attiva che si pone, di fronte al futuro con capacità responsabili e competenti, non velleitarie, di intervenire sulla realtà per potere realizzare gli adattamenti utili a tutte e tutti. Questo rende credibile la richiesta rivolta a soggetti disabili di compiere a loro volta adattamenti rispetto ad una realtà che si adatta.

L’orientamento competente, che cresce con e nell’apprendimento, contiene adattamenti reciproci. La reciprocità è un elemento importante che fa della scuola, della cooperazione e della sua logica un contributo per l’intera società.
I rischi interni alla prospettiva sono concentrati nel tecnicismo della cooperazione, qualora questa venga modellata secondo un solo criterio. In questo modo, non suscita il collegamento tra l’invenzione e la modellizzazione (Paulo Freire), lasciando aperta la possibilità della riformulazione e della riorganizzazione secondo quelle attitudini personali e professionali che Claparède individuava. Il rischio di una tecnicizzazione della cooperazione esiste.
Riferiamoci a scuola e formazione, pensando alla formazione per tutta la vita. Vorremmo passare da un apprendimento confezionato in funzione scolasticistica, ad un *apprendimento come stile di vita*.

5. Importanza delle rappresentazioni

Il testo si sofferma molto giustamente sull’importanza delle rappresentazioni. Chi legge troverà indicazioni preziose per lo sviluppo di una didattica che sappia operare e riflettere per ridurre le difficoltà. In questa introduzione, crediamo utle fornire elementi convergenti, di supporto, e complementari. Leggiamo in piano didattico fatto con coscienza:

> *Individuazione dei bisogni dell’allievo in difficoltà (seconda Media) funzionalizzati sull’intero contesto classe desunti dal P.E.I., riferiti all’area specifica di intervento didattico-educativo:*
>
> AREA LOGICO-MATEMATICA:
>
> È questa l’area specifica dell’acquisizione delle capacità di:
> - raggruppamento;
> - ordinamento;
> - quantificazione;
> - misurazione di fatti e fenomeni della realtà;
> - dell’acquisizione delle abilità necessarie per interpretarla ed intervenire consapevolmente su di essa.
>
> Gli obiettivi minimi da raggiungere riguarderanno progressivamente l’acquisizione delle seguenti abilità:
> - raggruppare;
> - ordinare;
> - contare;
> - misurare;
> - quantificare;
> - numerare;
> - confrontare;
> - localizzare
>
> facendo ricorso a modi più o meno sistematici di confrontare e ordinare, in rapporto a diverse proprietà, grandezze ed eventi:
> - uso di oggetti, sequenze o simboli per la registrazione;

– impiego diretto di alcuni semplici strumenti di misura;
– fare ricorso a modi spontanei o guidati per esplorare il proprio ambiente, viverlo, percorrerlo, occuparlo, osservarlo, rappresentarlo;
– utilizzare parole, costruzioni, modelli, schemi, disegni;
– costruzione di sistemi di riferimento che aiutino l'alunno a guardare la realtà da più punti di vista, coordinandoli gradualmente fra loro.

Si cercherà di sviluppare la capacità di porre in relazione come:
– formulare relazioni e prime ipotesi: individuare, costruire ed utilizzare relazioni e classificazioni;
– costruire corrispondenze e rapporti di complementazione, unione, intersezione e inclusione tra classi;
– riconoscere invarianti;
– utilizzare strumenti di rappresentazione;
– operare semplici riflessioni e spiegazioni su numeri, sistemi di riferimento, modalità di rappresentazione, ecc.

Si creeranno le opportunità per sviluppare le capacità di:
– progettare e inventare (creazione di forme, derivanti dalla realtà o del tutto nuove, di oggetti e spazi dell'ambiente);
– ideazione di storie;
– realizzazione di giochi con regole più o meno formalizzate e condivise;
– le rappresentazioni spontanee o ricavate da quelle in uso, ecc.

Gli aspetti dell'esperienza presenteranno, in maniera più o meno immediata e diretta, numerose e variate situazioni in grado di stimolare lo sviluppo dei processi cognitivi di natura matematica, offrendo lo spunto per attività basate essenzialmente sul gioco, sulla manipolazione, l'esplorazione, l'osservazione diretta, la collaborazione ed il confronto con gli altri, lo scambio fra pari, le sollecitazioni dell'insegnante specializzato e non.

Le varie forme di linguaggio naturale costituiranno, per la loro ricchezza espressiva e potenzialità logica, il punto di partenza di ogni attività di formalizzazione.

La elaborazione e la conquista dei concetti matematici avverrà, così, attraverso esperienze reali, potenziali e fantastiche che si apriranno a percorsi e tracciati occasionali o programmati.

Ci si avvarrà di un ampio contesto di opportunità per consentire all'allievo di svolgere, in un contesto per lui significativo e significante, operazioni di matematizzazione a vario livello, guidandolo così, verso l'uso di espressioni adeguate di quantificazione, ordinamento e comparazione, interagendo attivamente con i suoi processi di argomentazione, sforzandoci di cogliere la logica che è alla base delle sue risposte.

Per l'attivazione di tutto ciò, si farà riferimento alle attività di vita quotidiana (appello, percorso casa-scuola e viceversa, ecc.), la conoscenza di sé, la storia personale, i ritmi ed i cicli temporali, i giochi di gruppo e di squadra, l'ambientazione nello spazio (mappe, tracce, movimenti), le produzioni fantastiche (fiabe, drammatizzazioni, conte), l'esplorazione della natura con l'introduzione del riferimento diretto ad oggetti matematizzati, come i materiali strutturati e la familiarizzazione con simmetrie e combinazioni di forme (ritagli, piegature, mosaici, incastri, ecc.).

> Per superare le specifiche difficoltà nello svolgimento delle attività programmate, saranno proposti interventi educativi e didattici basati su di un riferimento e aggancio alla concretezza e all'eventuale impiego di materiali e sussidi finalizzati, oltre all'invio di continui segnali di apprezzamento degli sforzi compiuti dall'alunno e delle sue strategie personali di apprendimento.

Accostiamo a questa "scheda" di obiettivi argomentati, gli obiettivi, limitandoci alle sole enunciazioni e non riportando le argomentazioni, del Dr. Itard, a proposito del sauvage. Ricordiamo, in breve, che il ragazzino che il Dr. Itard aveva in casa, insieme alla sua governante Madame Guérin, era stato trovato abbandonato e inselvatichito nei boschi dell'Aveyron, una regione della Francia centro-meridionale. Siamo negli anni di passaggio fra '700 e '800, e Itard scrive la sua Memoria sui progressi di Victor, il selvaggio dell'Aveyron nel 1801. Gli obiettivo sono:

> Primo obiettivo: Introdurlo alla vita sociale, rendendogliela più dolce di quella che conduceva un tempo, e soprattutto più simile alla vita che aveva appena abbandonato.
> Secondo obiettivo: Risvegliare la sensibilità nervosa mediante gli stimolanti più energici e qualche volta suscitando i più vivaci affetti dell'animo.
> Terzo obiettivo: Allargare la sfera delle sue idee stimolandoli lui nuovi bisogni e moltiplicando i suoi rapporti con gli esseri che lo circondano.
> Quarto obiettivo: Condurlo all'uso della parola determinando l'esercizio dell'imitazione attraverso la legge imperiosa della necessità.
> Quinto obiettivo: Esercitare per qualche tempo sugli oggetti dei suoi bisogni fisici, le più semplici operazioni del suo spirito e determinarne poi l'applicazione su oggetti che possono istruirlo. (Canevaro & Goudreau, 1988, pp. 54–59)

L'accostamento dei due modi di proporsi degli obiettivi è interessante. Senza abusare nel voler attribuire ai precursori ciò che è avvenuto in seguito, possiamo "leggere" negli obiettivi che Itard propone non poche questioni vygotskijane relative a processi imitativi, a modelli plurali, a potenziali di sviluppo stimolati da mediatori, a una buona collaborazione fra dimensioni intrapsichica e interpsichica … Vygotskij (1896–1934) ha una produzione di pensiero legata al fatto che il soggetto che apprende è tale in rapporto alla sua dimensione sociale. In parole che rischiano di banalizzare Vygotoskij, il soggetto apprende perché si rappresenta un percorso da fare verso; lo stesso apprendimento è un percorso di elaborazione da-a. Il percorso significa: regolare una organizzazione di informazioni perchè diventi significativa in una finalità che può essere ed è l'aspetto che vogliamo spesso criticare, e giustamente, quando è il riprodurre una lezione se si è interrogati; può essere riorganizzare un apprendimento in vista di una nuova situazione, riorganizzare dei dati in rapporto a un nuovo problema, un nuovo tema. Il processo che trasforma in forme culturali superiori i comportamenti semplici viene chiamato da Vygotskij processo di mediazione semiotica, in cui i segni sono importanti. Ora immaginiamo come gli ambienti di lavoro siano in molti casi uno scenario con segni che permette di orientare i comportamenti produttivi sulla base sia di segni stabili sia di segnali che giungono quando avviene un processo. Questa organizzazione del lavoro può essere anche organizzazione dell'apprendimento. Anziché immaginare unicamente l'apprendimento come lettura e memorizzazione possiamo immaginarlo come un processo di comportamenti e di ragionamenti, di elaborazioni di informazioni, che si basa su un ambiente già segnato, organizzato con dei segni, e dei segnali che giungano. In genere una classe non è immaginata così se non con elementi molto tradizionali; il pensare alla lavagna è già un elemento-segno che può aggiungere segnali, ma l'ambiente-classe può essere più ricco sia negli arredi, sia nelle attrezzature. Distinguo arredi da attrezzatura perché l'arredo è il mobilio e l'attrezzatura può essere ed è spesso la dotazione tecnologica, a basso o ad alto livello di sofisticazione.

Abbiamo incontrato un bambino la cui vicenda si divide su due paesi: una prima parte della sua vita è stata vissuta in un paese, ha vissuto in un istituto perché la sua famiglia di origine non era in grado, per ragioni che non conosciamo, di crescerlo e di assicurarne l'educazione; ha quindi perso i contatti con i suoi genitori di origine, è stato posto in stato di adottabilità ed è stato adottato con successo, si è molto bene integrato con quelli che bisogna considerare i suoi genitori veri e tutto è proceduto bene sul piano dei legami affettivi più importanti, più radicali.

Non ha avuto un buon successo scolastico, anzi la scuola ha rappresentato un punto di difficoltà: apparentemente e inizialmente i rapporti con i coetanei sono stati buoni ma con dei piccoli episodi che ne rompevano la qualità, episodi di aggressività. Improvvisamente quel bambino era aggressivo senza una ragione comprensibile e tirava i capelli o dava dei colpi nella pancia di altri bambini, dava dei calci ai suoi coetanei, bambini e bambine – per l'età dovremmo dire ragazzini e ragazzine, perché l'età era attorno ai nove anni. Gli apprendimenti non erano brillanti, ma non per una incapacità manifesta di usare l'intelletto, quanto proprio in rapporto a quei momenti di aggressività che prendevano il sopravvento anche come immagine di quel bambino.

6. L'ipotesi del controllo, lo statuti dell'errore e ancora i mediatori

Come comportarsi, come cercare di capire quel bambino? La prima operazione che fu tentata era di trovare delle relazioni causali ai suoi comportamenti aggressivi, e vi furono due modi di ragionare, uno che cercava di trovare le cause nelle relazioni: quel bambino aveva usato un'azione di violenza nei confronti di una coetanea, di un'altra bambina e gli adulti cercavano di capire se vi fosse stato, volontariamente o involontariamente, qualcosa che avesse motivato quel tipo di atteggiamento da parte del bambino. Quella bambina aveva forse fatto uno sgarbo inavvertitamente o volutamente nei giorni precedenti: la ricerca della causa legata a qualcosa interno alla relazione con colui, o colei, che era aggredita. L'altro modo di cercare le ragioni era quello

di ipotizzare qualcosa che fosse avvenuto nell’altro paese, nell’altra parte della vita di quel bambino. E le ipotesi non potevano andare oltre al fatto di essere ipotesi, non vi erano possibilità di accertamenti, ma allora si poteva genericamente ipotizzare che nell’altra parte della vita di quel bambino vi fossero state delle violenze, violenze di vario tipo: abbandono, prepotenze da parte di altri bambini. Questo poteva essere anche letto nei comportamenti di quel bambino, ma solo come ipotesi.
Cercando di mettere il tempo su questa analisi si trascurava qualcosa che accadeva anche nella vita di quel bambino, e quindi trascurandolo fu scoperto in ritardo, o perlomeno fu valorizzato con ritardo, e cioè solo dopo un certo periodo che si pose l’attenzione sul fatto che quel bambino partecipava a un laboratorio di falegnameria, che non è una delle attività centrali di una scuola, è collaterale, e quindi non veniva all’attenzione immediatamente; non era né svilita né esaltata, era semplicemente un fatto che – si dice – del pomeriggio, mentre la scuola che conta è più quella della mattina. Nelle attività del laboratorio di falegnameria quel bambino mostrava una grande capacità di autocontrollo: avrebbe avuto strumenti per realizzare delle violenze ancora maggiori, e più pericolose, e questo non era assolutamente mai accaduto, anzi, vi era una capacità di lavorare con precisione, con calma, con l’energia giusta, e controllare, quindi, le proprie forse e anche di compiere dei lavori che esigevano una destrezza, un equilibrio, non presente nei suoi coetanei. Non andava, quindi, d’accordo con l’immagine del bambino che emergeva dalle tante preoccupazioni del corso della giornata nelle altre attività.
Una certa abitudine fa pensare che chi ha delle difficoltà intellettive ha maggiori possibilità quando si tratta di azioni concrete, ed è in difficoltà con l’astratto, ma non è convincente questa spiegazione; abbiamo piuttosto ragionato in termini di controllo; abbiamo, cioè, formulato un’ipotesi – e come tale la manteniamo, non è una realtà, è un’ipotesi – che ha permesso di avanzare con un’azione educativa. L’ipotesi è la seguente: quel bambino aveva la possibilità di entrare in relazione con un ambiente – il laboratorio di falegnameria – in cui tutto cominciava con il suo ingresso; le regole, le indicazioni, i materiali da utilizzare, gli attrezzi da utilizzare, i comportamenti, tutto aveva inizio con l’ingresso suo insieme agli altri, non entrava in una storia già iniziata ma la storia cominciava con lui; non così per altre situazioni che avevano molto più collegamento con le trasmissioni informali che ciascun bambino, che ciascuna bambina ha accumulato per sedimentazione da quando è nato. Giorno dopo giorno sono entrate negli occhi, nelle orecchie, nella pelle di quel bambino, di quella bambina, una quantità innumerevole di informazioni informali che hanno costituito una sorta di telaio su cui poteva innescarsi la trasmissione di informazioni formali. Quel bambino, forse, riteneva – lo diciamo con queste parole, non era certamente un suo pensiero con queste parole, ma è nella nostra ipotesi – di non avere il controllo delle informazioni per potere scegliere, selezionare, individuare, quelle utili per

finalizzare le proprie azioni. Questa operazione era per lui ritenuta impossibile. Nello stesso tempo aveva bisogno di essere controllato, forse.
Il rapporto tra controllare e essere controllato è un rapporto che ricorda le coppie di muscoli per cui uno tende e l'altro flette. E così: "Io sono controllato e poi aumenta la mia capacità di controllare quindi mi libero dalla necessità di essere controllato da altri. Io so controllare quindi non ho bisogno che altri controllino per me". Quel bambino avrebbe potuto dire: "Io non so controllare quindi chiedo che altri controllino" e quindi l'aggressività poteva diventare un elemento che rompesse la falsa supposizione: "Tu sei in grado di vivere come gli altri". "No, non è vero, io ho bisogno di qualcosa di più. Ho bisogno di capire di più, di controllare meglio quello che sta accadendo intorno a me che non capisco, che mi confonde". Questa è l'ipotesi. Ha permesso, però, di lavorare su qualcosa, per esempio di contrassegnare meglio i tempi di lavoro attraverso delle piccole ritualizzazioni che scandivano meglio la giornata, e quindi fornivano degli elementi di controllo del tempo. La possibilità di controllare il tempo è di grande importanza, e abbiamo già avuto occasione di marcarla come una delle indicazioni più forti dell'azione educativa.
Possibilità, anche, di controllare le informazioni per finalizzare quelle giuste, alla realizzazione di quello che è il proprio compito; capacità, quindi, di riprendere una indicazione nel modo giusto, e non lasciarsi confondere dalla molteplicità di sollecitazioni che sembrano, a chi le formula, andare tutte nello stesso senso ma che forse creano non poca confusione nella testa di chi non ha, o crede di non avere, il filtro che le metta in ordine, che le discrimini, perché per agire correttamente bisogna sapere discriminare, tra le tante informazioni che ci raggiungono, quelle utili alla nostra azione. E nella nostra ipotesi quel bambino sembrava non essere capace di discriminare le informazioni utili per il raggiungimento dei compiti a cui era tenuto e che voleva poter fare. Nel laboratorio di falegnameria il campo è molto ben delineato, le indicazioni sono funzionali e possono essere quindi organizzate discriminando quelle giuste per raggiungere un certo risultato e lasciando cadere – mettere da parte naturalmente, perché potrebbero poi essere utilizzate in altri momenti – quelle che in quel momento non servono.
L'ipotesi del controllo si collega alla riflessione che Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinella, Ines Marazzani e Silvia Sbaragli (2008) compiono sullo *statuto dell'errore*. Interessa una concezione dell'impegno didattico che cerca di liberarsi dell'innatismo (la causa dell'errore è interna, stabile e incontrollabile: "l'allievo ha commesso un errore perché non è intelligente") per una dimensione costruttivista (la causa è interna, variabile e controllabile: "l'allievo deve ancora lavorare per superare il suo errore").
E questo riporta ai *mediatori* ed alla *logica del domino* che dovrebbe connetterli
Possiamo utilizzare l´immagine di chi vuole attraversare un tratto di acqua che separa due sponde e non vuole bagnarsi: mette i piedi sulle pietre che

affiorano. Forse butta una pietra per costruirsi un punto di appoggio (un mediatore) dove mancherebbe … E i mediatori si collegano uno all´altro. Se un mediatore non invitasse a quello successivo, non sarebbe piú tale. Potrebbe trasformarsi in feticcio, in prigione, in sosta forzata, in illusione di paradiso raggiunto …

Scheda: sintesi delle caratteristiche dei mediatori

1. Un mediatore deve avere la possibilità di aprire e rinviare alla pluralità di mediatori, sia per sostituire, che per accompagnare ed evolvere il mediatore utilizzato in un certo periodo della vita.
2. Un mediatore deve costituire un punto di convergenza di sguardi diversi, essendo un oggetto esterno al soggetto e visibile da altri con un significato in parte condiviso e in parte non condiviso. Deve poter permettere di far convivere diversità e unità.
3. Un mediatore può rappresentare il soggetto senza comprometterlo: può saggiare un terreno insicuro, esplorare un ambiente, anche relazionale, senza che eventuali insuccessi deprimano o feriscano il soggetto.
4. Un mediatore deve essere malleabile, per poter riflettere l'impronta che il soggetto vi pone senza che questa sia definitiva ma sempre perfettibile. Può permettere di esercitare l'impronta soggettiva, sperimentando gli aspetti creativi ma anche distruttivi, essendo nello stesso tempo attore e spettatore.
5. Un mediatore deve poter condurre e guidare una sperimentazione di sé da parte del soggetto, senza che questi si senta giudicato in maniera tale da compromettere altre esperienze.

Queste caratteristiche non hanno ordine di importanza: interagiscono fra loro in momenti diversi e con diverse intensità. Il più delle volte, il buon funzionamento di un mediatore può essere vissuto, e solo a posteriori vi può essere, non sempre necessaria, una riflessione che chiarisce le caratteristiche di questo schema, la cui utilità non è da interpretarsi secondo la logica delle "istruzioni per l'uso". Piuttosto, è uno schema che andrebbe metabolizzato, e quindi fatto proprio in maniera del tutto originale.

Chi legge troverà un testo impegnativo e affascinante. Il compito di chi introduce, oltre a testimoniare una condivisione che in questo caso è anche amicizia, può essere quello di dare uno sfondo complementare: non specifico (non da matematico) ma da studioso curioso, che frequenta da anni le compagnie (non cattive) di chi vive qualche difficoltà.
Chi legge si conforti: gli errori possono essere fecondi. E le difficoltà possono far capire meglio.
È meglio pensare un mondo imperfetto e incompleto e sentirsi utile per contribuire a migliorarlo.

Buona lettura!

Bibliografia

Bauman, Z. (2005). *Vite di scarto*. Roma-Bari: Editori Laterza.

Canetti, E. (2004). *Massa e potere* (Ediz. originale 1960). Milano: Adelphi.

Canevaro, A., & Gaudreau, J. (1988). *L'educazione degli handicappati. Dai primi tentativi alla pedagogia moderna*. Roma: Carocci.

Claparède, E. (1940). *Comment diagnostiquer les aptitudes chez les écoliers*. Paris: Flammarion.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica.* Trento: Erickson.

Gorz, A. (2003). *L'immateriale, conoscenza, valore e capitale*. Torino: Boringhieri.

Laborit, H. (1994). *Lo spirito del solaio. Ricordi e riflessioni di uno scienziato* (Ediz. originale 1992). Milano: Mondatori.

Meirieu, P. (2004). *L'École mode d'emploi. Des méthodes actives à la pédagogie différenciée*. Paris: ESF.

Vygotskij, L. S. (1973). *Lo sviluppo psichico del bambino*. Roma: Editori Riuniti.

Vygotskij, L. S. (1986). *Fondamenti di difettologia*. Roma: Bulzoni.

Vygotskij, L. S. (1987). *Il processo cognitivo*. Torino: Bollati Boringhieri.

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Roma-Bari: Laterza.

Vygotskij, L. S. (2006). *Psicologia pedagogica. Attenzione, memoria, pensiero*. Gardolo di Trento: Erickson.

Jorge Luis Borges e la matematica

Vittorio Capecchi
Professore emerito
Alma Mater Studiorum, Università di Bologna

Sunto. *Quando si analizza la relazione tra Borges e la matematica è quasi inevitabile partire da un confronto tra Jorge Luis Borges e Leibniz perché Leibniz è stato definito "un filosofo borgesiano" e Borges è giustamente identificato come "un discepolo di Leibniz".*

Abstract. *When we analyze the relationship between Borges and mathematics is almost inevitable to start from a comparison between Jorge Luis Borges and Leibniz because Leibniz was defined "a Borgesian philosopher" and Borges is correctly identified as "a disciple of Leibniz".*

1. Borges e Leibniz

Nel corso tenuto nel 1980 a Vincennes da Gilles Deleuze su Leibniz, Borges viene ricordato per una differenza: in Borges sono compresenti mondi incompossibili mentre questo non è accettato da Leibniz:

> Borges, in *Finzioni* scrive il racconto "Il giardino dei sentieri che si biforcano". È il libro infinito, il mondo delle compossibilità. L'idea del filosofo cinese alle prese con il labirinto è una idea dei contemporanei di Leibniz. Appare in pieno XVII secolo. Esiste un celebre testo di Malebranches che è l'intervista con il filosofo cinese che contiene cose molto curiose. Leibniz è affascinato dall'Oriente e cita spesso Confucio. Borges ha fatto una copia conforme di Leibniz ma con una differenza essenziale: per Leibniz, tutti i mondi diversi in cui, che Adamo pecchi in un certo modo o che pecchi in altro modo oppure che non pecchi per niente, una infinità di mondi che però si escludono gli uni con gli altri, sono incompossibili gli uni con gli altri. Tanto è vero che mantiene un principio di disgiunzione molto classico: o è in questo mondo o nell'altro. Borges invece, mette tutte queste serie incompossibili nello stesso mondo. Ciò permette una moltiplicazione degli effetti. (Deleuze, 1980, "Cours Vincennes", p. 5)[1]

Leibniz è invece del tutto d'accordo con Borges perché attribuisce un compito fondamentale ai narratori e ciò proprio quello di esplorare tutti i mondi possibili proponendo soluzioni e scrive che "nessuno assomiglia più a nostro Signore che l'inventore di un buon romanzo". Come scrive Fréderic de Buzon:

> [Per Leibniz] il romanzo è dunque storia del possibile, un mondo che ha una sua coerenza nel gioco dei suoi crimini e delle sue sanzioni. L'autrice più vicina alle

[1] Lo stesso passo sintetizzato è riproposto in Deleuze (1988, p. 93).

concezioni di Leibniz è Madeleine de Scudery. Egli trova in Clelia un esempio significativo di "romanzo dettato dalla ragione" e una armonia di sorprendente intelligibilità. Si noterà una identità dei criteri di armonia quando sono applicati alla produzione dell'arte e alla economia divina: la creazione, se non la Creazione, definisce l'opera romanzesca. Leibniz così scrive a Anton Ulric von Braunschweig: "Tuttavia, uno dei migliori artifici di un autore di romanzi è di lasciare andare tutto verso la confusione e poi trovare soluzioni in maniera inattesa. Nessuno assomiglia di più a nostro Signore dell'inventore di un buon romanzo. (Buzon, 2003, p. 49)

D'altra parte Borges non può che essere d'accordo con Leibniz quando Leibniz scrive nel 1715 il frammento dell'Apokatástasis in cui prefigura il suo racconto *La biblioteca di Babele*:

> Può essere stabilito il Numero di tutti i Libri possibili che non eccedano una grandezza determinata, composti di vocaboli significanti o non significanti; numero che, dunque comprenderà anche tutti i Libri dotati di senso. Chiamo libro di grandezza determinata quello che non superi un numero definito di lettere. Sia per esempio un libro in folio composto 10.000 pagine, e la pagina da 100 linee e la linea da 100 lettere. Il libro risulterà costituito di 100.000.000 di lettere e saranno detti di determinata grandezza i libri che non eccederanno questo numero. Ora il numero dei libri possibili che non superano tale grandezza o se si vuole, di quelli che possono essere formati fino a un massimo di cento milioni di lettere d'alfabeto è finito. Non solo è finito, ma mediante il calcolo delle combinazioni può essere stabilito il numero possibile dei libri differenti tra loro anche solo di pochissimo, non eccedenti il numero di lettere proposto siano lunghi o brevi. (Leibniz, op. cit, p. 11)

Daremo, alla fine del quinto paragrafo, la soluzione matematica del numero totale di libri nella biblioteca immaginata da Leibniz. In questa sede possiamo fare un altro esempio di testi di Leibniz che potrebbero essere scritti da Borges. Jonathan Wichmann (2003) indica questi due passi della *Monadologia*:

> 68. E benché la terra e l'aria inframmezzate alle piante del giardino o l'acqua inframmezzata ai pesci dello stagno, non siano né pianta ne pesce, tuttavia ne contengono a loro volta, ma perlopiù d'una sottigliezza per noi impercettibile. 69. Così non vi è nulla d'incolto, di sterile, di morto nell'universo, non vi è caos ne confusione se non in apparenza, pressappoco come potrebbe esservene in uno stagno a una distanza tale da scorgere un movimento confuso e, per così dire, un brulichio di pesci nello stagno, senza distinguere i pesci stessi. (Leibniz, op. cit., p. 464)

Leibniz sottolinea che si è immersi in uno spazio non percepibile che sta tra il molto piccolo (le monadi unità di vita non visibili) e l'infinito dell'universo e Borges, che si muove in tutti i suoi scritti tra mondo visibile e invisibile, concorda con questo modo di vedere la realtà.
In sintesi si può affermare che le convergenze tra Leibniz e Borges sono nella "fantasia senza freni inibitori" come sottolinea Armando Massarenti (2006)

nella sua introduzione al volume su Leibniz da lui curato che ha come titolo “I sogni borgesiani di Leibniz”:

> Anche su un altro scrittore, Jorge Luis Borges, hanno avuto un duraturo effetto gli innumerevoli scambi epistolari, gli articoli brevi su problemi enormi (perché esiste qualcosa invece del nulla?), gli schizzi intellettuali buttati giù per puro divertimento dal filosofo. Al punto che, leggendo Leibniz, a volte sembra proprio di leggere Borges. Leibniz è un autore modernissimo, che scrive nel pieno della rivoluzione scientifica e del trionfo del meccanicismo. Ma come ha messo bene in luce Massimo Mugnai, uno dei più importanti studiosi al mondo del suo pensiero, la sua fantasia filosofica non ha freni inibitori, e il suo equilibrio, la sua chiarezza filosofica non ha freni inibitori, e il suo equilibrio, la sua chiarezza e il suo rigore su nutrono anche delle visioni che la Nuova Scienza sembrava contraddire. (Massarenti, op. cit., pp. 5–6)

I libri di Massimo Mugnai[2] a cui Massarenti fa riferimento comprendono la sua introduzione all’opera di Leibniz in tre volumi (curata insieme a Enrico Pasini) da cui emerge questa sua anima “borgesiana”. Il filosofo e storico della scienza Paolo Rossi, morto all’inizio del 2012 e autore di un importante libro su Leibniz (Rossi, 1960), ha recensito l’opera di Mugnai concludendo:

> Essa è utile anche a tutti coloro che amano sia i testi che parlano dei grandi (così detti “eterni”) problemi, sia quelli che prospettano problemi un po’ strani. Del tipo: si può pensare di individuare un alfabeto dei pensieri umani? Si può fare l’inventario di tutte le conoscenze? Si può stabilire il numero di tutti i i libri possibili? Siamo certi che non si ripeterà minuziosamente la vita dei singoli e che io, seduto in una città chiamata Firenze, posta lungo il fiume Arno, non tornerò a scrivere questa stessa recensione? (per Leibniz la città era Hannover, il fiume Leine, la recensione una lettera). (Rossi, 2000)

Come spesso capita quando viene iniziata una ricerca (in questo caso la relazione tra Leibniz e Borges) c’è sempre qualche studioso che decide di affrontarla in modo sistematico. Stiamo parlando di Herbert H. Knecht, dell’*Ecole Polytechnique Fédérale di Losanna* che aveva già pubblicato nel 1981 una pregevole monografia su Leibniz (Knecht, 1981) in cui lo definiva dotato di un “surplus di senso non penetrabile da una intellettualità schematica”:

> Il pensiero di Leibniz rappresenta una struttura architettonica alla quale la lingua barocca che parla, conferisce colore, musicalità, calore, caratteristiche della vita. […] Il Barocco si presenta nell’opera di Leibniz attraverso un insieme di tratti, di immagini, di forme, di soggetti […] uno spettacolo visionario che gli conferisce un surplus di senso che sarebbe non penetrabile da una intellettualità schematica. L’approccio dell’opera di Leibniz esige di lasciarsi sedurre dal suo charme emotivo che testimonia una simpatia per la cultura barocca nell’abbagliante diversità delle sue realizzazioni. (Knecht, 1981, p. 335)

[2] Tra le opere di Massimo Mugnai su Leibniz ricordiamo quella introduttiva (Mugnai, 2001) e i tre volumi curati insieme a Enrico Pasini (Mugnai & Pasini, 2000).

Venti anni dopo Knecht riprende questa valutazione dell'opera di Leibniz come "spettacolo visionario" in un lungo saggio (Knecht, 2000) che distingue tra un fantastico senza controlli (che si anima di oggetti magici, fate potenti, gnomi malefici ecc.) e un fantastico razionale (che fa entrare chi legge in una realtà diversa e ha un suo rigore formale). La tesi di Knecht è che si sia in presenza di questo secondo tipo di fantastico e che "l'opera di Jorge Luis Borges illustri perfettamente ai nostri occhi questo prolungamento del progetto inconsapevole di Leibniz verso i suoi limiti fantastici" (Knecht, op. cit., p. 111). Una volta presa questa direzione si trovano molte conferme. Knecht inizia con il considerare le somiglianze tra i due autori nelle esperienze di lavoro e nello stile di vita e di studio:

> Leibniz ha avuto una lunga carriera di bibliotecario a Hanovre e a Wolfenbuttel, e Borges a Buenos Aires […]. A un livello più personale l'uno e l'altro sono dei solitari, unici nel loro tempo, del tutto personali, uomini privati con la stessa concezione con cui altri si considerano uomini pubblici, nonostante il desiderio continuo di comunicare, una apertura senza riserve sul mondo, una curiosità appassionata e universale. Nelle loro due opere ciò che colpisce immediatamente è il ricorso al mondo del sapere: allusioni, citazioni, discussioni critiche. (Knecht, op. cit., p. 112)

Vengono poi considerati i temi comuni e il comune atteggiamento verso la ricerca:

> Numerosi temi infine sono comuni ai due pensatori: quello del labirinto che è senza dubbio fondamentale in tutta l'opera borgesiana sia sul piano formale dello stile narrativo che al livello di motivo letterario […]. C'è una forte analogia nei temi affrontati, una identità di preoccupazioni che li avvicina, lo stesso meravigliarsi di fronte al concatenarsi aggrovigliato delle cause e degli effetti dove ogni accadimento ha una sua giustificazione, la stessa fascinazione davanti alle ramificazioni senza limiti del possibile, le stesse meditazioni su gli innumerevoli paradossi dell'infinito, la stessa genialità combinatoria spesso al servizio di una tematizzazione dell'assurdo, una propensione ludica alla mistificazione, l'adesione ai metodi della scoperta scientifica. (Knecht, op. cit., pp. 112–113)

In sintesi, scrive Knecht, "per una felice circostanza, Leibniz ha trovato in Borges un prolungamento fantastico che niente faceva presagire. Niente se non questo altro paradosso che risulta da una inversione dei termini che ci fanno vedere in Leibniz il poeta e in Borges il filosofo" (Knecht, op. cit., p. 113). Knecht, dopo un dettagliata disamina delle diverse tematiche dei due autori conclude considerando il tema dell'infinito. Il suo è un invito a rileggere il Leibniz borgesiano:

> [in Leibniz che tratta il tema dell'infinito] si compie un'avventura insolita dell'immaginazione nel luogo dell'assurdo, del fantastico, dell'impossibile, nello spazio inquieto del non cosciente, nel dominio inconfessabile e indicibile del respinto. Ma è allora che avviene la sfida imperiosa lanciata alla ragione superba

che si prende la sua rivincita nel riflettere su i suoi limiti. D'altra parte non è stato Leibniz a definire le matematiche come la scienza dell'immaginazione? […] Al di à di ogni ragionamento possibile, l'irrazionale è permanente e inevitabile […]. E allora rileggete Leibniz … e sognate! (Knecht, op. cit., p. 145)

2. Borges e la perpetua corsa di Achille contro la tartaruga

Borges (1932) parla degli "immediati e accessibili incanti delle matematiche" (Borges, "Note critiche", op. cit., vol. I, p. 424) e afferma: "molte delle mie idee le ho prese da libri di logica e di matematica che non ho compreso perfettamente; non sono mai stato in grado di capire completamente questi libri" (Simon, 1971, citato da Odifreddi, 1997, p. 1). Carlo Toffalori ha così spiegato perché Borges amava la matematica: "non nella sua capacità di spargere certezze ma di seminare dubbi":

> In ogni caso, a spulciare tra le pagine di Borges, balza subito evidente una cosa: che la matematica che vi affiora e che piace allo scrittore argentino è la più lontana possibile dagli stereotipi e dai preconcetti di una scienza sistematica, coerente e complessa come la sognava Hilbert. […] Il fascino che la Matematica esercita su Borges non consiste nelle sue certezze definite ma piuttosto nei suoi enigmi e nei suoi paradossi; non nella capacità di elargire sicurezze ma in quella di spargere dubbi. (Toffalori, 2011, pp. 183–184)

Per spiegare questo rapporto tra Borges e la matematica viene analizzato il suo celebre racconto *La perpetua corsa di Achille contro la tartaruga* partendo dal commento dato da Piergiorgio Odifreddi che ha dedicato a Borges tre saggi.[3] Odifreddi inizia la sua analisi di *La perpetua corsa di Achille contro la tartaruga* riportando le parole con cui Borges descrive il paradosso di Zenone di Elea, la cui "limpidezza non esclude l'impenetrabilità", e lo spiega affermando che gli Eleatici riuscirono a definire il paradosso perché ad Achille e la tartaruga sostituirono "due tartarughe messesi d'accordo nel fare la stessa specie di passi o di atti simultanei, per non raggiungersi mai":

> Le implicazioni della parola *gioiello* – preziosa piccolezza, delicatezza non soggetta alla fragilità, facilità somma di trasporto, limpidezza che non esclude l'impenetrabilità, fiore per gli anni – la rendono di uso legittimo qui. Non conosco migliore qualifica per il paradosso di Achille tanto indifferente alle decisive confutazioni che da più di ventitre secoli l'aboliscono, che ormai possiamo salutarlo immortale. Le ripetute visite al mistero che tale lunga durata postula, le sottili ignoranze a cui essa ha invitato l'umanità, sono generosità di fronte alle quali non possiamo non sentire gratitudine. Viviamolo ancora una volta, anche se solo per convincersi di perplessità e di intimo arcano. (Borges, 1932, "La perpetua corsa di Achille e della tartaruga", p. 379)
>
> Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza.

[3] I tre saggi dedicati da Odifreddi a Borges sono: Odifreddi (1992a, 1992b, 1997). Una parte di questi saggi è riprodotta in Odifreddi (2001).

> Achille corre dieci volte più veloce della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga corre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille il millimetro, la tartaruga un decimo di millimetro e così all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla. Fin qui il paradosso immortale. (Borges, op. cit., pp. 379–380)

> L'illusione degli Eleatici nasceva dalla identificazione di questa serie di atti individuali *sui generis,* con lo spazio omogeneo che li sorregge. Siccome questo spazio può essere diviso e ricomposto secondo una legge qualunque, si credettero utilizzati a rifare il movimento totale di Achille, ma con i passi di tartaruga. Ad Achille che inseguiva una tartaruga sostituirono in realtà, due tartarughe regolate l'una su l'altra, due tartarughe messesi d'accordo nel fare la stessa specie di passi o di atti simultanei, per non raggiungersi mai. (Borges, op. cit., p. 382)

Ma Borges, come sottolinea Odifreddi, va oltre l'esposizione/spiegazione del paradosso di Zenone e lo utilizza in due direzioni: il paradosso come un "attentato non solo alla realtà dello spazio bensì a quella del tempo" e il paradosso come svelamento di un dato tipo di "idealismo":

> Il paradosso di Zenone di Elea, come osservò James, è un attentato non solo alla realtà dello spazio ma a quella più invulnerabile e sottile del tempo […]. Zenone è incontestabile, a meno di confessare l'idealità dello spazio e del tempo. Accettiamo l'idealismo, accettiamo l'accrescimento concreto di quanto è percepito, e potremo eludere il brulicare di abissi del paradosso. (Borges, op. cit., p. 385)

Odifreddi scrive che "Così Borges ammette ciò che tutti gli idealisti ammettono, il carattere allucinatorio del mondo, ma fa ciò che nessun idealista ha fatto: trova nella dialettica di Zenone l'irrealtà in grado di confermare tale carattere. I paradossi non sono dunque per lui problemi da risolvere, come furono ancora per Russell, bensì indizi da usare come saranno da Gödel in poi" (Odifreddi, 1992a, p. 2). C'è così una terza direzione con cui, per Odifreddi, Borges considera il paradosso. Il mondo ha un carattere allucinatorio ma il paradosso non solo fa emergere la presenza dell'idealità del tempo e dello spazio ma inserisce nella sua architettura "tenui ed eterni interstizi di assurdità" che ne svelano la finzione:

> Noi (la indivisa divinità che opera in noi) abbiamo sognato il mondo. Lo abbiamo sognato resistente, misterioso, visibile, ubiquo nello spazio e fermo nel tempo; ma abbiamo ammesso nelle sua architettura tenui ed eterni interstizi di assurdità, per sapere che è finto. (Borges, 1932, "Metempsicosi della tartaruga", op. cit., vol. I, p. 399)

A questo punto Odifreddi si volge ad oriente in cui l'uso del paradosso, come nel buddhismo zen, viene utilizzato per ricercare il proprio vuoto interiore. In che modo si possono far incontrare lo spazio/tempo di Achille con quello della tartaruga: non è logico. Ma, sempre seguendo Odifreddi, la relazione visibile/invisibile è più complessa. Nascosto dal paradosso c'è infatti un *luogo protetto* in cui, come nel racconto di Lewis Carroll che Borges ricorda, dopo la stancante corsa Achille può dialogare con affetto con la tartaruga e questa storia è così bella che il dialogo viene proseguito da Hoffstadter (1984) nel suo libro *Gödel, Escher, Bach: un' Eterna Ghirlanda Brillante*[4] oppure ci si può appassionare alla sua trascrizione pittorica: *Convesso e concavo* nella litografia di Escher del 1955.

3. Borges e i labirinti

I testi di Borges (1944) sono quelli "classici" *Il giardino dei sentieri che si biforcano* ed *Esame dell'opera di Herbert Quain* e, in questo caso, la forma di cui si discute è il *labirinto*. Apparentemente potrebbe sembrare una variazione della litografia di Escher sopra ricordata ma non è così. La relazione concavo/convesso, come quella tra Achille e la tartaruga è tra *due* tempi/spazi diversi. Ne *Il giardino dei sentieri che si biforcano* il racconto presenta *anche* una relazione a due: tra il cinese dottor Yu Tsun (ex professore di inglese alla Hochschule di Tsingtao e bisnipote di Ts'ui Pen) e il sinologo inglese Stephen Albert (che è stato anche missionario a Tientsin). La relazione, come tutti sanno, finisce con l'uccisione di Albert da parte di Yu Tsun secondo le regole di una *spy story* ma il racconto di Borges va oltre questa storia a due e approfondisce il significato di *labirinto*.
Quando si considera un labirinto fisico quali interrogativi si pongono? Prendiamo ad esempio il labirinto di Robert Morris costruito nel 1982 nella fattoria di Celle a Santomato di Pistoia riprodotto in una serigrafia dello stesso autore:

[4] Il testo di Lewis Carroll: "Quello che la tartaruga disse ad Achille" è pubblicato integralmente alle pp. 47–49. I nuovi dialoghi della tartaruga con Achille iniziano da p. 67 in poi. La litografia di Escher *Convesso e concavo* del 1955 è riportata a p. 117.

Come scrive Alessandra Acocella un labirinto può essere visto da due punti di vista: quello dell'artefice e quello di chi inizia a percorrerlo:

> Del termine labirinto, nella sua accezione spaziale, può essere data una duplice definizione, a seconda del punto di vista adottato nel rapportarsi ad esso. Nell'ottica dell'artefice il labirinto è una struttura architettonica della quale egli "ha equilibrato l'effetto di inganno e l'effetto di seduzione negli aggrovigliamenti, nelle ramificazioni, nelle giravolte e nei ritorni" (Rosenstlehl, 1979, p. 7). Al contrario per chi vi s'imbatte, ignaro del disegno complessivo dell'intricato percorso, il labirinto è lo spazio che si mostra progressivamente per parti davanti ai suoi occhi, una volta varcata la soglia ed iniziato l'ignoto cammino. Il punto di vista del creatore, totalizzante e onnicomprensivo, è paragonabile a quello di un osservatore che contempla da un luogo distante e sopraelevato. La visione dall'alto riduce l'articolata figura geometrica ad un insieme afferrabile nella sua complessità, ne svela l'intima logica e composizione. (Acocella, 2008)

Nel racconto di Borges il *labirinto* a cui si fa riferimento è un *labirinto di simboli*, ma ci sono ugualmente i due punti di vista prima ricordati: quello del lettore/visitatore che racconta le sue esperienze soggettive percorrendo il labirinto e quello dell'osservatore che, "da un punto di vista distante e sopraelevato" cerca di ricostruire la forma del labirinto voluta dal suo autore.
Il primo punto di vista è stato scelto da Ethan Weed (2004) che ha letto il testo di Borges come se dovesse "muoversi attraverso un labirinto per esplorare uno spazio sconosciuto" e il risultato di questa sua esperienza è che si tratta di un labirinto senza centro come nella litografia di Escher *Up and Down*:

> I labirinti dei testi medievali erano complessi, ma avevano un centro che poteva trovare un assiduo lettore ben preparato a quel viaggio. Invece nel *Giardino dei sentieri che si biforcano* non è possibile trovare un singolo, incontestabile centro, ma piuttosto molti possibili centri nessuno dei quali è completamente soddisfacente per un lettore che cerchi di scoprire il messaggio nascosto. La storia

> non permette al lettore di cambiare prospettiva per vedere il labirinto dall'esterno. Chi legge, innocente, per la prima volta il testo è lasciato con l'impressione che c'è qualcosa che non capisce, qualcosa che deve aver dimenticato. Questa impressione rimane anche in chi legge la storia più volte. (.) Se c'è un centro nel *Giardino dei sentieri che si biforcano* consiste esattamente nello stesso tipo di di indecisione che trovo quando sono al centro della litografia di Escher *Up and Down*. È un tipico labirinto con un'unica via in cui il soggetto entra, passa molto vicino al centro ma non può saperlo perché il sentiero lo porta lontano prima di ritornare al centro […]. Un labirinto è un posto che non si può lasciare e se lo si lascia è per la stessa porta per cui si è entrati. (Weed, 2004, pp. 187–188)

Se si osserva *Up and Down* di Escher del 1947 si tratta di una immagine diversa da quella *Convesso e concavo* prima ricordata. In tutte e due è rappresentato un labirinto senza un centro ma mentre nella prima c'è una relazione tra due tempi/spazi diversi nella seconda c'è la circolarità di uno stesso tempo/spazio che differisce per alcuni dettagli. C'è un'immagine al tempo t di un uomo sulle scale che parla a una donna alla finestra e la stessa immagine al tempo t+1 senza poter stabilire quale immagine viene prima e quale dopo: due immagini di un "invisibile labirinto di tempo" (Borges, 1944, "Il giardino dei sentieri che si biforcano", in op. cit., vol. I.).
Gabriel Screiber e Roberto Umansky (2001), a differenza di Weed, cercano di porsi da un punto di osservazione esterno e, come Odifreddi, cercano un appoggio nella matematica per interpretare questi due testi di Borges. La loro analisi porta a sottolineare che i tempi plurimi e ramificati di cui parla Borges sono rintracciabili nei testi scientifici di Poincaré e Prigogine:

> La teoria matematica della biforcazione trae origine dall'opera di Henri Poincaré su i sistemi di equazioni differenziali non lineari. Il termine biforcazione fu coniato da Poincaré per indicare l'emergere di più soluzioni da una data soluzione. Ogni volta che la soluzione di una equazione o sistema di equazioni cambia qualitativamente a seconda del valore di un parametro, detto valore critico, si ha il fenomeno della biforcazione. Il punto dello spazio dei parametri dove avviene tale evento è detto punto di biforcazione […]. L'idea della biforcazione è centrale nelle teorie della fisica contemporanea delle termodinamica irreversibile. Il contributo della scuola di Prigogine a questo proposito sono di importanza primaria mostrando che le biforcazioni, sotto condizioni di equilibrio far-from, costituiscono il naturale meccanismo di evoluzione e di raggiungimento di complessità. (Schreiber & Umansky, 2001, pp. 61–62)

C'è quindi una identità di vedute tra i due testi di Borges e quelli di Poincaré e Prigogine fino alle recenti teorie di un Caos in cui all'interno è possibile individuare un ordine. Screiber e Umansky analizzano anche le relazioni tra Borges e la teoria dei frattali di Mandelbrot e concludono scrivendo che "Borges preferisce trattare di biforcazioni e aspetti del caos che hanno a che fare con il tempo piuttosto che trattare di geometrie frattali che hanno a che fare con lo spazio" (Schreiber & Umansky, 2001, p. 71).

4. Borges e la ricerca di infinito

L' interpretazione prima ricordata converge con quella di Italo Calvino che precisa le tre ipotesi del tempo proposte da Borges: un idea di tempo puntuale, un idea di tempo dominata dalla volontà, un'idea di tempo plurimo e ramificato:

> Le ipotesi sul tempo che vengono proposte nel *Giardino dei sentieri che si biforcano,* ognuna contenuta (e quasi nascosta) in poche righe, sono: un'idea di tempo puntuale, quasi un assoluto presente soggettivo ("riflettei che ogni cosa, a ognuno, accade precisamente, precisamente ora. Secoli e secoli, e solo nel presente accadono i fatti: innumerevoli uomini nell'aria, sulla terra e sul mare, e tutto ciò che realmente accade, accade a me"); poi un'idea di tempo determinato dalla volontà, il tempo di una azione decisa una volta per tutte, il cui futuro si presenti irrevocabile come il passato; e infine l'idea centrale del racconto: un tempo plurimo e ramificato in cui ogni presente si biforca in due futuri, in modo da formare "una rete crescente e vertiginosa di tempi divergenti, convergenti e paralleli". Questa idea di infiniti universi contemporanei in cui tutte le possibilità vengono realizzate in tutte le combinazioni possibili. (Calvino, 1995, vol. I, p. 1298)

Calvino termina il saggio citando un passo di Borges che vede in questi infiniti mondi possibili il confine che separa il mondo, che vive nel tempo reale, dal mondo che vive nel tempo più ambiguo della letteratura e dell'arte:

> Nel tempo reale, nella storia, ogni volta che un uomo si trova di fronte a varie alternative opta per una ed elimina o perde le alte; non così nell'ambiguo tempo dell'arte, che somiglia a quello della speranza e dell'oblio (Borges, 1982, "Il falso problema di Ugolino", p. 1278)

La biblioteca di Babele e *La teoria dei cicli* di Borges (1944, vol. I, pp. 680–689; vol. I pp. 568–578) permettono ulteriori precisazioni. Floyd Merrell (1991) ha presentato una interpretazione matematica de *La biblioteca di Babele* in cui rileva la sintonia di Borges con le posizioni metodologiche di Feyerabend o della così detta interpretazione di Copenhagen della teoria dei quanti e conclude affermando che Borges ne La Biblioteca presenta "uno scenario di incertezze generalizzato" anche perché ogni modello, e non solo quello della Biblioteca, è fiction.

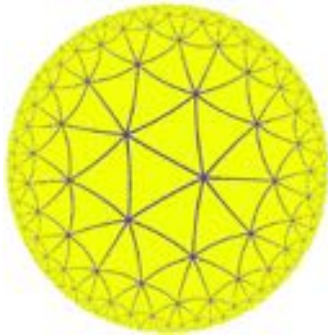
> Borges, come Feyerabend e i teorici della RMV (Radical Meaning Variance) in generale, mettono in guardia su i limiti del mondo e sulla povertà della nostra concezione del mondo. La Biblioteca e le altre costruzioni di Borges demoliscono l'universo di Newton che fa emergere le diverse antinomie. Ma Borges non vuole un'altra "realtà" che lo sostituisca. Piuttosto egli contrappone una nuova perdita di certezza nei confronti delle vecchie certezze verso uno scenario di incertezza generalizzato. Katherine Hayles (1984) sottolinea che in generale la fiction di Borges "differisce dai modelli scientifici utilizzando il concetto che ogni cosa, inclusa la realtà, è fiction" mentre per contro "i modelli scientifici sono utili perché in qualche misura riflettono la realtà" (Hayles, 1984, p. 151). Anche se

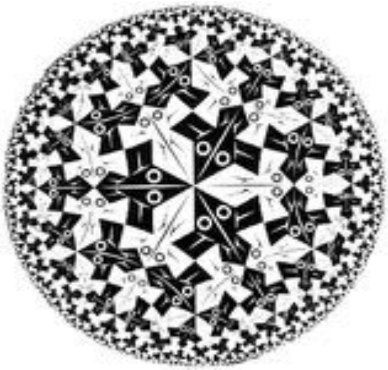
> considero il saggio della Hayles brillante penso che sia complessivamente errato: Nietzche, Vaihinger e i teorici della RMV e la maggior parte dei "nuovi fisici" vedono correttamente tutti i modelli come fiction. O, per parafrasare Werner Heisenberg (1958), tutte le teorie non sono della realtà ma della interazione della nostra mente con la realtà. (Merrell, op. cit., p. 238)

C'è però, in questo scenario di incertezza, la ricerca di *infinito* che sostituisce la precedente immagine di *labirinto* e in questa direzione è interessante ripercorrere il percorso di Escher nei suoi diversi tentativi di rappresentarlo.
In un articolo pubblicato nel 1959 Escher spiegò che ciò che lo spingeva a rappresentare l'infinito (che esiste "eternamente nel tempo e interminabilmente nello spazio") era il superare l'angosciante idea del "senza spazio", il "nulla" (che è diverso dal vuoto):

> L'uomo è incapace immaginare che in un qualche punto al di la delle stelle più lontane nel cielo notturno lo spazio possa avere fine, un limite oltre il quale non v'è che il nulla. Il concetto di "vuoto ha per noi un certo significato, perché non possiamo almeno visualizzare uno spazio vuoto, ma il nulla, nel senso di "senza spazio" è al di la della nostra capacità di immaginazione. È per questo che da quando l'uomo è venuto a giacere, sedere, stare in piedi, a strisciare e camminare senza terra, a navigare, cavalcare e volare sopra di essa (e lontano da essa), ci siamo aggrappai a illusioni, a un al di là, a un purgatorio, un cielo e un inferno, a una rinascita o un nirvana, che esistono tutti eternamente nel tempo e interminabilmente nello spazio. (Ernst, 2007, p. 106)

All'inizio, come precisa Bruno Ernst (2007, pp. 106–107), Escher utilizzò la forma quadrata e vennero fatte le xilografie da *Sviluppo II* del 1939 a *Sempre più piccolo I* del 1956 (la prima xilografia riprodotta nella sequenza sotto riportata) in cui la ricerca di infinito è risolta nel rappresentare i grandi rettili ai bordi della xilografia sempre più in piccolo via via che vanno verso il centro ("la bisezione delle figure è stata portata all'assurdo. L'animale più piccolo avente ancora una testa, una coda e quattro zampe, è lungo circa 2 mm"). Per lo spettatore l'infinito è visto, come nel racconto *Una discesa nel Maelström* di Edgar Allan Poe, dai bordi di un gorgo in cui si è trascinati oppure, come Escher suggerisce, come un'infinità sequenza di figure che nascono in un punto lontano, imprecisato, e prendono a poco forma per poi diventare visibili e grandi accanto allo spettatore.





Ma Escher a proposito della xilografia *Sempre più piccolo* scrive che "dal punto di vista della composizione questo lavoro è solo in parte soddisfacente" e cerca altre soluzioni che gli verranno dall'incontro con il matematico Harold Scott Macdonald Coxeter che gli fece conoscere il *Disco di Poincaré* che è un modello di geometria iperbolica realizzato dal matematico francese Jules Henri Poincaré: quando questo disco viene tassellato tramite triangoli iperbolici si ha la configurazione sopra riportata (la seconda nella sequenza sopra riportata) ed il bordo del disco va verso l'infinito. Coxeter inviò ad Escher una sua comunicazione del 1957 inviata alla Royal Society del Canada (Coxeter, 1957) che conteneva una figura (la terza nella sequenza sopra indicata) ed Escher ne rimase molto colpito. Escher iniziò a realizzare le xilografie *Limiti del cerchio I, II, III, IV* di cui riproduciamo la III (la terza nella sequenza sopra riportata) e così Escher commenta la xilografia *Limite del cerchio III* realizzata nel 1959:

> Nella xilografia a colori *Limite del cerchio III* sono state eliminate del tutto le imperfezioni di *Limite del cerchio I.* Si hanno ancora soltanto gruppi di "traffico scorrevole", tutti i pesci che appartengono a un insieme e hanno uno stesso colore e nuotano uno dietro l'altro, lungo un binario circolare. […] Salgono verticali da lontananze infinite come razzi, partendo dalla circonferenza e di nuovo ci ripiombano, non una sola componente raggiunge mai il confine. Poiché al di là vi è il *nulla assoluto*. Eppure questo mondo circolare non può sussistere senza il

> vuoto che lo circonda – non solo per il fatto che un *dentro* presuppone un *fuori,* ma anche perché gli immateriali archi della circonferenza sono ordinati in modo strettamente geometrico *nel nulla.*

La stessa xilografia è commentata da Coxeter nel 1979 che descrive in questo testo anche come sono iniziati i suoi rapporti con Escher:

> Ho incontrato Escher nel settembre del 1954 quando una esposizione dei suoi lavori fu sponsorizzata dal Congresso Internazionale di Matematici ad Amsterdam di quell'anno. Nei precedenti 17 anni aveva realizzato disegni […] con due innovazioni rimarcabili: l'unità base (in genere un singolo animale o la metà di un animale simmetrico o due differenti animali) è ripetuta non solo per traslazioni ma anche per altre isometrie (o *trasformazioni congruenti*): rotazioni, riflessi, riflessi con scorrimento; queste ripetizioni sono realizzate ingegnosamente senza che vi siano interstizi. Nel linguaggio della matematica (disciplina di cui Escher si proclama risolutamente "ignaro di conoscenze") questa unità di base è una regione fondamentale per un gruppo simmetrico). In una lettera del dicembre 1958 mi scrisse: "La ringrazio […] per il suo testo sulla "Crystal Symmetry and its Generalizations" […] e specialmente la figura 7 di pagina 11 [la terza figura riprodotta nella sequenza sopra riportata] mi ha procurato uno shock. Da molto tempo sono interessato a modelli con motivi che diventino sempre più piccoli fino a che non raggiungano i limiti di una infinita piccolezza". (Coxeter, 1979)

Coxeter in questo testo analizza on dettaglio la simmetria non euclidea presente nella xilografia *Limite del cerchio III* e se si vuole capire come Escher sia riuscito a realizzare questa xilografia si può leggere il testo di Bill Cassellman (2013) disponibile in rete.

5. Borges e la biblioteca di Babele

I rapporti di Escher con la matematica sono simili a quelli di Borges ma la ricerca di infinito che entrambi portano avanti è diversa. Per capire questa diversità viene ricordata l'interpretazione de *La biblioteca di Babele* fatta dal logico matematico Carlo Toffalori sulla base dei due teoremi di incompletezza dimostrati da Kurt Gödel nel 1931:

> *La biblioteca di Babele* […] Lo spunto iniziale è ben noto: si tratta di una biblioteca "interminabile", i cui scaffali sembrano raccogliere qualsiasi possibile combinazione – sensata o insensata – di lettere dell'alfabeto, così che a "righe ragionevoli" e "notizie corrette" si alternano sovrabbondanti e impenetrabili "cacofonie, farragini verbali e incoerenze". Di questo universo "informe e caotico" ogni interpretazione è possibile. I mistici possono cercarvi "il libro ciclico" che "è Dio", l'uomo comune il senso della propria vita. Si può addirittura pensare che su qualche scaffale compaia "il libro totale", "la chiave e il compendio perfetto di tutti gli altri", la rivelazione, la Verità, e a chiunque riesca ad accostarlo sia concesso di diventare "simile a Dio". Ma la biblioteca può anche prestarsi a un ulteriore interpretazione: perché non supporre che essa non si altro che l'aritmetica, così inaccessibile a ogni umana percezione, e gli affanni di

> scoprire il “libro totale” corrispondano ai tentativi impacciati di comprendere i fondamenti dei numeri? Così la Biblioteca diventerebbe, e senza forzature alcuna, proprio la figura dei teoremi di incompletezza: un’aritmetica di Babele. (Toffalori, 2011, pp. 185–186)

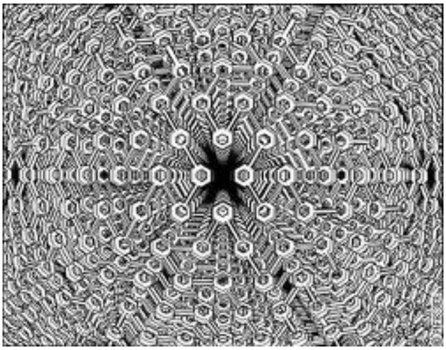
Toffalori segue questa interpretazione della Biblioteca come “aritmetica per comprendere il fondamento dei numeri” e come per questa via si possa capire che ogni numero ha un suo DNA, un suo “biglietto da visita”.

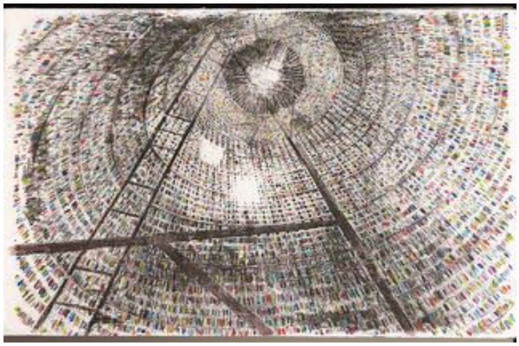
> Tanto per cominciare i numeri naturali possiedono anche loro un DNA che si presti all’esigenza? Per sorprendente che possa apparirvi, la risposta è sì. […] Ad esempio 120 è $2^3 \times 3 \times 5$ e 750 è $2 \times 3 \times 53$. Ma quando diciamo che 120 è – lui e lui solo – $2^3 \times 3 \times 5$ e che non può che decomporsi che così implicitamente affermiamo che quei tre esponenti 3, 1, 1 – nell’ordine in cui si susseguono costituiscono il suo biglietti da visita, la sua carta, l’impronta del suo codice genetico, senza equivoco possibile […]. È su questa base che Gödel riusci a numerare ordinatamente lettere, parole, dimostrazioni, ragionamenti. Tra loro tutto diventa numero, come per miracolo, senza confusioni o sovrapposizioni. (Toffalori, op. cit., p. 193)

Il percorso è ormai tracciato. I numeri, seguendo Gödel, hanno una “sorta di autocoscienza, di autocritica, di capacità di riflettere su se stessi” e, seguendo questo “spericolato” sillogismo, Toffalori può dimostrare che sono “vivi”:

> A: sui numeri si possono concepire principi, dimostrare teoremi, formulare dubbi. B: questi principi, teoremi e dubbi sono anch’essi numeri, ma se tutto questo ha senso e fondamento – e fondamento ne ha, come Gödel ci mostra – non c’è che una conclusione: che i numeri vivono. (Toffalori, op. cit., pp. 195–196)

La prova visiva della diversa ricerca di infinito di Escher rispetto a Borges si può avere immediatamente considerando due disegni della Biblioteca di Babele: quello del francese Philippe Fassier, specialista in disegni di labirinti, e quello della belga Sophie Racine, illustratrice e realizzatrice di film di animazione





Per dare una idea di complessiva della *Biblioteca di Babele*, il disegnatore francese si basa sulla indicazione di Borges di una biblioteca fatta da “un numero indefinito, forse infinito, di gallerie esagonali” mentre la disegnatrice belga si basa su “la scala spirale che s’inabissa e s’innalza nell’ignoto” (Borges, “La Biblioteca di Babele”, op. cit., vol. I, p. 680). Ma la relazione tra ordine e caos non è nella architettura della Biblioteca (come prima era nella architettura del labirinto): è all’interno dei contenuti dei libri. I libri, come verrà esplicitato nel cap. IV, sono *vivi* in tutte le loro diverse edizioni e copie per cui ogni singolo libro (con quella data edizione, acquistato da quella data persona, collocato in quel dato scaffale ecc.) ha una sua vita, identità e storia. Nella *Biblioteca di Babele* invece i libri perdono la loro identità e diventano combinazioni di parole per cui in questa Biblioteca ci sono insieme *Libri* (quando la combinazione di parole ha senso anche se non ha una identità libraria di anno di edizione, copertina ecc.) e *Non libri* (quando la combinazioni di parole è priva di senso).
La differenza tra la ricerca di infinito di Escher e quella di Borges è che Escher, pur presentando forme tutte uguali come i pesci nella xilografia *Limiti del cerchio III*, lascia ad ogni pesce una sua possibile identità mentre Borges nella sua Biblioteca mette insieme *Libri* e *non Libri*. L’interpretazione della Biblioteca più corretta è perciò quella di Toffalori che vede in quella Biblioteca non la vertigine di un numero “indefinito e forse infinito di gallerie” che contengono libri ognuno pronto per essere letto ma la *vertigine di numeri*.
Il numero di libri della biblioteca di Babele è stato calcolato da Odifreddi (1997, p. 11) in 25 elevato a 656.000 che equivale a 10 elevato a 900.000 e scriverlo richiederebbe circa 900.000 cifre. Più grande era la biblioteca immaginata nel 1715 da Leibniz (2001) (C alla 1000.000.000 dove C è il numero dei caratteri incluso lo spazio bianco) e ugualmente più grande era quella descritta da Kurd Lasswitz (1904) (in cui il numero dei volumi è 10

elevato alla 2.000.000). Tutti i volumi di queste biblioteche[5] sono comunque in un numero molto più piccolo del numero di tutti gli atomi che compongono il mondo come ipotizza Borges ne *La dottrina dei cicli* (Borges, "La dottrina dei cicli", op. cit., vol I, pp. 568 – 583): questo numero calcolato da Odifreddi arriva a 10 elevato a 1.000.000.000.000 e, per scriverlo sarebbe necessario almeno un miliardo di miliardi di cifre (Odifreddi, 1997, p. 12). Per avere un'idea di quella che Borges chiama la "stravagante felicità" (Borges, op. cit., vol. I, p. 684) di fronte alla vertigine di numeri si può leggere il libro di Bruno D'Amore (2009) in cui è ricordato che il valore di π che è 3,14 con infinite cifre dopo la virgola, senza periodi. D'Amore, per far capire la "felicità" di cui parla Borges, riporta le prime 100.000 cifre e il risultato è, come scrive D'Amore, "impressionante": queste 100.000 cifre prendono più di cinque pagine del libro (D'Amore, 2009, pp. 11–17).

6. Borges, l'Yijing e il sacro

Che relazione si può trovare tra la *Biblioteca di Babele* con la sua *vertigine di numeri* e il l'*Yijing Classico dei Mutamenti*? Questa vertigine è rintracciabile nel numero sempre più elevato di lettori e lettrici che lo consultano da quattromila anni ma, nel *Classico dei mutamenti,* è presente un'altra situazione: la *sacralità dei numeri.* La sua origine mitica è intrecciata con il quadrato magico, Bouvet vede nelle sei linee dell'esagramma i sei giorni necessari per la creazione biblica, i 64 esagrammi sono, come ricorda Odifreddi (2005) "praticamente lo stesso numero, cioè 63, degli elementi della tavola periodica che Dimitri Mendeleev letteralmente sognò una notte del 1869, dopo aver giocato un solitario prima di addormentarsi". Inoltre Cyrille Javary e Faure ci informano che le parole che compongono l'*Yi Jing* sono *4.082* una cifra molto vicina a *4.096* che è il prodotto di *64×64* e viene così dimostrato "questo insieme di meticolosità e leggerezza, di perfezionismo e di humour con cui i cinesi dell'Antichità amavano cesellare i loro grandi testi classici" (Javary & Faure, 2002, p. 15).

Di fronte l sacro gli appassionati di matematica (e anche quelli che non la amano) si dividono. Piergiorgio Odifreddi sul *Classico dei mutamenti* esprime la stessa ostilità espressa dal grande studioso della scienza e tecnologia nell'antica Cina Joseph Needham. Odifreddi parla dell' *Yi Jing* come un "libro della sorte" che osa proporre "una chiave per spiegare gli infiniti avvenimenti possibili" attraverso 64 "miseri esagrammi" con "relativi oscuri commenti":

> [C'è una] nutrita schiera dei cosiddetti "libri della sorte" o "della ventura": di quei testi, cioè, che a partire dal classico cinese *I Ching*, o *Libro dei Mutamenti* (Adelphi), millantano, in maniera seria o faceta, di fornire un aiuto divinatorio per districarsi nel casi della vita. Con un approccio ossimorico alla previsione del

[5] Il calcolo dei libri presenti nella biblioteca di Leibniz e in quella di Lasswitz è presentato nel saggio di Carlo Casolo. Matematica e Letteratura, che può essere letto in rete (http://web.math.unifi.it).

> futuro, essi spesso pretendono di dominarne la necessità attraverso la casualità: affidandosi, cioè, all'estrazione di bastoncini o al tiro di monete [ne] *I Ching* […]. Come diceva il premio Nobel per la fisica Niels Bohr, però, fare previsioni è sempre difficile, soprattutto sul futuro. Per tutelarsi, i maestri divinatori preferiscono nascondere le loro dietro formulazioni vaghe e generiche, delegandone al fruitore la corretta interpretazione: il che, naturalmente, risulta sempre facile col senno di poi, cioè "dopo" che i fatti sono ormai avvenuti, ma altrettanto sempre impossibile "prima". D'altronde, come potrebbero i miseri 64 esagrammi dell' *I Ching* e i relativi oscuri commenti fornire, da soli, una chiave per gli infiniti avvenimenti possibili, se non attraverso un'interpretazione sfrenatamente creativa? (Odifreddi, 2006, p. 47)

Chi scrive ama moltissimo gli scritti di Odifreddi e Needham ma ama anche l'*Yijing* e Borges che ha scritto ottantenne questa poesia *Per una versione de I Ching* (Borges, 1976, p. 1011).

Per una versione de I Ching

L'avvenire è altrettanto irreparabile
Quanto il rigido ieri. Non esiste cosa
Che non sia una lettera muta
Dell'eterna scrittura indecifrabile
Il cui libro è il tempo. Chi si allontana
Dalla propria casa vi è già tornato. La nostra vita
È il sentiero futuro già percorso.
Niente ci dice addio. Niente ci lascia.
Non cedere. L'ergastolo è buio.
La dura trama è d'incessante ferro.
Ma in qualche cantuccio della tua cella
Può esserci una svista, una fenditura.
La strada è fatale come la freccia,
Ma nelle crepe sta in agguato Dio.

In questa poesia *il Classico dei mutamenti* è visto come relazione tra l'esperienza umana (xing) e il destino (ming). Di fronte a una "eterna scrittura indecifrabile il cui libro è il tempo" c'è un destino "irreparabile" che è "fatale come la freccia" ma "in qualche cantuccio" della cella in cui ognuno è collocato "può esserci una svista, una fenditura", una possibilità di mutamento. Ed è in questa possibilità di mutamento, in questa svista, in questa crepa che "sta in agguato Dio".

Nota. *Con questo testo Vittorio Capecchi ricorda Jorge Luis Borges a trenta anni dalla sua morte avvenuta il 14 giugno del 1986 insieme alla rivista di modelli matematici in inglese che continua a dirigere dal 1966 (Quality and Quantity. International Journal of Methodology edita da Springer Olanda) in relazione alla quale verrà tenuto un convegno a Bologna nell'ottobre del 2017 dal titolo "Complessità e previsione" per festeggiare i suoi 50 anni.*

Bibliografia

Acocella, A. (2008). Spazi dedalici. I labirinti di Robert Morris tra realtà ideale e realtà fisica, *Blog architettura di Pietra.* Disponibile su: *http://www.architetturadipietra.it/wp/?p=1932*

Borges, J. L. (1932). *Discusión.* Buenos Aires: Manuel Gleizer (trad. it. 1985, *Discussione, Tutte le opere,* vol. I, Milano: Mondadori).

Borges, J. L. (1944). *Ficciones (1935-1944).* Buenos Aires: Sur (trad. it. 1967, *Finzioni,* Torino: Einaudi).

Borges, J. L. (1976). "*La moneta di ferro", Tutte le opere,* vol. II. Milano: Rizzoli.

Borges, J. L. (1982). *Nove saggi danteschi*. Milano: Mondadori.

Buzon, F. de (2003). Romans, mondes possibles. *Magazine Littéraire 416 Leibniz*, Janvier. http://www.magazine-litteraire.com/romans-mondes-possibles

Calvino, I. (1995). *Saggi 1945-1985* (M. Barenghi Ed.). Milano: Mondadori.

Casselman, B. (2013). How Did Escher Do It? How did M. C. Escher draw his *Circle Limit* figures? *American Mathematical Society*, *Feature Column, Montly essays on mathematical topics*. http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-circle-limit

Coxeter, H. S. M. (1957). Crystal Symmetry and Its Generalization. *Transactions of Royal Society Canada*, *51*, ser. 3, sec. 3, 1–13.

Coxeter, H. S. M. (1979). The non-euclidean symmetry of Escher's Picture: Circle Limit III. *Leonardo*, *12*(1), 19–25.

D'Amore, B. (2009). *Matematica. Stupore e poesia.* Firenze: Giunti.

Deleuze, G. (1980). *Les Cours de Gilles Deleuze (Deleuze/Leibniz).* Disponibile su: www.webdeleuze.com

Deleuze, G. (1988). *Le pli. Leibniz et le Baroque* (trad. it. 1990, *La piega. Leibniz e il Barocco*, Torino: Einaudi).

Ernst, B. (2007). *Lo specchio magico di M. C. Escher.* Köln: Taschen.

Hayles, K. (1984). *The cosmic web: Scientific field models and literary strategies in the twentieth century*. Ithaca: Cornell University Press.

Heisenberg, W. (1958). *Physics and philosophy*. London: George Allen and Unwin Edition.

Hofstadter, D. R. (1984). *Gödel, Escher, Bach: Un'eterna ghirlanda brillante*. Milano: Adelphi.

Javary, C., & Faure, P. (2002). *Yi Jing: Le livre des changements*. Paris: Albin Michel.

Knecht, H. H. (1981). *La Logique chez Leibniz: Essai sur le rationalisme baroque*. Lausanne: L'Age d'homme.

Knecht, H. H. (2000). Leibniz le poète et Borges le philosophe: Pour une lecture fantastique de Leibniz. *Variaciones Borges*, 9, 104–146.

Lasswitz, K. (1904). *Traumkristalle.* Leipzig: B. Clischer Nachfolger (trad. it. 2006, *La Biblioteca Universale,* C. Bartocci Ed., *Racconti matematici,* Torino: Einaudi, pp. 128–138).

Leibniz, G. W. (2001). *Storia universale ed escatologia. Il frammento sull'Apokatastasis, 1715*. Genova: Il Melangolo.

Massarenti, A. (Ed.) (2006). *Leibniz: vita, pensiero, opere scelte*. Milano: Il Sole 24 ore.

Merrell, F. (1991). *Unthinking thinking: Jorge Luis Borges, mathematics, and the new physics*. West Lafayette, IN: Purdue University Press.

Mugnai, M. (2001). *Introduzione alla filosofia di Leibniz*. Torino: Einaudi.
Mugnai, M., & Pasini, E. (Eds.) (2000). *Leibniz: Scritti filosofici*. Torino: Utet.
Odifreddi, P. (1992a). *Jorge Luis Borges: I. Scandali della ragione.* Disponibile su: https://www.borges.pitt.edu/sites/default/files/9%20Odifreddi.pdf
Odifreddi, P. (1992b). *Jorge Luis Borges. Labirinti dello spirito*. Disponibile su: https://www.borges.pitt.edu/sites/default/files/10%20Odifreddi_0.pdf.
Odifreddi, P. (1997). *Un matematico legge Borges*. Disponibile su: http://www.asia.it/media/documenti/docs_odifreddi/borges.pdf.
Odifreddi, P. (2001). *C'era una volta un paradosso: Storie di illusioni e verità rovesciate*. Torino: Einaudi.
Odifreddi, P. (2005). La scoperta dell'alfabeto e dei numeri. *Archivio La Repubblica.it*.
Odifreddi, P. (2006). Il precursore di Nostradamus. Pubblicato il *Triompho di Fortuna* del matematico Sigismondo Fanti, *La Repubblica*, 3 novembre 2006.
Rosenstlehl, P. (1979). Labirinto, *Enciclopedia Einaudi,* vol. VIII. Torino: Einaudi.
Rossi, P. (1960). Clavis universalis: *Arti della memoria e logica combinatoria da Lullo a Leibniz.* Milano-Napoli: Ricciardi.
Rossi, P. (2000). Da Leibniz problemi per Borges. L'arte di unire chiarezza, equilibrio e divertimento intellettuale. *Il Sole 24 ore, Supplemento della Domenica*, 17 dicembre 2000.
Schreiber, G., & Umansky, R. (2001). Bifurcations, Chaos and Fractal Objects in Borges *Garden of Forking Paths* and other Writings, *Variaciones Borges, 11*, 61–79.
Simon, H. (1971). Primera plana va mas lejos con Herbert Simon y Jorge Luis Borges, *Primera plana*, 414, 42–45.
Toffalori, C. (2011). *L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura*. Parma: Guanda.
Weed, E. (2004). A Labyrinth of Symbols: Explorig "The Garden of Forking Paths", *Varaciones Borges, 18*, 161–189.
Wichmann, J. (2003). The simultaneous representation of existing and non-existing phenomena in Borges' Ficciones, *Variaciones Borges*, *16*, 157–193.

Matematica: una questione D’AMORE

Anna Cerasoli
Autrice di testi divulgativi di matematica

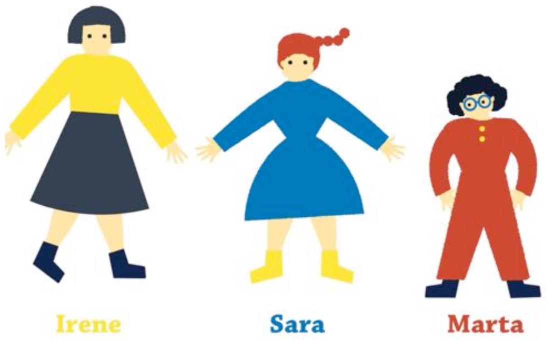
Sunto. *Matematica: una questione D’AMORE. Un facile gioco di parole? Sì, ma è anche sostanza. Perché è passione e amore quello che Bruno, in tutti questi anni, ha profuso nel suo impegno per la didattica della matematica. E allora, per restare in tema di sentimenti e festeggiarlo alla sua maniera, parlerò di amicizia, amicizia ‘in senso matematico’!*

1. Introduzione

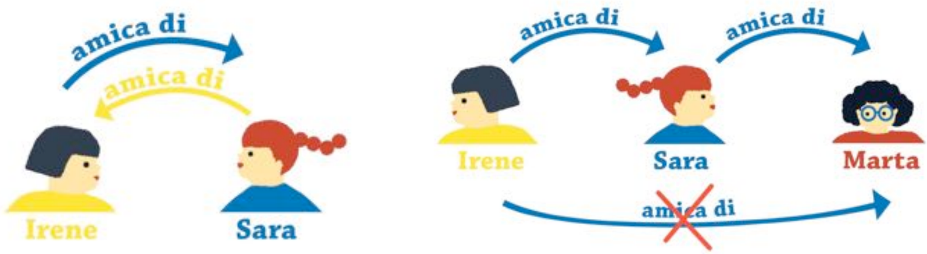
Può sembrare un facile gioco di parole ma, in questo caso come non mai, corrisponde alla sostanza. Ogni insegnamento è ‘vestito’ del modo in cui avviene e, specialmente se si tratta di matematica, questo è un fattore fondamentale: curiosità, entusiasmo, fiducia in se stessi, tenacia, resistenza alla frustrazione da errore … sono ‘abiti’ importanti. Quello di Bruno è un abito fatto di amore, di passione. Passione che ha pervaso tutte le varie forme in cui, nell’arco di tanti anni, si è dedicato alla didattica della matematica. Ma anche di amicizia, nei confronti di chi ha condiviso i suoi progetti.
Ed ora, per restare in tema di sentimenti, vorrei festeggiarlo nel modo a lui più congeniale: parlando proprio di amicizia, ma in ‘senso matematico’. Presenterò due modi differenti di usare questa relazione nella mia attività di divulgatrice di matematica per bambini e ragazzi. Nel primo caso la relazione di amicizia rappresenta un esempio di relazione simmetrica non transitiva, nel secondo caso la uso come metafora di trasformazione proiettiva.

2. L’amicizia

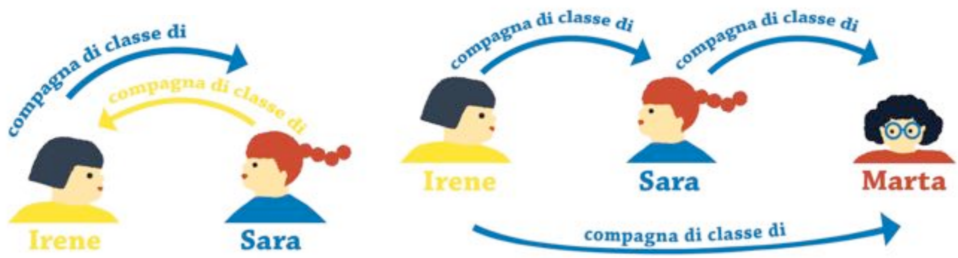
Quest’anno, in classe, siamo in 24 visto che ci sono anche Elena e Irene. Elena è arrivata da noi quando la scuola era iniziata già da un po’ perché suo padre, che costruisce le strade, non sta mai fermo in una città. Irene, invece, si è presentata proprio il primo giorno di scuola ed era molto triste perché pensava ai suoi vecchi compagni; a un certo punto è anche scoppiata a piangere e noi non sapevamo cosa dire. Per fortuna poi siamo diventati amici.
Lei è diventata amica soprattutto di Sara, infatti vanno a danza insieme e fanno i compiti insieme. Sara è anche amica di Marta ma Irene no, non vuole proprio farsela amica, forse perché Marta è sempre saputella e invece lei è timida.



La maestra dice che l'amicizia è così, non è una cosa che si può imporre e non è una cosa che si può trasferire: "L'amicizia non è una relazione *transitiva,* cercate di capire; però ha una bella proprietà, è una relazione *simmetrica,* e questo vuol dire che se Irene è amica di Marta, sicuramente Marta è amica di Irene: si rispetteranno reciprocamente!".

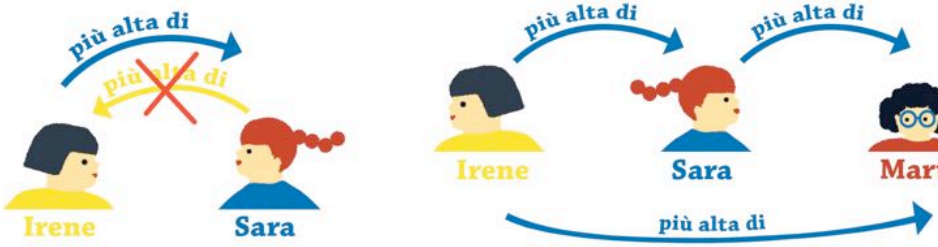


Noi non capivamo bene la parola 'transitiva', allora la maestra ce l'ha spiegata così: "Pensate a quest'altra relazione: Irene *è compagna di classe di* Sara e Sara *è compagna di classe* di Marta, perciò Irene è automaticamente anche *compagna di classe* di Marta. Essere *compagna di classe* è una relazione transitiva, perché passa sicuramente da Irene a Marta. Capito?" […]



A quel punto la maestra non la finiva più e ha voluto anche spiegarci le relazioni che non sono simmetriche, tipo questa: "Se Irene è più alta di Sara, Sara *non* è più alta di Irene!". (È ovvio). "Però, a differenza di *essere amica,* la relazione *essere più alta* è una qualità che si trasferisce, è una relazione transitiva; infatti, sapendo che Irene è più alta di Sara e Sara è più alta di

Marta, senza che nessuno ce lo dica, sappiamo anche che Irene è più alta di Marta”.



Poi ci siamo messi a fare la ricerca di scienze e abbiamo tirato fuori dagli zaini le foglie che avevamo raccolto nel cortile per studiarle ben bene. Ma prima di cominciare a incollarle sui tabelloni la maestra ha voluto spiegarci anche una relazione che, poverina, non è simmetrica e nemmeno transitiva, però è una relazione bellissima. È questa: ‘essere mamma di …’.

Essere compagna di classe di	simmetrica e transitiva
Essere amica di	simmetrica e non transitiva
Essere più alta di	non simmetrica e transitiva
Essere mamma di	non simmetrica e non transitiva

(Tratto da: Cerasoli, 2016a, pp. 52–55)

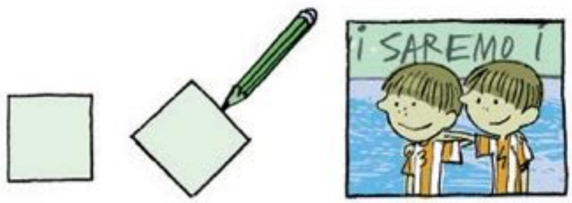
3. Gemelli, fratelli, cugini … e amici

«Nonno, ti piace questa foto mia e dei miei amici? Io non sono venuto molto bene perché Marco mi stava facendo lo sgambetto, però siamo belli con la nuova maglia della squadra! Vero?»

«Molto belli. La mamma è stata proprio brava a cucirvi i numeri sul petto. E gli altri campioni dove sono?»

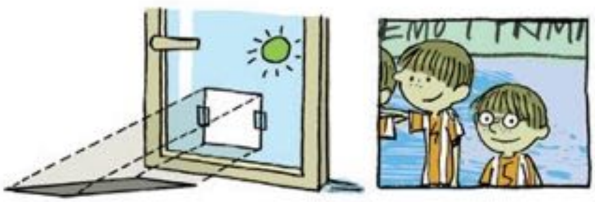
«Il poster con la squadra al completo l’abbiamo esposto in palestra. Siamo fortissimi, nonno! Abbiamo già vinto due partite. Non come l’anno scorso che eravamo ultimi in classifica! Guarda qui, dietro di noi si vede anche lo striscione che ci siamo preparati per la prossima partita: DA ULTIMI SAREMO I PRIMI, che te ne pare?»

«Mi sembra un buon augurio! Ma questo ragazzo che somiglia a Marco e ai suoi fratelli chi è?»
«È Andrea, il loro cugino. Facci caso, nonno, Marco somiglia moltissimo ai suoi due fratelli Gianni e Giulio che, essendo gemelli, sono proprio uguali spiccicati. Andrea, che è soltanto cugino, ha alcune cose in comune con loro: i capelli rossi, le lentiggini e un po' il naso. Io, invece, ho solamente la loro stessa maglia!»
«La loro stessa maglia e tante cose in comune, siete amici! Dall'essere gemelli, fratelli, cugini e amici le somiglianze diminuiscono, ma qualcosa resta. Sai a cosa mi fa pensare questa situazione? Mi fa pensare a certe trasformazioni che può subire una figura geometrica, durante le quali accade un po' la stessa cosa. Te la voglio spiegare. Stammi a sentire perché è divertente. Riprendiamo un quadrato, il nostro beniamino. Ritagliamo un cartoncino a forma quadrata, lo appoggiamo su un foglio e disegniamo il contorno; ora spostiamo il cartoncino, *trascinandolo o ruotandolo* oppure *ribaltandolo*, scegli tu. Poi ne disegniamo ancora il contorno. Come sono i due quadrati secondo te? A quali dei ragazzi della foto ti fanno pensare?»
«Mi fanno pensare ai due gemelli: sono uguali!»



«Sì, è vero, sono uguali! I matematici, però, preferiscono chiamarli *congruenti*, per dire che sono sovrapponibili. In fondo, quello che interessa loro è che le figure abbiano la *stessa forma* e le *stesse misure*. Poco importa se, per esempio, i quadrati sono di colore diverso. Ecco perché l'aggettivo 'congruenti' è più appropriato di 'uguali'. Seguimi ancora. Riprendiamo il nostro cartoncino e guardiamo la sua ombra sul tavolo, mentre lo teniamo orizzontale, proprio sotto il lampadario. Cosa noti?»
«Beh … è sempre un quadrato, ma più grande!»

«A quali ragazzi della foto ti fanno pensare questi due quadrati?»
«Sembrano due fratelli, come Marco e Gianni o Marco e Giulio. Si somigliano moltissimo, ma uno è più grande dell'altro.»
«Hai ragione. Queste due figure sono *simili*, così le chiamano i matematici. Nel passaggio dall'una all'altra *si conserva la forma, ma cambiano le dimensioni*. I lati paralleli restano paralleli e gli angoli mantengono la stessa ampiezza. Le figure simili sono molto importanti: pensa alle cartine geografiche dell'Italia. La nostra penisola deve avere la stessa forma anche se più o meno rimpicciolita.»
«Sì, lo so. La maestra ci fa calcolare le distanze vere usando quei numeretti che stanno scritti in basso.»
«Quei numeretti sono il *rapporto di similitudine*. Ti faccio un esempio, se il rapporto è 1:1000000, allora significa che 1 centimetro sulla cartina corrisponde a 1 milione di centimetri nella realtà.»
«Quindi, nonno, 1 milione di centimetri sono … quanti chilometri sono?»
«Sono 10 chilometri. Quindi un centimetro corrisponde a 10 chilometri. E questo accade per qualunque segmento tu voglia considerare su quella cartina: il rapporto di similitudine è sempre lo stesso.»
«Nonno, ma non fu proprio con due triangoli simili che Talete sbalordì gli Egizi, quando misurò l'altezza della piramide? Come disse?»
«Misurate l'ombra della piramide e state sicuri che l'altezza della piramide è uguale alla sua ombra. Aspettò il momento in cui l'ombra del suo bastone era lunga come il bastone stesso e fu sicuro che anche l'altezza della piramide era lunga come l'ombra della piramide stessa. Con i triangoli simili, caro Filo, si possono misurare tante cose, anche il diametro del sole o la distanza tra due stelle. Ma torniamo a noi. Riprendiamo il nostro quadratino di cartone e attacchiamolo al vetro della finestra. Guarda cosa accade alla sua ombra, quando viene illuminato dai raggi solari. Vedi? Il quadrato si è trasformato in un parallelogramma: gli angoli non sono più retti ma i lati restano *paralleli a due a due*. Durante la giornata, la figura dell'ombra varia, ma i lati mantengono sempre il parallelismo.»



«Beh, insomma, nonno, il quadrato somiglia alla sua ombra, ma non tantissimo. A me, questa volta, vengono in mente Marco e suo cugino Andrea, che si somigliano, ma non troppo.»

«Sì, è vero, si somigliano soltanto in alcune cose, come accade tra il quadrato e il parallelogrammo. Per i matematici queste sono figure *affini*. Insomma, hanno una qualche parentela. Ebbene, in conclusione, nel passaggio da una figura a una sua affine, gli angoli non sono più gli stessi, ma si conservano le *linee parallele*.»
«E ora, nonno, ci sono rimasto solo io nella foto, da collegare a Marco. Voglio vedere quale figura ti inventi da poter collegare al quadrato.»
«Vai in camera tua e prendi la torcia elettrica, vedrai che bella somiglianza ti faccio scoprire!»
«Agli ordini, capo … Visto che velocità? Sono tornato in un baleno.»
«Bene. Ora accendo la torcia, abbasso le serrande e illumino il mio quadrato … Guarda qui. La luce della lampadina, a differenza di quella solare che arriva a noi con un fascio di raggi paralleli, cambia l’ombra della figura. Infatti, ora, l’ombra del nostro cartoncino quadrato è diventata un trapezio, una figura che ha solo due lati paralleli. Se appoggiamo il cartoncino su un vertice, l’ombra diventa addirittura priva di lati paralleli.

Quindi abbiamo perso la certezza di conservare il parallelismo; l’unica cosa che possiamo dire è che il nostro quadrato si trasforma in una generica figura di quattro lati. Insomma, i *segmenti restano segmenti*, nulla più. Ebbene, caro nipote, la somiglianza è poca, ma qualcosa in comune c’è, come tra te e Marco, che siete amici, e in molte cose avete gli stessi gusti. Il legame che unisce queste due figure è comunque molto importante. Hai mai sentito parlare di *prospettiva*?»
«Sì, sì, la prospettiva serve per fare i disegni! Quando siamo andati al museo, con Grazia, abbiamo visto che certi pittori si sono scervellati per capire come fare a disegnare le strade, le case, i pavimenti … in modo che sembrassero veri!»
«Ma poi ci sono riusciti bene. Gli artisti del Rinascimento hanno trovato precise regole geometriche con cui rappresentare la nostra visione tridimensionale in una immagine appiattita sulla tela. È quello che succede anche nella tua foto. E vedi i quadrati del pavimento? In prospettiva i quadrati sono diventati trapezi, dandoci così la sensazione della profondità.»
«A me gli antichi Egizi, nonno, piacciono molto, però la prospettiva proprio non la sapevano. Hai visto come facevano le figure?»

«Eh sì, la prospettiva è importante e per saper rappresentare la realtà in prospettiva bisogna conoscerne le regole, bisogna imparare la *geometria proiettiva*. Tu lo sai che anche le tecniche moderne della grafica col computer, quella con cui si costruiscono i bellissimi effetti speciali dei film, seguono proprio le formule della geometria proiettiva? I videogiochi, senza la geometria proiettiva, non potrebbero esistere. E forse qualche genitore sarebbe anche più contento … »
«Però i bambini no; è troppo bello guidare un'astronave, nonno, dovresti provare … »
«Ci credo, sono divertenti i videogiochi! Ma i poveri genitori si preoccupano per quei giochi violenti, così troppo uguali alla realtà, che potrebbero confondere il giocatore e farlo diventare meno reattivo di fronte alla violenza vera … Invece, in tutti gli altri casi, la simulazione è una cosa molto utile. Pensa agli esperimenti di fisica, ai progetti che aiutano gli ingegneri o gli architetti … pensa ai piloti degli aerei che possono aumentare la loro pratica di volo con la simulazione … Comunque, caro Filo … »
«Comunque, nonno, stai tranquillo: io, la geometria proiettiva la voglio imparare benissimo per fare un film con effetti speciali strabilianti! Mi stanno già venendo delle idee! Te lo immagini Marco, come ci rimane, se sa che voglio fare un film in cui il protagonista attraversa la quarta dimensione?»

(Tratto da: Cerasoli, 2016b, pp. 79–85)

Riferimenti bibliografici

Cerasoli, A. (2016a). *Matematica Amica*. Milano: Feltrinelli.
Cerasoli, A. (2016b). *Mister Quadrato.* Firenze: Editoriale Scienza.

In omaggio a Bruno D'Amore

Ciro Ciliberto
Presidente dell'Unione Matematica Italiana

Abstract. *A message on the occasion of the birthday of Bruno D'Amore.*

La scuola è uno dei pilastri della nostra società. Tutti vi sono coinvolti e più volte nella vita: prima come studenti, poi come genitori, infine come fruitori delle molteplici abilità apprese dai giovani sui banchi di scuola e all'università. Si può ben dire che nessun altro settore pubblico rivesta la stessa importanza e abbia lo stesso impatto sociale dell'istruzione sulla nostra società. Purtroppo non pare che la maggioranza della popolazione sia del tutto consapevole di ciò. Innanzitutto i politici che, nel caso migliore, si limitano a generiche affermazioni di principio sull'importanza dell'educazione e della cultura, cui non fa riscontro un adeguato investimento di risorse umane ed economiche. Troppi giovani vedono la scuola come un fardello piuttosto che come una grande opportunità. Molti genitori sono fin troppo pronti a mettere in discussione, spesso senza averne alcuna competenza, questo o quel metodo didattico. I mezzi di informazione, sono lesti nel mettere inevidenza, in modo scandalistico ma spesso poco approfondito e poco costruttivo, i pochi casi di malfunzionamento e molto raramente si soffermano sui molti aspetti positivi del nostro sistema scolastico, che continua a produrre tanti giovani competitivi a livello internazionale. Allora spetta a noi, operatori del settore, levare la voce nell'interesse della scuola e del suo buon funzionamento, per la qualificazione culturale dei tanti che in essa operano con competenza e abnegazione, alle prese con compiti delicati e complessi. Ci sono molti aspetti che vanno migliorati: strutture edilizie da migliorare e mantenere in perfetto funzionamento, aggiornamento dei mezzi tecnologici sì da essere al passo coi tempi, formazione dei futuri docenti e dei docenti in servizio (settore nel quale si sono purtroppo accumulati, per ragioni politiche e per difese corporative che poco hanno a che fare con la cultura, ritardi vistosi), ecc. Su tutto questo occorre intervenire con campagne di sensibilizzazione con proposte basate sulle più aggiornate e realistiche ricerche scientifiche sulla didattica. L'opera di chi si è occupato e si occupa di questi argomenti è dunque meritoria, e io personalmente sono loro molto grato.

Matematica e Democrazia

Pierluigi Contucci
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Sunto. *Non vi è dubbio alcuno che il concetto di Democrazia sia tra i più complessi della cultura umana. Da un lato esso si basa su suggestive idee quali la partecipazione di tutti alla vita politica e all'impegno civile e sulla difesa dei diritti umani e dall'altra agisce con uno strumento troppo semplificato come la legge di maggioranza su una scelta dicotomica. Non è dunque sorprendente che la sua realizzazione incontri delle difficoltà in diversi stadi quali quelli della rappresentanza di minoranze e la partecipazione di fasce della popolazione senza una opportuna educazione di base. Questo breve intervento presenta il coinvolgimento della matematica in questo concetto, dal lavoro di Condorcet fino ai suoi recenti sviluppi. La Democrazia è un efficace sistema di governo da fondare su un opportuno livello di cultura di tutti i cittadini. Noi sosteniamo che, tra gli strumenti di quel livello di base, quelli di natura matematica siano stati tra i più ingiustamente ignorati e che una robusta conoscenza di probabilità elementare debba sicuramente essere inclusa.*

Abstract. *The concept of Democracy is one of the most complex in human culture. While it is based on suggestive ideas like the participation of all people to political and civic life and the protection of human rights it also acts mostly with an over-simplified instrument like the majority rule on a single choice. It is no surprise therefore that its realization encounters difficulties at many levels especially with representing minorities and dealing with participation of people without a basic education. In this short note we present the involvement of mathematics within this concept, from the work of Condorcet to its recent development. Democracy is an effective government form to be founded on a suitable basic level of literacy of all the citizens. We claim that, among the literacy tools, those of mathematical nature have been the most unfairly neglected and that a robust knowledge of basic probability must surely be included.*

1. Prologo

Nel testo e nelle conclusioni di questo breve intervento il lettore troverà, ripetuta, rimarcata e più spesso sottintesa, la ferma convinzione che una solida cultura matematica va oltre alle necessità dell'ingegnere, del fisico o del matematico di professione. Essa dovrebbe essere al centro della cultura di base del cittadino come uno strumento di lettura, comprensione ed elaborazione del complesso sistema di informazioni in cui è immerso. La diffusione e la promozione di quella cultura è un mestiere assai arduo che purtroppo raramente i professionisti della materia *sanno*, alcuni di loro dicono *vogliono*, fare. L'amico, collega e maestro Bruno D'Amore, il festeggiato, è la figura di spicco nel panorama nazionale e un punto di riferimento in quello internazionale, tra quei rarissimi che hanno fatto una missione di quel mestiere. Infaticabile lavoratore, cultore coi più vasti orizzonti della disciplina, dotato di quell'eleganza intellettuale che si accompagna a una genuina curiosità e all'assenza di ogni snobismo, a Bruno una sola impresa risulta ardua: il passare inosservato, come la sua natura schiva vorrebbe. Auguri mio caro, per il tuo primo 70esimo compleanno e le future iniziative con cui saprai sorprenderci non meno che con quelle passate.

2. La crisi della Democrazia tra partecipazione e delega

Per avere una idea dello stato di salute delle nostre democrazie, diciamo di quelle occidentali, basta uno sguardo ai fenomeni recenti, per esempio quelli referendari, dalla Brexit a quello sulla Costituzione che ci attende a breve. Oppure alle primarie nei due schieramenti statunitensi. Chi scrive non ha le competenze per una analisi tecnica di scienza politica ma alcuni fatti elementari possono essere compresi comunque. La partecipazione alla vita democratica nell'occidente segue regole che sono emerse e si sono raffinate in diversi secoli nel contesto di una comunicazione sociale condotta lentamente e a corto raggio nella direzione orizzontale, cioè tra persona a persona, e in modo relativamente rapido e lungo raggio nella direzione verticale, cioè dalle fonti istituzionali ai cittadini attraverso i mezzi di informazione tradizionali. Negli ultimi anni però le modalità di diffusione dell'informazione sono radicalmente mutate ed ora il raggio della comunicazione è arbitrario in ogni direzione, i tempi brevissimi e, almeno in linea di principio, tutti possono scrivere e comunicare su tutto e verso tutti in qualsiasi momento e in modalità istantanea. Se la comunicazione è il tessuto della società pare ovvio che l'organizzazione civile e la politica hanno il dovere di adeguarsi al nuovo tessuto. Ma farlo è difficile per la naturale inerzia delle istituzioni e di fatto la cosa non accade. In sintesi l'equilibrio tra partecipazione e delega che ha funzionato relativamente bene nella storia moderna è oggi in crisi. Il ricorso alla rete Internet per colmare le nuove lacune ha prodotto eventi disfunzionali ma anche dei fenomeni interessanti come il concetto di Democrazia Liquida e il gruppo Liquid Feedback (Liquid Feedback, Wiki).

3. La teoria del voto democratico secondo Condorcet

In questo breve intervento vogliamo fare una carrellata su quanto e come la matematica sia stata coinvolta nella teoria del voto e della partecipazione democratica. Nel periodo rivoluzionario francese, e negli anni che lo precedono, la progressiva delegittimazione delle autorità tradizionali e la necessità di dotarsi di criteri decisionali in linea con le idee fondanti dell'epoca porta molti intellettuali a cimentarsi in tentativi di razionalizzazione del processo che porta alla scelta ottimale per il gruppo. Nasce in altre parole il trattamento sistematico del sistema di voto in un periodo in cui la Matematica aveva saputo conquistare sia l'attenzione pubblica che politica.

Condorcet, nel suo trattato sul progresso dello spirito umano (Condorcet, 1974), in quella che lui chiama la decima epoca cioè il futuro, auspica una evoluzione delle scienze sociali e politiche non meno efficace e robusta di quella appena avvenuta per le scienze naturali. Il grado di precisione, affidabilità e raffinatezza raggiunto da queste ultime attraverso l'uso del metodo matematico viene portato come esempio da imitare ed egli si fa fervente assertore dell'utilizzo dello stesso rigoroso metodo nell'organizzazione della società. Tra le parti della matematica più utili a tale scopo egli suggerisce il calcolo delle probabilità e ne illustra le molteplici ragioni.

In questa sezione vogliamo esporre brevemente le idee principali della sua teoria del voto democratico. Queste idee sono ancora oggi un punto di riferimento non solo per i teorici delle scienze politiche e sociali ma, negli ultimi anni dello sviluppo tecnologico di internet, hanno invaso gli studi di informatica e si stanno rivelando fertilissime di applicazioni.

Condorcet parte dal constatare la complessità della teoria del voto politico dalla sua origine individuale fino alla necessità di sintetizzarla in una scelta sociale in grado di creare consenso. In particolare egli osserva che assumere l'opinione individuale come dicotomica, cioè nelle forme tipiche di favorevole o contrario, si o no, alzata di mano etc., toglie una enorme libertà di espressione. La scelta individuale in quel caso risulta vincolata e privata di espressione e corre spesso il rischio di essere manipolata dalle fasi istruttorie di voto e in quelle successive. Per prima cosa quindi il voto deve essere basato su un sistema di opinione che permetta al cittadino di ordinare una serie di possibilità, siano esse opzioni o candidati, proposte o soluzioni a uno specifico problema. Il tutto deve essere fatto secondo le sue preferenze. Dati quindi, per esempio, i candidati A, B, C, D votare significa ordinarli ed eventualmente dichiarare qualche parità tra essi: un voto potrà essere $A > D = C > B$, oppure $D > C > A > B$, o ancora $C = D > A > B$ etc.

Questa estensione dello spazio espressivo del voto individuale da dicotomica a multi-dimensionale ha in matematica un significato molto preciso: il campo locale della teoria del voto è descritto da un punto su uno spazio discreto quale il gruppo delle permutazioni quando non si ammettono parità, e dal gruppo di Fubini in quei casi in cui esse sono ammesse. Per addentrarci nel pensiero di Condorcet conviene quindi introdurre un minimo di notazione. Chiameremo v_i il voto del i-esimo votante di una assemblea di N individui. v_i sarà un ordine debole di k candidati (o opzioni), un punto dell'insieme R_k. I numeri di Fubini sono le cardinalità di R_k: $|R_1| = 1$, $|R_2| = 3$, $|R_3| = 13$, $|R_4| = 75$, $|R_5| = 541$ etc. Si può mostrare con tecniche algebrico-combinatorie che $|R_k|$ cresce più velocemente dell'esponenziale secondo un fattore moltiplicativo a potenza c^k con c ≈ 1.44. Queste nozioni di crescita non sono meri tecnicismi. Ci informano invece che se la cardinalità delle opzioni cresce fino all'ordine delle centinaia, come per esempio accade nel problema di ranking di alberghi per una città di medie dimensioni come Bologna, lo spazio R_k non è visitabile esaustivamente, cioè non permette a nessuno strumento di calcolo, inclusi i computer presenti o futuri, di esplorare una ad una tutte le possibilità di voto in quanto questo richiederebbe un tempo superiore all'età stimata dell'universo. Problemi di questo tipo sono noti in informatica e vengono chiamati NP-completi (Papadimitriou, 1994). Va precisato che la struttura combinatoria presente nelle opere di Condorcet compare già nei manoscritti (rinvenuti solo nel 2001) del filosofo medioevale Ramon Llull (Llull, 1315). A prescindere da attribuzioni storiche della scoperta, che in ogni caso ritengono i due contributi del tutto indipendenti, va osservato che la novità e la portata dell'opera di Condorcet risiede nell'uso di concetti probabilistici del tutto assenti nell'opera di Llull.

Definito lo spazio di voto Condorcet si preoccupa di aggregare le opinioni nel modo più rappresentativo possibile secondo gli schemi repubblicani dell'epoca. Procediamo per esempi. Se un'assemblea, immaginiamo quella di una scuola superiore, deve decidere dove andare in gita a fine anno, e le opzioni sono solo due, Milano e Roma, l'alzata di mano e la scelta a maggioranza è l'unica compatibile col criterio democratico. Ma se le preferenze vanno espresse tra tre o più possibilità si possono presentare nuovi e inaspettati effetti. Una classe quindi, di 60 studenti, deve decidere se andare a Londra, Parigi e Roma. I voti di preferenza che emergono sono rappresentati nella seguente tabella:

30	20	10
Parigi	Roma	Londra
Roma	Parigi	Parigi
Londra	Londra	Roma

cioè 30 studenti hanno votato *Parigi* > *Roma* > *Londra*, 20 studenti hanno votato *Roma* > *Parigi* > *Londra* e 10 *Londra* > *Parigi* > *Roma*. Il confronto a coppie dei risultati fornisce quindi:

– Parigi è preferita a Roma 40 a 20
– Roma è preferita a Londra 50 a 10
– Parigi è preferita a Londra 50 a 10

e la classifica vincente risulta: *Parigi* > *Roma* > *Londra*. Un altro esempio tuttavia, conosciuto anche come paradosso di Condorcet, ma che andrebbe piuttosto chiamato fenomeno di Condorcet, illustra che lo stesso criterio può portare ad una apparente inconsistenza:

25	9	12	14
Parigi	Londra	Roma	Londra
Roma	Parigi	Londra	Roma
Londra	Roma	Parigi	Parigi

In questo caso il confronto a coppie fornisce:
- Parigi è preferita a Roma 34 a 26
- Roma è preferita a Londra 37 a 23
- Londra è preferita a Parigi a 35 a 25

che non porterebbe a nessuna classifica vincente secondo il criterio precedente perché, esprimendoci in termini matematici, il grafo delle preferenze contiene un ciclo: *Parigi* > *Roma* > *Londra* > *Parigi*.
Si potrebbe ritenere che utilizzare in modo quantitativo gli scarti sulle vittorie possa eliminare l'anomalia ma non è così e possono costruire controesempi con un po di pazienza. La soluzione proposta da Condorcet per ovviare a questo problema è infatti basata su un diverso concetto. Egli introduce la distanza tra voti:

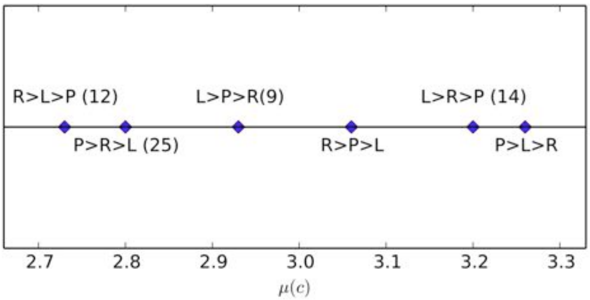
$d(r_1, r_2)$ = minimo numero di permutazioni per far coincidere v_1 con v_2.

Quindi, per esempio
- $d(A>B>C,B>A>C) = 1$
- $d(A > B > C,C > A > B) = 2$
- $d(A>B>C,C>B>A) = 3$

Se come risultato di una elezione si proponesse il risultato *c* (dove la lettera c sta per *consenso tentativo*) il votante i-esimo sarebbe distante $d(v_i,c)$ dalla proposta. Questa distanza rappresenta quindi una possibile misura dell'insoddisfazione del votante che si è espresso con voto v_i rispetto alla proposta c. Per l'insieme di tutti i votanti quindi la distanza, o insoddisfazione, *media* da *c* è data da:

$$\mu(c) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d(v_i, c) \; .$$

Nell'esempio precedente possiamo farci una idea dello spazio delle possibili soluzioni e della relativa distanza media dagli elettori rispetto ciascuna soluzione analizzando la seguente figura:



Condorcet propone come soluzione il risultato c* che minimizza la distanza media (o totale) dall'elettorato. Questa scelta corrisponde a scegliere la soluzione che, pur non soddisfacendo tutti, minimizza il disappunto della comunità o, se si preferisce, massimizza la soddisfazione. Matematicamente è la soluzione del problema variazionale:

$$\inf_c \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d(v_i, c) \ ,$$

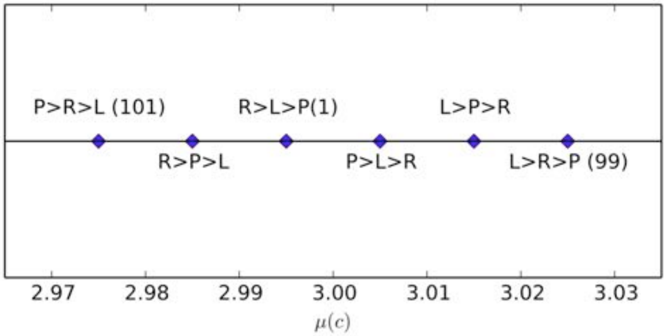
che nell'ultimo esempio risulta essere *Roma* > *Londra* > *Parigi*. La soluzione di Condorcet, in generale non unica, è la mediana dell'insieme di punti rispetto alla metrica introdotta e non il baricentro tra essi. La distinzione tra i due concetti era già stata chiarita da Torricelli e Cavalieri: la mediana minimizza la somma delle distanze mentre il baricentro minimizza la somma dei quadrati delle distanze. Nonostante ciò la confusione dei due concetti continua ad inficiare i risultati degli istituti di statistica internazionali come nella definizione di centro della popolazione data dallo United States Census Bureau nel 1919. Un decennio dopo fu Corrado Gini a far notare che la mediana era confusa col baricentro (Gini, 1915). La distanza specifica introdotta da Condorcet a titolo esemplificativo è solo una delle metriche possibili che possono essere considerate. Oggi sappiamo che queste metriche sono classificate in classi di equivalenza e che in applicazioni diverse hanno forme diverse. È interessante anche aggiungere che le ricerche in questi campi sono oggi principalmente svolte dai colossi del digitale quali Yahoo, Google e Facebook. Nel terminare questa sezione si può fare notare che nonostante le nozioni introdotte fino ad ora sono di natura algebrico-combinatoria (lo spazio dei voti), geometrica (la distanza) e analitica (il calcolo del minimo). È invero la natura probabilistica quella più intrinsecamente adatta a descrivere il cuore del problema: i vari v_i sono in termini moderni le variabili aleatorie che descrivono il comportamento macroscopico di un sistema ad N componenti. Condorcet studia questo tema delle scienze sociali identificandone una soluzione come problema di minimo e apre in questo una nuova prospettiva ricca di importanti conseguenze.

4. Uno sviluppo recente della teoria di Condorcet

Consideriamo un'altra votazione, questa però con una forte polarizzazione descritta dalla tavola di voti:

101	99	1
Parigi	Londra	Roma
Roma	Roma	Londra
Londra	Parigi	Parigi

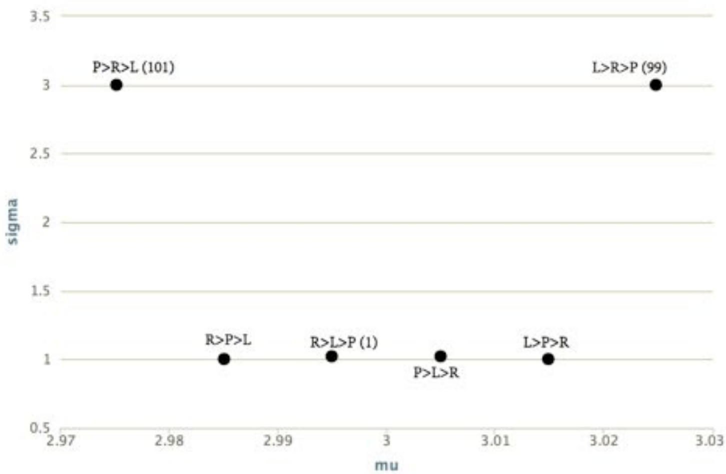
La teoria di Condorcet ci fornisce uno spazio unidimensionale su cui scegliere la soluzione, come riportato qui sotto:



Come si vede la votazione vincente secondo Condorcet risulta essere, come ci si aspetta, $P > R > L$, ma si vede bene che si sta operando una scelta di minimo basandosi su uno scarto infinitesimale (tre parti su mille nel valore di μ) rispetto a un altra soluzione $R > P > L$. Si sta facendo la scelta giusta? Per capire meglio la domanda torniamo alla scelta classica tra due alternative. L'approccio egalitario non lascia spazio ad altre scelte se non quella della maggioranza. Sappiamo tuttavia che, anche in quel caso, le votazioni ad ampia maggioranza risultano gradite, non lasciano strascichi di tensione e hanno un risultato stabile nel tempo. Altre invece, quelle in cui la maggioranza viene raggiunta per uno scarto irrisorio, conduce sempre a situazioni di grande instabilità. Qual' è il parametro che misura questo disagio? Un esempio chiarisce la questione. Consideriamo la votazione di 100 individui che scelgono uno tra due rappresentanti. Se A riceve 95 voti e B ne riceve 5 scegliere A come vincitore soddisfa 95 persone e ne scontenta 5. La soddisfazione media è dunque di 0.9 dato che la probabilità risulta $p = .95$ e la media della soddisfazione è data da $2p - 1$, dove si sono utilizzati nozioni basilari sulla distribuzione di Bernoulli. Il calcolo delle probabilità ci suggerisce un altro dato cruciale: la deviazione standard che misura le fluttuazioni medie. In questo caso la varianza risulta essere $p(1 - p)$ circa 0.21. Nel caso in cui invece i votanti per le due opzioni siano 51 e 49 la soddisfazione per la soluzione di Condorcet è piccolissima (circa 0.02) ma la deviazione standard che risulta essere di 0.49 è vicina al suo valore massimo di 0.5. La deviazione standard in ogni questione di scelta sociale ha un grandissimo peso. Essa non misura la media in assoluto della variabile aleatoria, quanto la media dei confronti. In campo economico per esempio, un'altro settore dove viene studiata la scelta sociale, si sa che la soddisfazione personale è non solo riferita al valore dei propri averi, ma anche al valore di essi rispetto alla media delle nostre cerchie. L'influenza del fattore di confronto rispetto alla media è stata definitivamente chiarita in modo quantitativo nel lavoro dei due premi Nobel per l'economia Kahneman e Tversky (Tversky e Kanemann, 1974). Questa è una delle ragioni per le quali è stato introdotta, nella teoria del voto, la nuova dimensione della varianza (Contucci et al. 2015):

$$\sigma(c) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[d(v_i, c) - \mu(c)]^2}$$

Con questa è possibile analizzare con uno strumento risolutivo aggiuntivo la situazione di voto polarizzata appena descritta. Nel piano di assi μ e σ esso risulta dalla seguente figura:



Si comprende subito che la scelta basata solo sul criterio della media, fondata su un vantaggio di un punto percentuale, non risulta ben motivata rispetto a quella che considera piccole fluttuazioni. La soluzione $R > P > L$ ha infatti una deviazione standard tre volte più piccola e come tale risulta avere una stabilità molto superiore. Il concetto di stabilità presentato sino ad ora è solo intuitivo ma può essere reso pienamente rigoroso come stabilità rispetto a fluttuazioni di varia natura che includono ripetizione del voto. Quello che è emerso dagli studi fatti che includono calcoli e simulazioni (Contucci et al. 2015) ha mostrato che soluzioni altamente egalitarie (a basso valore di σ) sono più stabili. Il contributo principale del lavoro appena illustrato è che la scelta sociale e il raggiungimento del consenso non possono essere delegate a semplici algoritmi. Il policy maker avrà sempre la responsabilità di individuare la direzione, in termini tecnici, su cui spostarsi nella frontiera di Pareto che emerge in un problema di ottimizzazione bi-dimensionale. La situazione è simile a quella che emerge in teoria della scelta economica

nell’ottimizzazione del portfolio (Markowitz, 1952) in cui la scelta degli investimenti viene fatta non solo in termini di ritorno (μ) ma anche di rischio (σ), e nell’allocazione delle risorse (Brandt et Al, 2016).
Concludiamo ribadendo che i campi in cui Condorcet considerava le applicazioni del calcolo delle probabilità alla scienze sociali vanno ben oltre alla teoria della scelta sociale e in includono l’elenco dato da Langrange e Laplace nella loro lezione introduttiva: le valutazioni giuridiche, la statistica di morti e nascite, le assicurazioni etc.

5. La carenza di cultura matematico-probabilistica in Italia

Condizione necessaria per una partecipazione dei cittadini alla vita politica e civile e in particolare all’utilizzo di strumenti di scelta come quelli proposti da Condorcet è quella di un minimo di nozioni di valutazione quantitativa, in particolare strumenti di probabilità. Qual è il livello di cultura probabilistica nel nostro paese? E perché risulta cosi complessa e controintuitiva la teoria della probabilità? Alcuni studi (Gillies, 2000) cercano di spiegare questo fatto con la necessità di usare, nelle sue derivazioni rigorose, nozioni superiori di algebra e analisi. Questa spiegazione risulta parziale e solo diretta agli studi avanzati della disciplina. La tesi per cui propendiamo qui invece è di natura cognitiva piuttosto che tecnica: dalla prima infanzia il cervello ha un naturale periodo di addestramento attraverso esperimenti di natura geometrica quali il movimento nello spazio a tre dimensioni e lo spostamento di oggetti. Quelli che hanno osservato il senso di meraviglia che prova un bambino di pochi mesi nel ruotare un cubetto di Lego possono capire di cosa si sta parlando. Il bambino, anche se allo stadio preliminare, sta sperimentando delle proprietà algebriche e geometriche del gruppo delle rotazioni in tre dimensioni. Ovviamente la dimostrazione dei teoremi su quel tema sarà tutt’altro mestiere ma l’evidenza sperimentale acquisita durante quegli anni avrà delle conseguenze importanti in seguito. L’esempio appena fatto ha il solo scopo di mettere di evidenza la profonda differenza tra lo sviluppo di un intuito geometrico e algebrico con quello probabilistico: non ci sono occasioni per impratichirsi con la struttura della probabilità in età prescolare ed è piuttosto plausibile che questo fatto abbia conseguenze negative in seguito come handicap per la formazione di intuito probabilistico.
Si parte dunque con poco intuito nel calcolo delle probabilità e solo un insegnamento ben strutturato può sopperire in seguito. Servirebbe quindi che i professionisti formassero insegnanti di ogni livello con buone conoscenze nel settore ma purtroppo questo non `e mai avvenuto nel nostro paese, forse perché nei curricula universitari quella disciplina ha sempre avuto un ruolo marginale, quasi accessorio. Il risultato del test Invalsi 2013/2014 ha mostrato una situazione molto critica (Contucci, Riga, 2015) per la scuola dell’obbligo: la probabilità è raramente insegnata e in quei pochi casi quasi sempre in modo inefficiente. La frequenza e il tipo di errori fatti dagli studenti, spesso peggiori

di risposte a caso, mostrano quanto forte sia la paura verso l'argomento. Mostrano inoltre che se una minoranza degli studenti ha avuto una blanda infarinatura della disciplina, quasi nessuno di essi ha avuto `a un insegnamento con una chiara presentazione della sua struttura logico deduttiva che dagli assiomi derivi le conseguenze più profonde.
Una volta poi sviluppata la materia prima, cioè i docenti propriamente formati, la trasmissione della disciplina non sarebbe difficilissima, ma avrebbe certamente bisogno di sviluppare metodi didattici elementari opportuni. Certamente la via sperimentale `e una via maestra.
Il fatto che gli esperimenti in matematica siano uno strumento didattico rilevante non è una nozione proprio comune ma può essere trovata, occasionalmente, in ogni livello dell'istruzione a cominciare dai docenti delle scuole dell'infanzia (come in alcune Montessori) fino alle medaglie Fields (Thurston, 1990). Esperimenti in probabilità non sono facilmente eseguibili. Giocare a dadi o lanciare monete sono esempi molto limitati e possono solo stabilire un minimo di linguaggio in uno stadio preliminare di studio. Le leggi più profonde invece sono nascoste ed emergono solo dopo moltissime ripetizioni delle prove. L'accessibilità di esperimenti per osservarle si è presentata solo dopo la rivoluzione industriale fino divenire popolare solo nell' era informatica con l'ausilio di simulazioni al calcolatore. Questo strumento è la grande occasione per permettere una veloce introduzione dei concetti probabilistici a scuola. La digitalizzazione capillare nella vita dei giovani potrebbe essere utilizzata a tale scopo. Su internet infatti, e quindi su un cellulare di fascia medio alta, è possibile utilizzando applets eseguire test di illustrazione delle leggi dei grandi numeri, del teorema di centrale etc. Ad un livello appena più avanzato il metodo di Monte Carlo può permettere di individuare le cifre successive di pi greco ed altri risultati anche più raffinati. Attraverso la prova e la ripetizione qualche futuro scienziato potrebbe scoprire in quella occasione la passione per la ricerca. Per tutti gli altri un po' di familiarità con la disciplina aiuterebbe a fare scelte sociali ed economiche meglio informate e più sagge.

Ringraziamenti

Il contenuto tecnico di questo lavoro proviene dai lavori in collaborazione con i colleghi E. Panizzi, F. Ricci Tersenghi, C. Riga e A. Sîrbu che ringrazio. Un ringraziamento in particolare va alla Dott. Alina Sîrbu non solo per le tavole e le figure che compaiono in questa nota tratte del seminario "Reaching consensus. How Mathematics can make your opinion count" che abbiamo tenuto in collaborazione alla New York University di Shanghai nel novembre 2014, ma soprattutto per le numerose interazioni che ho avuto con lei sul tema trattato che sono risultate sempre illuminanti.

Bibliografia

Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J., & Procaccia, A. D. (Eds.) (2016). *Handbook of Computational Social Choice*. Cambridge: CUP.

Condorcet, Marquis de Jean-Antoine-Nicolas de Caritat (1794). *Esquisse d'un tableau historique de progrès de l'esprit humain*.

Contucci, P., & Riga, C. (2015). The lack of probability culture in Italy. *Toward an international comparative research program, 49*(6), 2325–2330.

Contucci, P., Panizzi, E., Ricci-Tersenghi, F., & Sîrbu, A. (2015). Egalitarianism in the rank aggregation problem: a new dimension for democracy. *Quality & Quantity*, 1–16.

Gillies, D. (2000). *Philosophical Theories of Probability*. London, Routledge.

Gini, C. (1914). L'uomo medio. *Giornali degli economisti e rivista di statistica*, *48*, 1–24.

Liquid Feedback, Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/LiquidFeedback

Llull, R. (1232–1315). *Manuscripts Ars notandi, Ars eleccionis, and Alia ars eleccionis*.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance* 7, 77–91.

Papadimitriou, C. (1994). *Computational Complexity* (1st ed.). Addison Wesley.

Thurston, W. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society*, *37*, 844–850.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, New Series, 185*(4157), 1124–1131.

Mathematics as a cultural system

Ubiratan D'Ambrosio
University of São Paulo, Brazil

In honor of Bruno D'Amore

Abstract. *This essay addresses the disturbing state of the World and how could we fulfill, as mathematicians and mathematics educator, our global responsibilities for a sustainable civilization. It is common to express the discontentment, in fact the disenchantment, with the course civilization is taking, by chastising Technology, hence its supports, Science and Mathematics. Indeed, the entire system of knowledge that prevails in Modern Civilization must be criticized. In this paper I synthesize the proposal of a Culture of Peace substantiated in the Program Ethnomathematics. I explain the origin and the main aspects of this research program and the ethics of respect for different cultures is intrinsic to it.*

1. Introduction

This event, promoted by colleagues, friends, disciples and admirers of Bruno D'Amore confirms how important is his contribution to the consolidation of the Didactics of Mathematics as an academic discipline. D'Amore is also recognized as a promoter of semiotics as an element of support for this discipline. I also recall how, in all his career, Bruno D'Amore allies his vast scholarship with a great talent as a writer, to show that Mathematics is a cultural system. In the precious book *Più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla. Incontri di Dante con la Matematica*, he shows that culture is a broad concept and goes beyond the traditional disciplines. This study makes it very clear that men of culture in the Middle Ages were aware of all the advances of Mathematics. This is also shown in the beautiful *Matematica dappertutto. Percorsi matematici inusuali e curiosi.* This small book is incredibly rich. It touches practically all sectors of human knowledge and of intellectual and practical activities. The same breadth we see in the book *Leonardo e la Matematica*, written with Giorgio T. Bagni. Always with resource to great knowledge of the arts, of literature and of history, the cultural dimension of Mathematics permeates all the research of Bruno D'Amore. Also, the vein of a pedagogue is also present in all his activities and writings. *La nonna di Pitagora. L'invenzione matematica spiegata agli increduli*, written in collaboration with Martha Isabel Fandiño Pinilla, is delicious to read. Bruno D'Amore has the ability of reaching a general public and yet has much to say to mathematicians and to specialists in various fields, thanks to a remarkable style of correct and precise writing in a fluent and non-pedantic way. It is a pleasure to read his books and essays in various areas of the

sciences, the arts and culture in general and to play the games he proposes. He is recognized as a vigorous proponent of the use of games in the Didactics of Mathematics, with interdisciplinarian and historical flavor.
I was fortunate to understand Bruno D'Amore as a cultural activist in a broad sense, when, in 2002 I was invited to participate in the *XVI Convegno Nazionale sulla Didattica della Matemática e sulle sue applicazioni*, organized by the *Università degli Studi di Bologna* in Castel San Pietro Terme. In parallel with the scholarly *convegno* with invited specialists from different countries, Bruno D'Amore promotes intense cultural activities for the community. Not explicitly related to Mathematics, these events have music, the plastic arts, theatre, classical films and many other cultural manifestations.
Motivated by this important facet of my dear friend and colleague and in recognition of how much he has inspired and continues to inspire my thoughts, I offer him this short essay in his *Festschrift.*
The tone of the essay is the disturbing sate of the World and our global responsibility of mathematicians and mathematics educators. The guiding question is "What are our commitments to mankind?" We need to develop a Culture of Peace for mathematicians.[1]

2. The state of the World and knowledge systems.

The state of the World is disturbing. It is common to express the discontentment, in fact the disenchantment, with the course civilization is taking, by chastising Technology, hence its supports, Science and Mathematics. Indeed, the entire system of knowledge that prevails in Modern Civilization must be criticized.
Some 25 centuries ago the Greek philosopher Hippocrates proposed an oath, which has been adopted by medical professionals when they graduate in the modern Western universities. Although both Education and Mathematics exist in every culture since immemorial times, even before Hippocrates, we, mathematicians and mathematics educators, do not have a similar oath. Essentially, we have not been explicit in our practices about a comprehensive ethics for our profession. We can hardly exert our profession without a reflection about the future and a perception of the state of the world, and a serious concern about mankind as a whole.
It is recognized that Modern Science tries to organize facts under paradigms and principles and the resource to experiences is, under specifiable conditions, available to everyone, but criticism is sometimes interpreted as opening doors to anti-science and a defensive attitude follows. I felt this kind of arguments against contextualized learning, particularly against Ethnomathematics. I thank Bruno D'Amore for giving me space to react against this, mainly by

[1] This theme was amply discussed in D'Ambrosio (2015).

promoting the publication of my book on *Etnomatemática* by *Pitagora Editrice Bologna*, in 2002. The crux is the challenge to the prevailing system of knowledge.

To challenge all kinds of knowledge, scientific, religious, socio-political and historical, does not mean retrogress. On the contrary, challenge, as a coherent response to the state of society, has always been a factor of progress. Challenge can be well understood if we look into the full cycle of knowledge in a historical perspective. But since the Enlightenment, Mathematics, hence Science, has acquired a sense of absolute truth. This is particularly strong in Mathematics. Regrettably, the concept of absolute truth has been used to justify the prevailing socio-political and economical order.

Knowledge, once generated by individuals and by groups, is intellectually and socially organized and is diffused. The full cycle of generation, organization and diffusion of knowledge intertwines needs, myths, metaphors, and interests (D'Ambrosio, 2012). Gregariousness, which prevails in all animal species, leads to hierarchical power. Although power, in animal species, relies on power and physical ability, the species *homo sapiens* subordinates power to strategies based on the control of knowledge. This characteristic of power leads to the notion of "empowerment", as a strategy to ascend the ladder of hierarchical power, which is a most subtle instrument of domination. Sharing knowledge is essential for the survival of the group (family, tribe, society), but to maintain hierarchical power, knowledge is tactfully dispensed through filters, which control the access to the full cycle of knowledge (D'Ambrosio, 1992). The group in power dispenses knowledge that do not represent a threat. In simple words, don't tell everything.

The matter is essentially political. There has been reluctance among mathematicians and among scientists in general, to recognize the symbiotic development of mathematical ideas and models of society. Mathematics has grown parallel to the elaboration of what we call Modern Civilization. This is amply recognized when eminent historian Mary Lefkowitz says that "the evolution of general mathematical theories from those basics [mathematics of Egyptians, Sumerians and others] is the real basis of Western thought".[2] In the discussion about the current state of the World, it is not so important that Lefkowitz says that the Egyptians, the Sumerian and other civilizations were ahead of the Greeks, but she makes it clear that the contribution to build up general mathematical theories was indisputably Greek. The fact is that Mathematics, as it is recognized today in the academia, developed parallel to Western thought (philosophical, religious, political, economical, artistic, cultural). They belong to each other.

[2] Interviewed by Ken Ringle, *The Washington Post*, June 11, 1996.

3. The Program Ethnomathematics

The possibility of finding other approaches to cope with the disturbing state of the World is to go beyond what was recognized by Mary Lefkowitz and to look for how other cultures dealt and explained, in the course of history, with natural and social facts and phenomena. This is the aim of the Program Ethnomathematics, which is a research program on knowledge, which is broader than Ethnomathematics, as I will explain below.

I first used the word Ethnomathematics, in the narrow sense of the mathematics of indigenous populations, in a session on “Native American Knowledge”, organized by Rayna Green in the annual meeting of the AAAS in Washington DC, 1977. I was influenced by the use, mainly by anthropologists, of the words ethno-musicology, ethno-botanic, ethno-linguistics and other ethno-disciplines. My use of the word in this meeting was in the sense of ethno-mathematics as the mathematics of other ethnic groups. I was unaware that the word had been used before by Germans and other educators under the influence of anthropologists.

Although the use of the word ethno-mathematics as the mathematics of other ethnic groups still prevails in Mathematics Education, I went further in questioning the meaning of both the prefix “ethno” and the word “mathematics”. The prefix ethno is much broader that ethnic. It means a culturally identified group, sharing knowledge and practices, language and myths. Indeed, what many mathematics educators are doing is to look for ethnic-mathematics, which is contradictory. The nature, the history and the philosophy of mathematics show how inappropriate is to look for mathematics in different ethnic groups, as well as in different ethnos or cultures. Mathematics, as understood in schools and academia, is an organization of concepts generated and developed in the Mediterranean Basin, as stressed by Mary Lefkowitz. These concepts were later organized, since the Lower Middle Ages and the Renaissance, as a discipline called Mathematics, which is the basis for the development of the powerful modern Science and Technology. History shows us that in the process of conquest and colonization, which began in the 15th century and subjected the entire World to what became known as Western Civilization, Science and Technology, as well as Religion and Economy, were the most successful instruments.

This led me to reexamine the concept of Mathematics, its nature, its history and philosophy, and its influence in the development of Science and Technology, as well of Religion and Economy, in order to give sense to Ethnomathematics.

4. An exercise in fantasy

I always admired what the eminent mathematician Sophus Lie (1842–1899) said to a friend:

> Without Fantasy one would never become a mathematician, and what gave me a

> place among the mathematicians of our day, despite my lack of knowledge and form, was the audacity of my thinking. (Stubhaug, 2000, p. 143)

I recall a particular moment when I practiced some fantasy. It was in Finland, while I was participating in the International Congress of Mathematicians 1978. Finland is a country with many indigenous peoples living within their Arctic territory, which results in a rich mythology and in the development of special ways of survival and transcendence.

Finland is popularly related to Santa Claus. This mythical, legendary, historic and folkloric figure of the Western Christian traditions is explained in different versions. Seemingly, in the 19th century, for commercial and marketing purposes, the popular image was created as a goody-goody and good-humored old man, who lives in the Finnish Arctic Circle and brings gifts to good and well behaved children in the Christmas Eve, December 24th. Santa Claus has a workshop and his helpers are elves, mythological supernatural beings. They construct toys, plan and administer its delivery to the good and well behaved children around the World. Santa Claus and the elves constitute an imaginary cultural group and belong to the fantastic world of children. The fantasy of Santa Claus and the elves stimulate much creativity. As in fairy tales, they have their ways of knowing and of doing and they must use much mathematics to perform well all their tasks.

While in Finland, I was curious about this legend and it was a good exercise for me to speculate on how the Finns would describe the Santa Claus legend, his workshop and also other rich myths of their indigenous populations. How would the Finns express their search for explaining, understanding, learning and dealing with these myths that about how these people would deal with survival and transcendence in their natural and socio-cultural environment.

Free time in congresses is always stimulating and I frequently use my free time for nonsense playing with words, mixing reality with fantasy. I like to play with dictionaries. When going to different countries, I usually buy a small dictionary and use much of my leisure time in browsing through it. Arriving in Finland, I bought an English-Finnish-English Dictionary. Finnish is a very difficult and strange language. Browsing into my small dictionary, I tried to find a "good" word or composition of words that the Finns might use to express *the ways, the arts and techniques* developed by their indigenous peoples, like the elves, to express their *understanding, explaining and learning* about the *facts and phenomena of their natural and socio-cultural environment*. I mounted a word: alusta-sivistyksellinen-tapas-selitys. Frightening! After playing a little more with these strange words, I wrote alustapasivistykselitys, a linguistic nonsense.

But I became very attracted to the idea of expressing *the ways, the arts and techniques of understanding, explaining and learning* the *facts and phenomena of the natural and socio-cultural environment*. Maybe a word to express this idea, constructed with the use of Greek roots, would be less shocking. Browsing into a Classical Greek Ethymological Dictionary, I found three interesting words: *techné* [for the ways, the arts and techniques], *mathemá* [for understanding, explaining and learning] and *ethno* [for a group with compatible behavior in a same natural and socio-cultural environment]. In a typical *abus de langage*, I used these roots to composed a phrase, the *techné* of *mathemá* in an *ethno*. Using *tics* instead of *techné,* the phrase became the *tics* of *mathema* in different *ethnos* and, after a different ordering, the word *ethno-mathema-tics*. Obviously, *ethnomathematics* is a more acceptable word.

The playing with expressing both the fantasy of a mythological legend and the reality of an indigenous culture resulted in my theoretical reflection about the origins and evolution of knowledge in the human species.

5. Mathematics as a cultural system

Each culture develops ways, styles and techniques of doing, which are practices, and responses, which are theories, for explanations, understanding and learning. They basically respond to “how-practices” and “why-theories”. In the human species, early attempts to explain and to understand lead to the search for origins, which leads to myths. All these are organized as systems of knowledge and religions. The attempts to explain and to understand rely on observation, comparison, classification, evaluation, quantification and measurement, counting, representation and inference.

Western Mathematics is such a system of knowledge, as a broad view of history shows. Thus I decided to analyze the origins and evolution of Western Mathematics as a system of knowledge, in the broader sense of responses to the needs of survival and transcendence, taking into account the practical and mythical motivations. It resulted in a different approach to the History of Mathematics.

Other cultures also developed other systems of knowledge with the same aims, in response to their environment. We might refer to these other systems as other “mathematics”, using different ways of observing, comparing, classifying, evaluating, quantifying and measuring, counting, representing, inferring. All the different systems of knowledge, responding to different environments, should be called *Ethnomathematics*. They are all motivated by the drives for survival and transcendence, compatible with their myths, religions and language. The responses may be similar, even if the natural and cultural environments are different. Thus, what we call Mathematics, of Western origin, is the Ethnomathematics of the Mediterranean Basin.

This led me to try to understand the origins and evolution of systems of knowledge in general, looking into the full cycle of the generation, the intellectual and social organization, and the diffusion of knowledge, and the subsequent changes in the systems as the result of the cultural dynamics of encounters.

The encounters presuppose the presence of the human species all over the planet. If we consider either single primeval or multiple origins of our species, it is undeniable the mobility and consequently the encounter of groups coming from different natural and socio-cultural environments, with different mythological traditions. The encounters result in the mutual exposition of different cultures, of different systems of knowledge and may be motivated by many reasons: territorial disputes, search of natural resources, mythical motivation, commercial exchanges, wars of conquest and other reasons. These different reasons do not occur in isolation, we can not analyze them discretely. Among them there are clearly some fuzziness and they all interfere with each other. The mutual exposition of systems of knowledge, in the broad sense, may result in various degrees of assimilation, of subordination and even of suppression of systems of knowledge. What occurs, in most cases, is a syncretism of doings and knowing and of ideas, giving origin to new systems of knowledge. Every encounter reveals ideological problems and conflicts and it is impossible to remove completely the traces of the assimilated or the suppressed system. Extant traces are always present and to identify them is a great challenge for research. We might call this research a "paleography of ideas"![3]

A broad view of the History of Mathematics, focusing on anthropological, social, political, religious and other issues, as well in the cultural dynamics of encounters, is a very clear illustration of the full cycle of knowledge. It looks into how the processes of observing, comparing, classifying, evaluating, quantifying and measuring, counting, representing, inferring have originated in different cultures, with more or less emphasis of one or another and how cultural dynamics played an important role in the development of these forms of knowledge, leading, as a result, to local institutionalization and to local ways of thinking and doing.

Geopolitics determined a marked influence of Greek language and philosophy in the Mediterranean Antiquity. The word Mathematics, in the several versions present in Classical Greek and its use in Latin, have different meanings. Only in early Renaissance the word Mathematics came into use with meaning similar to what it is today: a Science in its own, detached from philosophy and from the other sciences, which appropriated concepts and techniques from various branches of philosophy, from earlier times and from many different cultures.[4]

Many researchers use the word Ethnomathematics, referring to a specific indigenous culture, as the search of the Mathematics (in the Western sense) of that culture. This is deceiving. It is a mistake, in a cultural environment, to

[3] The full cycle of knowledge and the cultural dynamics of the encounters are explained in D'Ambrosio (2000).

[4] According to etymological dictionaries, the word Mathematics, in the modern sense we apply now, appears only after the 15^{th} century.

look for ideas and categories of knowledge proper of a different cultural environment. It is clear that in every culture, we have to look for the specific ways, for the arts and techniques that this culture developed to express their understanding, explaining and learning about the facts and phenomena of their natural and socio-cultural environment and, consequently, their ways of doing and knowing.

What was presented above explains the research program which I call the Program Ethnomathematics. It is clear, from this presentation, that an ethic of respect for different cultures is intrinsic to the Program Ethnomathematics.

6. In conclusion

The Program Ethnomathematics does not deny the importance and the central role of Mathematics, in the Western and academic sense, in Modern Civilization. But in examining the History of Mathematics with cultural lenses, it helps to understand mistakes and wrongdoings throughout history and to realize the need of ethics in the development of future Mathematics. This is a way to develop Mathematics with humanitarian ideals of a new civilization with equity, justice and dignity for the entire human species, without distinction of race, gender, beliefs and creeds, nationalities and cultures.

The life and the work of Bruno D'Amore
have been devoted to pursuing these ideals.

References

D'Ambrosio, U. (1992). The cultural dynamics of the encounter of two worlds after 1492 as seen in the development of scientific thought. *Impact of science on society,* 167, 205–214.

D'Ambosio, U. (2000). A Historiographical Proposal for Non-Western Mathematics. In H. Selin (Ed.), *Mathematics Across Cultures Science Across Cultures: The History of Non-Western Science* (pp. 79-92). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

D'Ambrosio, U. (2012). The Program Ethnomathematics: The theoretical basis and dynamics of cultural encounters, *Cosmópolis. A Review of Cosmopolitics* (Haute École de Bruxelles), 3–4, 13–41.

D'Ambosio, U. (2015). Mathematics and Education: Endeavors for Survival. In L. Branchetti (Ed.) *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education* (pp. 77-95). Isonomia On-line Journal of Philosophy-Epistemologica-University of Urbino Carlo Bo. http://isonomia.uniurb.it/epistemologica

Stubhaug, A. (2000). *The mathematician Sophus Lie*. Berlin: Springer.

L’irragionevole efficacia della matematica nelle scienze (naturali ed umane)

Mirko Degli Esposti
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Sunto. *Nel testo vengono sollevate alcune interessanti questioni relative alle più diverse e sorprendenti applicazioni della matematica.*

Abstract. *The text rises some interesting issues about the various and surprising applications of mathematics.*

La matematica: a cosa “serve”? Non sarò in grado di rispondere compiutamente a questa domanda, ma certamente dimostrerò come la matematica, pur affondando le sue forti radici nell’antichità, rimanga non solo longeva, ma sempre più vitale, attuale e importante per le tecnologie e per le scienze, siano esse naturali, sociali o umane.
Discuterò innanzitutto come “semplici” domande poste fin dall’antichità e relative a elementari proprietà dei numeri naturali (in particolare dei numeri primi) trovino solo oggi parziali risposte.
Mi allontanerò poi da queste problematiche “pure” per descrivere brevemente quelli che solo apparentemente rappresentano diversi aspetti della matematica, vale a dire le sue (innumerevoli) applicazioni. Partirò dalle più scontate, quali le applicazioni alle scienze naturali (mediche o biologiche, ad esempio) e alle scienze ingegneristiche, per arrivare alle forse più inaspettate e pioneristiche, relative alle scienze umane e sociali. Ad esempio, possiamo usare la matematica per analizzare un testo letterario? Possiamo, per via matematica, riconoscerne l’autore o dimostrarne l’inautenticità?
In effetti, pur se apparentemente diverse, tutte queste “sfaccettature” della disciplina condividono il medesimo obiettivo: la comprensione di come in diversissimi contesti i comportamenti più interessanti (“complessi”, direbbe qualcuno) nascono esattamente là dove convivono strutture apparentemente aleatorie, caotiche, spesso imprevedibili, con strutture estremamente più ordinate, periodiche e quindi prevedibili.

Les beaux et instructifs méandres de l'histoire des mathématiques

Jean Dhombres
Centre Koyré, Paris
Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales/CNRS

Abstract. *In this short text I emphasize the commitment of Bruno D'Amore to the deep popularization of History of Mathematics in Mathematics Education.*

C'est avec grand plaisir que j'adresse un très amical salut à Bruno d'Amore, à l'occasion de cette journée organisée en son honneur pour ses 70 ans. Je le fais d'autant plus volontiers que j'ai lu des textes qu'il a récemment écrits et qui se rapprochent beaucoup de mes préoccupations d'historien des mathématiques. Il a choisi comme sous-titre à cette histoire culturelle et illustrée qui va des Grecs au Moyen Age: *Un viaggio coinvolgente e appassionante nei meandri del tempo*. Bruno d'Amore n'oublie en rien les réflexions de toute une vie de didacticien au service des mathématiques, et ne se laisse pas entraîner dans les pièges d'une érudition qui, sous prétexte de tout dire précisément, en arrive à ne plus rien distinguer. Et justement oublie les « méandres », et jusqu'aux voies de garage de la culture mathématique, au profit des splendides avenues dont on omet de dire la peine qu'elles ont coûtée, comme le long temps mis pour les construire. Sa patiente reconstruction des preuves est mise au niveau même des lecteurs, et je reconnais bien là celui qui décortique les situations didactiques, et n'oublie pas qu'une mathématique est bine tours là à l'œuvre. Bon anniversaire donc, et avec tous mes souhaits de longue et belle production.

Il concetto di tempo e le sue misurazioni alla Scuola dell'Infanzia: dal calendario alla clessidra

Benedetto Di Paola
Università degli Studi di Palermo

Lo scorrere del tempo è palese per ciascuno di noi: i nostri pensieri e il nostro parlare esistono nel tempo, la struttura stessa del nostro linguaggio richiede il tempo. Possiamo immaginare un mondo senza colori, senza materia, anche senza spazio, ma è difficile immaginarlo senza tempo.
(Rovelli, 2014, pp. 65–66)

Sunto. *Il contributo, affrontando, seppur in una prima approssimazione, la problematica epistemologica, psicologica e didattica legata alla scoperta del concetto di tempo da parte dei bambini e le relative misurazioni attraverso strumenti quali il calendario, l'orologio, la clessidra e il metronomo, presenta i risultati di un percorso sperimentale realizzato in una Sezione di SdI con bambini di 5 anni.*

Abstract. *The paper discussing, even if in a not exhaustive way, the epistemological problematic and the psychological and didactic ones related to the children discovery of the time's concept and its measurements through artefacts such as a calendar, a clock, a hourglass and a metronome, presents the results of a teaching experiment carried out in a Kindergarten with 5 years old pupils.*

1. Il tempo agli occhi di un bambino

Che cosa è il tempo? Questo contributo nasce da questa apparentemente semplice domanda, posta da un bambino curioso di 5 anni alla sua maestra di Scuola dell'Infanzia.

Che cosa è il tempo? Se dovessimo darne una definizione più o meno formale potremmo dire che il tempo è una categoria del reale, attraverso cui l'uomo può organizzare la sua vita, "*non è una formulazione astratta della mente, è un parametro concreto della vita quotidiana*" (Giovanelli & Sansavini, 2007, p. 33); chiaramente questa non può essere però una risposta da dare ad un bambino.

Definire i tempo è complesso. Sant'Agostino diceva: "*Cos'è dunque il tempo? Se nessuno m'interroga, lo so. Se volessi spiegarlo a chi mi interroga, non lo so*".

Se analizziamo attentamente il concetto in sé scopriamo che è fatto di molteplici aspetti tra loro interconnessi; si dovrebbe quindi parlare di *dimensioni del tempo* (Falaschi, 2007) e non di *tempo*.

In accordo con Falaschi (2007) esiste infatti una *dimensione psicologica* del tempo che fa capo al ritmo personale con cui si vive la propria esistenza anche

in relazione al contesto socio-culturale di rifermento; una *dimensione fisica* che si intreccia indissolubilmente ad entità quali spazio e velocità; una *dimensione sociologica* che fa riferimento al tempo comunemente riconosciuto ed accettato dalla società poiché scandito e misurato; una dimensione *filosofica* e infine una *biologica,* che fa riferimento dai ritmi biologici e psicologici della persona. Quest'ultima influenza, forse più delle altre, la nostra percezione del reale, oltre che il nostro modo di vivere il tempo.
A livello puramente sensoriale, percepiamo il tempo secondo differenti layer: un layer *fisiologico* che riguarda la percezione immediata (ad esempio attraverso il nostro respiro, il battito cardiaco ecc.); un layer *psicologico*, in cui entrano in gioco numerosi fattori individuali (quando ad esempio ci lasciamo invadere da un ricordo o quando ascoltiamo un racconto ecc.); un layer *simbolico*, in cui la nostra percezione è innescata e mediata dai simboli (guardando qualcosa di antico o di passato si pensa inevitabilmente a quel tempo). Considerando quindi la multidimensionalità del tempo possiamo prender atto del perché non sia semplice definirlo.
Nella prospettiva piagetiana il tempo non è che uno degli aspetti attraverso cui l'uomo esprime la conoscenza e la valutazione della realtà ed è un concetto complesso. Secondo Piaget (1979) il bambino può comprendere ed interiorizzare la nozione di tempo solo attraverso la primitiva percezione del movimento e della velocità; questa si acquisisce negli anni secondo precise scansioni o stadi di sviluppo. In accordo con Fraisse poi

> Le problème psychologique n'est plus de savoir ni ce qu'est, ni la nature de notre idéè de temps, ni même de saisir sa genèse dans quelque intuition ou quelque construction de l'esprit, mais de comprendre comment l'homme réagit à la situation qui lui est faite de vivre dans le changement. (Fraisse, 1957, p. 10)

Se il concetto di tempo rappresenta quindi un ingranaggio complesso, fatto di tante componenti (dimensioni e layer diversi), difficili da analizzare singolarmente mantenendo viva la relazione tra le parti tra loro interconnesse, anche l'ambito della misurazione dello stesso non è esente da ostacoli e misconcezioni, soprattutto con bambini piccoli alla SdI.
Quando vieni a prendermi? Più tardi! Quanto tempo è più tardi? *Mamma quando andiamo a casa? Tra un minuto!* Ma che cos'è per un bambino un minuto?
Come percepisce il tempo un bambino? Quali sono i possibili processi di scoperta relativi alla misurazione? L'epistemologia del tempo e le sue implicazioni psico-educative sono state a lungo discusse con un approccio interdisciplinare: il tempo è stato analizzato nei suoi rapporti con la Fisica, con la Matematica, con la Psicologia e la Filosofia; poche sono però le evidenze sperimentali relative alla percezione del tempo e la relativa misurazione (non formale e rigorosa) da parte di bambini nella fascia di età 3–5 anni.

2. Misurare il tempo alla Scuola dell'Infanzia (SdI)

Grazzini Hoffmann rileva che i bambini all'età di cinque o sei anni hanno già una loro idea di tempo, sanno che ci vuole del tempo per fare qualcosa, hanno osservato eventi che si evolvono cronologicamente e hanno avuto esperienza di irreversibilità degli stessi ma in molti casi non si sono posti esplicitamente il problema della misura della grandezza fisica (Grazzini Hoffmann et alii, 1983, p. 85).

Certamente le attività rituali tipiche della SdI hanno un ruolo fondamentale nell'autoregolazione del bambino e nell'accettazione delle dinamiche esterne e permettono quindi al soggetto apprendente di acquisire conoscenze e abilità necessarie per comprendere seppur in modo spesso ingenuo cosa sia il tempo e il suo trascorrere:

> Le scansioni e la ripetitività delle funzioni biologiche, l'organizzazione della giornata, l'alternanza di luce e buio, il succedersi delle stagioni e i cambiamenti dovuti alla crescita […] sono tra le esperienze soggettive più facilmente suscettibili di una mentalizzazione che incorpori la categoria della temporalità e ne consenta una progressiva articolazione ed espansione. (Contardi, Piochi, 2002, p. 157)

Ciononostante, in accordo con Grazzini Hoffmann et alii (1983) riteniamo che sia importante proporre in modo più esplicito (ma sempre in modo ludico, chiaramente), già dalla SdI, esperienze di apprendimento che orientino progressivamente alla scoperta della misurabilità o "pre-misurabilità" del tempo:

> La possibilità di condurre esperienze concrete ed il riferimento diretto ad esperienze concrete verificabili, è da considerare una «tappa» nello sviluppo delle capacità relative al misurare. Man mano che i bambini andranno comprendendo il significato di unità di misura convenzionale, di multiplo, di sottomultiplo, di stima, di approssimazione […] in esperienze dirette, diventeranno anche sempre più capaci di trasferire questa loro capacità di comprensione in situazioni non direttamente esperibili, sapranno cioè lavorare con le misure al di là di un referente concreto. (Grazzini Hoffmann et alii, 1983, p. 85)

Secondo Friendman (1982), poi, per comprendere e apprendere il tempo convenzionale è fondamentale imparare già da piccoli a pensare e classificare come coordinamento fra sottoinsiemi (ore dell'orologio, giorni della settimana, mesi, anni) caratterizzati da specifici parametri, come ad esempio la durata, l'ordine, il numero di elementi ecc. Per far ciò, tenendo conto delle complessità insite nella relazione fra tempo convenzionale e sistemi di numerazione, le esperienze di pre-misura e misura alla SdI e alla Scuola Primaria (SP) devono offrire stimoli significativi ed opportunità per sviluppare abilità concrete. Provare a definire fin dalla SdI in modo coerente una didattica attenta anche a questi spetti permetterebbe quindi di far esplorare ai bambini i differenti strumenti di misurazione del tempo (calendario, orologio, clessidra, metronomo ecc.) e il loro utilizzo contestualizzato al bisogno di misurazione temporale: *Quale strumento uso per misurare il trascorrere dei giorni? Posso usare la clessidra per misurare la durata della mia giornata a scuola? E il calendario?*

Una *didattica del tempo* attenta ai processi sottesi alla comprensione temporale del bambino della SdI e alla misurazione della stessa grandezza fisica, permetterebbe poi, dal punto di vista della Ricerca in Didattica, di evidenziare come e quanto la percezione nei bambini cambi a seconda dello strumento di misurazione temporale che essi utilizzano. Questo è ciò che, seppur in una prima approssimazione, abbiamo cercato di fare con 13 bambini di SdI (5 anni) di Palermo.

3. Il percorso sperimentale

In accordo con il quadro teorico discusso in precedenza, e con l'obiettivo precedentemente esplicitato, partendo dalle conoscenze ingenue che i bambini hanno del tempo, si è cercato di favorire in loro una più corretta ed "oggettiva" idea del concetto trattato, sempre in accordo con l'età degli studenti e i processi cognitivi sottesi a tale compito, tipici per la SdI.

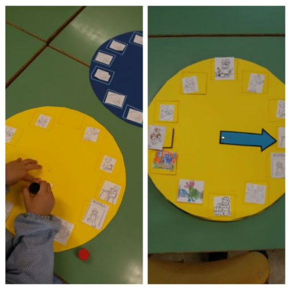
Per quanto attiene alla sfera della "misurazione" o "pre-misurazione" del tempo, sono state poi proposte ai bambini attività di scoperta relative alla costruzione e l'uso di strumenti di misurazione a loro più o meno noti (come detto. Il calendario, l'orologio, la clessidra e il metronomo) favorendo anche un maggior controllo della dimensione sociologica del tempo.

Il percorso sperimentale, condotto in classe dall'insegnante Chiara Cancilla, si è articolato quindi in tre fasi così sintetizzate:

- ✓ *Screening*: si è trattato di una fase preliminare volta a esplorare, come detto, le idee e le conoscenze ingenue possedute dai bambini sul concetto di tempo: *che cos'è, è "misurabile"?, con quali strumenti si può misurare? Come?* ecc.
- ✓ *Costruzione con i bambini degli strumenti di misura*. Attraverso la realizzazione e la taratura degli strumenti i bambini hanno agito e riflettuto sui processi messi in atto nella costruzione, hanno generato ipotesi, discusso e confutato le proprie ragioni cooperando per il raggiungimento di un obiettivo condiviso. Come detto, in questa fase, è stato poi possibile analizzare la percezione che i bambini hanno del tempo in relazione allo strumento di misura utilizzato. La costruzione di ciascun strumento è stata programmata e svolta secondo la tipica processualità della situazione a-didattica (Brousseau, 1998) e si è conclusa con una attività di verifica mediata da un disegno dello strumento costruito, come mostrato ad esempio, nella figura rioptata di seguito per quanto attiene al calendario, all'orologio e al metronomo.

- ✓ *Risoluzione di problemi*: In quest'ultima fase sono state sottoposte ai bambini più situazioni problematiche inerenti la misurazione del tempo. Partendo da problemi in cui si richiedeva loro di quantificare il trascorrere del tempo con gli strumenti realizzati si è giunti pian piano a situazioni problematiche via via più complesse che richiedevano ai bambini di scegliere quale fosse lo strumento più adatto fra i quattro costruiti per misurare il tempo nella situazione problematica presentata, argomentando il perché della scelta.

Sintetizzando i risultati ottenuti, focalizzando l'attenzione, per brevità, alla seconda e alla terza fase possiamo dire che, nonostante la complessità di alcune procedure di costruzione (ad esempio l'assemblaggio del metronomo), tutti i bambini coinvolti sono riusciti a portare a termine i compiti loro proposti. Certamente è stato necessario un intervento di mediazione e facilitazione da parte dell'insegnante non tanto nelle procedure, quanto piuttosto per sollecitare la pratica riflessiva dei bambini.



Sono stati costruiti orologi con immagini in cui, dopo una lunga mediazione messa in atto in Sezione, ciascun'ora è stata identificata con un'azione significativa della propria vita quotidiana in conformità ai ritmi biologici; calendari settimanali, mensili e annuali differenti, clessidre a velocità diverse e metronomi rudimentali.

Relativamente all’ultima fase del percorso sperimentale, ciascun bambino ha svolto autonomamente il compito è ha fornito spiegazioni significative che hanno messo in luce, seppur spesso solo in modo ingenuo, un collegamento funzionale fra la grandezza tempo e i suoi strumenti di misura. Esempio ne è la verbalizzazione di un bambino ripotata di seguito.
“*Perché lui passa e se tu vuoi sapere come passa devi usare la clessidra quando fai un gioco, il calendario quando vuoi sapere che giorno è, il metronomo quando devi andare al ritmo giusto e l’orologio quando vuoi vedere che ora è”*.

4. Conclusioni

Come detto, rispondere alla domanda c*he cosa è il tempo?* è complesso e lo è ancor di più per un bambino piccolo della SdI. Il percorso sperimentale agito, da un lato ha permesso di far emergere sperimentalmente già alla SdI le varie dimensioni discusse a livello teorico in ambito psico-pedagogico sul concetto tempo, dall’altro ha dato l’opportunità ai bambini coinvolti di scoprire in modo costruttivo cosa sia il tempo e quasi siano le sue relative possibili rappresentazioni e misurazioni (come riportato nell’immagine accanto).
Affrontare quindi questi temi alla SdI non è sempre semplice ma in un’ottica di verticalità e di continuità con la SP permetterebbe ai bambini di acquisire delle competenze proto-matematiche di relazione (spazio-temporali), che, come verbalizzato direttamente da Matteo (5 anni) alla conclusione del percorso sperimentale sopra descritto, possono portare i bambini a scoprire il senso del tempo.
Matteo: “*il tempo è una cosa complicata, l’anno prossimo, che sono grande, lo spiego io alla maestra!”*

Ringraziamenti
Si ringrazia l’insegnante Chiara Cancilla che ha condotto in classe in modo puntuale e rigoroso il percorso sperimentale qui discusso.

Bibliografia

Angeli, A., D’Amore, B., Di Nunzio, M., & Fascinelli, E. (2011). *La matematica dalla scuola dell’infanzia alla scuola primaria*. Bologna: Pitagora
Brousseau, G., & Balacheff, N. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990*. La pensée sauvage.

Cardaci, M. (2000). The mental clock model. In *Studies on the Structure of Time* (pp. 33–36). Springer US.

Carmeci, F., Misuraca, R., & Cardaci, M. (2009). A study of temporal estimation from the perspective of the mental clock model. *The Journal of general psychology*, *136*(2), 117–128.

Voir et créer dans l'art et en géométrie : proximités et divergences

Raymond Duval
Professore emerito
Université du Littoral Côte d'Opale, Francia

Abstract. *The close relationships between Art and Mathematics have been one of the research areas of Bruno D'Amore. This is a very important topic for Mathematics Education, especially for aims of geometry instruction in Primary and low secondary school. The crucial issue is the contradictory role of seeing in the use of geometrical figures. Both perceptual obstacle to mathematical understanding of represented properties and visualization cognitively required to solve problem. Comparison between paintings and geometrical figures forces us to wonder how seeing is similar and different when we look at a painting and when we look at a geometrical figure. It also forces us to ask how can any geometrical figure visualize geometrical properties, objects or concepts.*

In this paper, we will use a fundamental distinction relating to seeing visual representations, that between visual shape recognition and cognitive object recognition of what it is the shape. These two processes are often simultaneous and always confused whenever we speak of seeing, looking at. We will compare how each of these two processes works when we see a painting and when we see geometrical figure. There are close relationships with regards to visual shape recognition. They highlight the complexity of what is given to see and its importance in problem solving. The deep divergence between the two ways of seeing stems from the cognitive object recognition of what is visualized. In order to analyze it, we substitute the notion of figural unit for these of shape and geometrical figure. This enables us to highlight a third process, the dimensional deconstruction of shapes, that explains how geometrical figures can visualize geometrical properties.

This comparison shows that heuristic reversal of visual recognition of shapes and dimensional deconstruction of shapes are not included in the aims of geometry instruction in Primary and low secondary school and are completely ignored by research in mathematics education.

La présence des mathématiques dans la création artistique, qu'elle soit picturale ou architecturale, et l'art comme visualisation d'objets mathématiques ont été l'un des axes majeurs des travaux de Bruno D'Amore. Pour lui, il se s'agit pas seulement de reconnaître les propriétés mathématique utilisées dans la composition des œuvres d'art, mais de découvrir « la parenté entre ces deux mondes » où les représentations des possibles englobent et éclairent la réalité, pour paraphraser le sous-titre de son ouvrage *Arte e Matematica* (2015) qui offre une véritable somme en la matière.

L'importance de la parenté entre ces deux mondes pour la didactique des mathématiques apparaît dans un acte cognitif fondamental qui semble être le même pour la géométrie et la peinture : « voir », avec ses yeux bien sûr ! Imaginons que nous soyons dans une salle où des tableaux sont exposés avec, pour chacun d'entre eux, plusieurs figures géométriques dont l'une seulement représente la propriété géométrique utilisée. Le regard peut alors aller de l'une à l'autre pour reconnaître laquelle des figures structure la composition du tableau. Est-ce que cela permet de conclure que voir est le même acte quand le regard se porte sur le tableau et quand il se porte sur la figure géométrique ? Imaginons maintenant que, dans un cours de géométrie, une figure de géométrie soit donnée et que soit aussi affichée la reproduction d'un tableau dont elle structure la composition. Est-ce qu'on peut encore conclure que voir reste la même chose lorsque le regard se porte sur la figure pour résoudre un problème et lorsqu'il se porte sur la reproduction pour y reconnaître la propriété géométrique utilisée?

C'est cette question que je vais examiner ici. Pour cela nous utiliserons une distinction fondamentale. Voir comporte deux types de reconnaissance qui, dans la perception des représentations planes 2D/2D (images, photos, dessins, etc.),[1] coïncident presque toujours :

– la reconnaissance *visuelle* de *formes* ;
– la reconnaissance *cognitive de ce que les formes* visuellement distinguées *représentent.*

Chacun de ces deux types de reconnaissance est déterminé par des principes qui en régulent les opérations (Duval, 2015). Nous comparerons ceux qui sont spontanément mobilisés pour voir un tableau et ceux que le regard mathématique sur une figure de géométrie requiert. Cela nous permettra de dégager quelques uns des processus de création dans l'art et en géométrie.

1. La reconnaissance visuelle des formes dans les œuvres picturales et en géométrie

Une forme est un contour fermé qui se détache d'un fond. Si le fond est homogène, ce contour est déterminé par des traits ou apparaît comme le bord d'une tache, c'est-à-dire d'une zone de couleur différente du fond. Le problème de la reconnaissance visuelle des formes commence lorsqu'il n'y a pas une seule forme isolée, mais au moins deux qui peuvent être séparées juxtaposées, partiellement superposées, ou l'une inscrite dans l'autre. Deux principes vont commander les degrés de liberté du regard dans la reconnaissance des formes.

R.V.1 Le rapport figure/fond et sa réversibilité.

[1] Nous utilisons cette notation pour distinguer les représentations et leur support matériel 2D/3D (une feuille de papier qui peut être pliée, un transparent qui peut être retourné, etc.) et pour les distinguer aussi des objets réels ou de solides 3D/3D qu'elles peuvent représenter.

Lorsque qu'une représentation comporte plusieurs formes, il y en a une qui s'impose visuellement au détriment des autres, qui restent en arrière plan et qui ne sont pas remarquées. La *Gestalttheorie* a dégagé les lois qui imposent alors, de manière reflexe, la reconnaissance de certaines formes au détriment des autres qui sont alors occultées. Aussi pour devenir capable de voir ces autres formes, il faut un entraînement du regard pour pouvoir inverser le reflexe gestaltiste de la perception des formes.

R.V.2 L'alternative juxtaposition ou superposition.

En partant de l'idée qu'une forme est un contour fermé, il y a dans un réseau de tracés autant de formes que de contours fermés possibles. Il faut alors distinguer deux types de contours fermés. Il y a tous *les contours qui sont juxtaposés comme un pavage,* régulier ou irrégulier, et qui vont constituer le fond constitutif de la figure. Ce sont les contours élémentaires. Et il y a tous *les contours qui se superposent à au moins deux contours élémentaires* et qui peuvent s'imposer à la reconnaissance visuelle, en fonction du reflexe gestaltiste. Ces contours sont donc *décomposables en contours élémentaires* On voit alors des formes l'une au-dessus de l'autre ou l'une derrière l'autre, la cachant en partie. Là aussi, il faut un entraînement du regard pour reconnaître visuellement des formes juxtaposées dans des formes décomposables qui s'imposent en superposition au fond constitutif de la figure et inversement pour reconnaître les formes élémentaires juxtaposées dans des formes superposées qui s'imposent perceptivement.

En géométrie élémentaire, R.V.1 et R.V.2 constituent *les deux démarches heuristiques fondamentales pour la résolution de problème*, indépendamment de toute hypothèse donnée (Duval, 2015). Par exemple, R.V.1 suffit à résoudre instantanément un problème portant sur la nature d'un triangle inscrit dans l'intersection de deux cercles qui ont un rayon commun. Mais dans la plupart des problèmes c'est R.V.2 qui est heuristiquement décisif en permettant de voir des superpositions de formes dans des formes élémentaires juxtaposées, et réciproquement.

Dans l'art, c'est surtout R.V.1 qui est important dans les représentations figuratives. Car il permet la distinction des profondeurs de plan, en privilégiant la reconnaissance par superposition contre toute reconnaissance par juxtaposition. Dans les représentations non figuratives, R.V.2 peut être essentiel. Prenons l'exemple d'une mosaïque romaine du Ier siècle découverte à Saint-Romain-en-Gal. Les formes élémentaires juxtaposées sont des losanges et des carrés d'une même couleur sombre, leurs côtés respectifs étant séparés par de petites bandes de couleur blanche. Ce qui s'impose au regard ce sont des contours blancs entourant des carrés sombres et enveloppant un losange. Mais, avec du recul, ce qui s'impose ce sont des décagones dont le contour est marqué, comme en pointillé, par des petites bandes blanches. On peut aussi reconnaître des assemblages circulaires de couleur sombre se détachant d'un fond blanc (quatre carrés trois losanges, et deux demi losanges). L'intérêt de cet exemple est de montrer l'importance de la couleur pour R.V.1 et pour R.V.2, alors que la couleur n'intervient d'aucune manière dans les figures géométriques.

2. La reconnaissance cognitive de ce que les formes représentent

La reconnaissance de ce que les formes représentent n'est pas visuelle mais cognitive. Et elle dépend de deux opérations qui sont indépendantes de la reconnaissance purement visuelle. Mais pour la géométrie, nous devrons introduire une troisième opération qui est à la fois visuelle et cognitive.

R.C.1 La reconnaissance iconique des choses représentées.

Elle se fonde sur la « ressemblance » entre la forme du contour fermé et la forme de l'objet représenté. Mais la notion de « ressemblance » est une notion floue. Et elle peut être souvent difficile à reconnaître lorsqu'il s'agit d'objets réels.[2] Aussi nous devons en reprendre la définition donnée par Bresson : il y a ressemblance quand les relations de voisinage entre les éléments de la représentation et les relations de voisinage entre les éléments ou les parties de l'objet représenté sont conservées. L'intérêt de cette définition est qu'elle permet de distinguer des *degrés d'iconicité*. En effet, la conservation des relations de voisinage peut porter sur le contour global et sur ses parties, ou seulement sur le contour global ou seulement sur les parties.

R.C.2 La reconnaissance discursive des choses représentées.

La reconnaissance discursive de ce qu'une forme reconnue représente se fait par *une désignation verbale* de l'objet représenté. Cette désignation verbale est associée à la représentation comme sa légende ou son titre. Et le point essentiel qu'il faut remarquer est que cette désignation verbale est indépendante de la reconnaissance iconique. Elle peut même se faire contre une reconnaissance iconique évidente, comme on peut le voir avec le célèbre tableau de Magritte « ceci n'est pas une pipe ».

En géométrie, la désignation verbale se fait par les hypothèses données dans l'énoncé d'un problème, mais cela implique que l'on code certains éléments de la figure par des lettres pour assurer la correspondance entre les hypothèses et la figure.[3] Jusque là tout paraît relativement simple, la difficulté commence avec le fait que les objets désignés sont soit des propriétés soit des objets définis par une ou plusieurs propriétés. Et c'est ici qu'intervient la troisième opération qui est uniquement requise et pratiquée en géométrie.

---

[2] Les représentations 2D/2D ou 3D/3D d'objets réels (3D/3D) peuvent varier du tout au tout, en fonction du point vue d'où elles sont vues : de face, de profil, de dos, d'en haut, d'en bas, de près, de loin, etc. Pour un même objet, il y a une multitude de formes possibles. D'où le mirage de figures types ou de formes types.

[3] Nous ne prenons pas en compte, ici, ce qu'on appelle le « codage » d'une figure, c'est-à-dire les marques surajoutées qu'on surajoute à sa construction, pour indiquer les propriétés de parallélisme ou d'orthogonalité.

R.C.3 *La déconstruction dimensionnelle des formes* en unités figurales 1D et 0D.

La question épistémologique et cognitive fondamentale pour l'enseignement de la géométrie au Primaire et au Collège est la suivante. *Comment des figures ou des dessins peuvent-ils visualiser des propriétés et objets géométriques* ? La notion qui permet de répondre à cette question n'est ni celle de forme élémentaire, ni celle de concept à mobiliser mentalement, mais celle d'unité figurale. Une unité figurale est un tracé qui se caractérise par sa dimension : 1D (trait droit ou courbe), 2D (contour fermé), ou 3D (contour fermé imposant une vision par superposition) et … 0 (uniquement visible comme intersection de deux unités figurales 1D) ! Et cela conduit aux trois propositions cognitives qui permettent de répondre à la question :

– une propriété géométrique est *la relation entre deux unités figurales* de même dimension ou de dimensions différentes ;
– un objet géométrique (polygone, polyèdre, cercle, sphère, etc.) est défini par *au moins deux propriétés géométrique* (à l'exception peut-être de la droite et du plan).

Autrement dit, la manière dont une figure visualise des propriétés et des objets géométriques va *contre la reconnaissance visuelle des formes 2D,* c'est-à-dire contre les opérations reflexes R.V.1 et R.V.2, qui font obstacle à la reconnaissance des unités figurales des unités 1D et plus encore 0D. Les définitions des objets géométriques ne les font jamais voir, sinon comme les bords d'une unité figurale 2D. On touche alors ici le mur de verre qui sépare la manière mathématique de voir et la manière normale de voir, et auquel presque tous les élèves viennent se heurter au Primaire comme au Collège. Il faut apprendre à déconstruire dimensionnellement les formes pour reconnaître le réseau de droites qui leur est sous-jacent (Duval, 2005, 2015).

Bien évidemment, c'est là la divergence fondamentale entre l'art et la géométrie. La déconstruction dimensionnelle des formes est totalement exclue en art, même dans ce mouvement qu'au début du XXème on a appelé le Cubisme. La reconnaissance iconique est totalement exclue en géométrie, mais dans son utilisation pour modéliser des situations réelles. Mais en art, il y a ce que nous avons appelé des degrés d'iconicité intermédiaires entre la ressemblance parfaite de certains portraits ou de certaines natures mortes et l'abstraction totale d'une sensation pure, réduite à celle d'une ou plusieurs couleurs. Comparons, par exemple, le tableau « Au-dessus de Vitebsk » de Chagall (1922) avec le « Nu bleu IV » de Matisse (1952). Dans le premier toutes les formes juxtaposées sont iconiques, mais leurs rapports de voisinage ne conservent pas la vraisemblance de rapports de voisinage dans la réalité. Dans le collage de Matisse, au contraire, aucune des formes juxtaposées n'est iconique, mais leurs rapports de voisinage composent la silhouette d'un corps de femme.

3. Formes, espace, et mots : créer en art et en géométrie

Aux sources de la créativité en art et en géométrie, il y a les différents processus de décomposition et de recomposition visuelle de formes. Mais c'est surtout avec les choix de (re)composition que commence la création en art et en géométrie. La (re)composition peut se dérouler librement ou en appliquant des règles. Elle crée un espace et elle est, implicitement ou explicitement, portée par des mots.

Dans la peinture, la création d'un espace peut suivre deux voies : celle de la seule utilisation des deux principes de reconnaissance visuelle R.V.1 et R.V.2, ou celle largement balisée depuis la Renaissance, des différentes techniques de représentation géométrique avec point de fuite, principalement pour toutes les représentations figuratives. En géométrie, la création d'un espace se fait avec le choix des unités figurales *n*D permettant de visualiser, et donc de construire une « figure » de l'objet, ou des objets géométriques, que l'on étudie.

Le rôle des mots dans la production des images est souvent négligé. Pourtant, depuis la *Traumdeutung*, de Freud (1900), on sait que les mots précèdent et sous-tendent la production des images. *Les images sont la visualisation de mots ou d'associations de mots* qui ne sont pas exprimables, même à soi-même. Ce rôle des mots ne doit pas être confondu avec R.C.2, c'est-à-dire avec ce qui concerne la légende ou le sujet du tableau. La légende reste d'une certaine manière étrangère à ce que la tableau fait voir. Et cependant elle aide parfois à entrer dans ce qu'il donne à voir. Ainsi celle « Nu bleu IV», explicite les associations verbales qui ont fait l'impulsion créatrice de ce collage de Matisse. La femme, telle que les morceaux collés la font surgir d'un fond blanc, est-elle nue ? Est-elle l'eau ? Est-elle un morceau de ciel ?

Les figures en géométrie sont le contraire même des images et de tout ce qu'on dessine. Elles ne visualisent que des relations et des objets géométriques. La création passe donc nécessairement par une production discursive, c'est-à-dire par l'utilisation intentionnelle de *mots qui sont la condensation verbale de définitions et de théorèmes.* Mais l'utilisation de ces mots condensateurs requiert et porte le développement de raisonnements valides, parce que les définitions et les théorèmes sont des propositions dont la structure interne est une implication « conditions ⇒ conclusion à détacher ». *C'est cette production discursive qui guide la visualisation en géométrie ou qui y supplée,* comme on peut le vérifier dès qu'on passe de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace. Autrement dit, la puissance créatrice de la géométrie se situe dans le registre discursif, mais, cognitivement, elle requiert aussi la coordination avec le registre des figures que l'on peut construire. Or *cette coordination*, à la différence de la peinture, des schémas, des diagrammes, etc. *consiste en la déconstruction dimensionnelle de toutes les formes que l'on peut percevoir.*

4. Importance didactique de la parenté entre l'Art et la Géométrie

La parenté profonde entre l'Art et les mathématiques, que Bruno D'Amore n'a cessé d'explorer, est fondamentale pour enseigner la Géométrie aussi bien à l'Ecole Primaire qu'au Collège. Car elle oblige à dissocier, dans le regard sur les représentations visuelles de ces *due mondi possibili*, la reconnaissance visuelle des formes et la reconnaissance cognitive de ce que les formes discernées représentent. Et, surtout, elle montre l'importance de la reconnaissance visuelle, indépendamment de toute connaissance sur ce que les formes discernées représentent, pour pouvoir comprendre en Géométrie et pour pouvoir en faire vraiment. Voir en géométrie mobilise les mêmes opérations de reconnaissance visuelle que voir un tableau, tout au moins pour une utilisation heuristique des figures. Mais voir en géométrie, requiert aussi de manière paradoxale une déconstruction dimensionnelle des formes pour pouvoir comprendre le langage et les raisonnements géométriques. En ce sens, pour comprendre la géométrie et pour en faire, il faut apprendre à regarder comme en art et il faut apprendre non pas à construire des figures mais à déconstruire dimensionnellement des formes.

Bien évidemment, cette approche de la géométrie est aux antipodes de celle qui commande les programmes et l'organisation de séquences d'activités en classe. Elle est exclusivement qualitative. Elle exclut tout recours à des grandeurs que l'on peut mesurer sur le terrain et sur … le dessin (!), et donc à des calculs utilisant les différentes formules de base de la géométrie concernant le périmètre, les surfaces, etc. Cette approche pragmatique scotomise tout ce qu'une figure géométrique donne à voir ainsi que l'éducation mathématique du regard. Et elle se heurte au fait que très vite beaucoup d'élève ne vont pas « savoir » reconnaître quelle formule utiliser pour calculer une longueur ou une surface dans un problème concret. De même le passage d'une géométrie expérimentale à une géométrie plus déductive devient un autre mur de verre.

Dans ses explorations de la parenté entre Art et Mathématique, Bruno D'Amore ne s'est pas limité à la Géométrie. Il a aussi pris en compte l'importance des nombres et du monde des fonctions qui, avec le développement des logiciels, a pris une importance telle dans la création artistique que l'on peut alors parfois parler d'*identità tra due mondi*. Mais là il s'agit d'un type de visualisation mathématique qui, dans son fonctionnement cognitif et sémiotique, est radicalement différent de la visualisation géométrique.

Références

D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Bari: Edizioni Dedalo.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et

coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.
Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : « voir » en géométrie. Dans J. Baillé & J. Lima (Eds.), *Du mot au concept. Figure* (pp. 147–182). Grenoble : Presses Universitaires.

Dalla didattica della matematica nuove *policies* per la formazione degli insegnanti?

Piergiuseppe Ellerani
Università del Salento

Sunto. *Una riflessione sulla formazione in servizio e continua degli insegnanti per il miglioramento dell'insegnamento e per lo sviluppo della qualità della scuola.*

Abstract. *A reflection on in-service and continuing teacher training for teaching improvement and school quality development.*

1. Qualità dell'insegnamento, qualità della Scuola

Gli esiti delle più recenti ricerche internazionali sugli apprendimenti degli studenti nella matematica (OECD-PISA, 2014; IEA-TIMSS, 2013), così come sulle pratiche e credenze degli insegnanti (OECD-TALIS, 2013; 2009; Eurydice, 2015) hanno evidenziato come sia sempre più necessario elevare la qualità delle scuole attraverso una più efficace azione formativa verso gli insegnanti. A rinforzare questa quasi ovvietà, è possibile presentare gli esiti della ricerca PIAAC-ISFOL (2013), sul mantenimento e lo sviluppo delle competenze in età adulta in literacy e numeracy: i dati mostrano come, in Europa e tra gli adulti, sia presente in modo consistente il problema del basso livello di usabilità delle competenze. L'età adulta, dunque non è risparmiata dal decremento di quanto acquisito nel periodo scolastico e, per estensione, anche lo sviluppo delle professionalità ne viene intaccato, essendo per altro strettamente correlato al mantenimento di alte competenze.
Se i dati – sia tra gli studenti dell'obbligo formativo, sia tra gli adulti – mostrano una tendenza verso un difficile consolidamento della competenza in matematica, che si mantiene generalmente lungo tutto il corso della vita, il problema non è più ovvio. Intervenire sulla qualità della formazione iniziale, in-service e continua della professionalità docente, è irrinunciabile. Considerando che da tempo si rileva (NAP, 2012) che per raggiungere il pieno potenziale come adulti, gli studenti hanno bisogno di sviluppare un livello tale di competenze e conoscenze che facilitano la loro padronanza e applicazione nella società odierna, la strada della qualità della formazione degli insegnanti è necessariamente da intraprendere. Contestualmente è altrettanto noto come gli insegnanti – implicati nella formazione delle competenze – dovrebbero organizzare l'apprendimento e lo sviluppo di competenze, conducendo le classi con metodologie più efficaci ed innovative (Schleicher, 2012; Benavides, 2011), in ambienti di apprendimento sempre più attivi e coinvolgenti. Migliorare la qualità dell'insegnamento continua ad essere uno

dei maggiori obiettivi delle *policies* educative (Vaillant, 2005) per poter migliorare gli apprendimenti. In prospettiva pedagogica emerge Martha Nussbaum (1997; 2011; 2012) la quale propone che sia lo sviluppo umano e non quello economico il fine da perseguire per le società, dove il secondo è strumento del primo, ed è perseguibile attraverso sistemi di educazione e istruzione equi, adeguati e di qualità. In tal senso lo sviluppo umano dovrebbe essere guidato dal principio di formazione in grado di permettere alle persone la libertà nel direzionare la propria vita (autodirezione) e il proprio well-being (Sen, 1992), richiedendo perciò di ri-significare in generale l'educazione e la formazione, e nello specifico anche il già noto concetto "funzionalista" di competenza.
Possiamo quindi porre la qualità della scuola come una questione di sintesi, che trova espressione nella qualità dell'insegnamento e nella qualità degli esiti formativi degli studenti.
D'Amore (2016) ha posto una questione centrale che può orientare – all'interno del dibattito attuale sulla qualità dell'insegnamento – le *policies* formative: ovvero la questione della *generalizzazione* degli apprendimenti in contesti differenti, e la *univocità* dei metodi per l'insegnamento della matematica.
Dunque due temi che delineano e rafforzano da una parte la necessità di consolidare la didattica – della matematica e più in generale delle altre discipline – fondata sulle evidenze di ricerca (Vivanet, 2013; Margiotta, 2016) e dall'altra la sempre presente formazione iniziale degli insegnanti e quella in-service.
La formazione degli insegnanti dovrebbe contribuire a generare una cultura dell'apprendimento continuo, laddove l'apprendere – continuamente – è connesso con il miglioramento degli esiti in generale e con l'orientamento al lavoro per il successo di ogni studente (Darling-Hammond, 2010). Una maggiore equità dei sistemi formativi[1] – che esprime per altro il diritto individuale all'apprendimento – richiederebbe perciò un sistema scolastico in grado di formare continuamente gli insegnanti – soprattutto in servizio – permettendo in modo organico e "ordinario" – piuttosto che "straordinario" – di colmare rapidamente il "gap between educational research and practice" che si genera con l'evoluzione della ricerca (Vanderline & Van Braak, 2010).
La dimensione della formazione continua e *in-service* è una questione fondamentale per esprimere la qualità della scuola. Infatti gli anni di formazione iniziale non possono rappresentare – attualmente – in modo compiuto l'agire professionale che richiede un costante confronto con una realtà mutevole come quella di una classe nella società multiculturale, non definibile in forme statiche già nella formazione primaria, e che – nell'agire

[1] In Italia per esempio è un'emergenza il tasso di abbandono scolastico (15%) rispetto alla media Europea (10%), così come la necessità di elevare la quota della popolazione di età compresa tra 30 e 34 anni in possesso di un diploma universitario (dal 31% ad almeno il 40%).

professionale – deve rapportarsi e comprendere le evidenze che la ricerca produce costantemente (ETUCE-CSEE, 2008). Michael Fullan (1999) afferma che il problema più critico che molte scuole devono affrontare non è la resistenza all'innovazione, bensì la frammentazione, il sovraccarico e l'incoerenza che risultano dall'accettazione acritica e scoordinata di molte innovazioni – o presunte tali – tra loro differenti (Fullan & Stiegelbauer, 1991).

Dunque, l'idea di un insegnamento univoco, dell'uso di una sola metodologia di insegnamento, con un metodo pre-confezionato, è già in sé stessa un errore didattico; non si può neppure pensare di proporre UN metodo in aula. Il solo pensarlo è già un insuccesso. L'insegnante userà più metodologie, più strumenti, più metodi, nella speranza di raggiungere, con ciascuno di essi, qualche studente; se poi parecchi studenti riceveranno messaggi "diversi" basati su metodologie diverse, meglio, apprenderanno da più punti di vista e di conseguenza il transfer cognitivo sarà facilitato (D'Amore, 2016).

Ne consegue che la formazione in servizio e continua diviene una prospettiva strategica per il miglioramento dell'insegnamento e per lo sviluppo della qualità della scuola. È in grado di rispondere infatti alle specifiche esigenze – individuali, di gruppo e di contesto – emergenti in precisi tempi e situazioni. In quanto tale, dovrebbe quindi essere disponibile *sistematicamente* e *ordinariamente* al fine di consentire – sia per i dirigenti scolastici che per gli insegnanti, così come per il personale coinvolto nella scuola – di aggiornare le competenze e condividere nuove pratiche (OECD, 2010; NSCD, 2009). Le conoscenze, le competenze e l'impegno degli insegnanti sono tra i fattori più importanti per raggiungere risultati di alta qualità educativa (CON, 2009).

2. Sostenere la professionalità dell'insegnamento: lifelong learning

TALIS-OECD (2013) rileva che le convinzioni degli insegnanti circa la pratica didattica sono notevolmente coerenti in tutti i paesi dove, in media, approvano una visione costruttivista dell'insegnamento e considerano gli studenti come partecipanti attivi nel processo di acquisizione della conoscenza. Anche in questo caso, tuttavia, ci sono molte differenze tra i paesi, e ancora fortemente presenti le forme trasmissive della conoscenza. Per Schleicher (2012) questo confermerebbe come le pratiche di insegnamento prevalenti in tutto il mondo non siano ancora in grado di aderire agli approcci più innovativi. Pur presente nelle scuole, l'innovazione stenta ancora ad essere guidata dalla ricerca e a disseminarsi, condizionata com'è dalla cultura degli insegnanti e dalla loro forte tendenza assimilativa e riduttiva.

La formazione continua e in-servizio dovrebbe perciò innervare e sostenere processi di sviluppo professionale, attraverso forme in grado di modificare realmente le credenze e le azioni degli insegnanti. Alcune modalità di formazione – interpretate rispetto ai problemi evidenziati da D'Amore – potrebbero ispirare azioni formative di interesse.

Mentoring e Peer-mentoring in gruppo. In Finlandia, per sostenere lo sviluppo professionale degli insegnanti si è consolidata la partica del mentoring tra pari in gruppo (Geeraerts et al., 2015). Mentre il mentoring tradizionale si basa sul trasferimento di conoscenza da un collega più esperto a un principiante (Heikkinen, Jokinen, & Tynjälä 2008; Roberts, 2000), utilizzando un approccio di tipo trasmissivo, il mentoring tra pari e in gruppo si basa sulle idee socio-costruttiviste della conoscenza, enfatizzando il dialogo, lo scambio delle esperienze, la condivisione e la co-costruzione delle conoscenze (Geeraerts et al., 2015). Coerentemente, il concetto di apprendimento degli adulti non è più considerato come mero trasferimento di conoscenza bensì come processo di re-interpretazione delle conoscenze sulla base delle nostre conoscenze pregresse, esperienze e convinzioni, che come esito forma le nostre concezioni personali all'interno di interazioni sociale. Il mentoring tra pari in gruppo si fonda e si costruisce sul principio di pedagogia integrata (Heikkinen, Jokinen, & Tynjälä, 2012; Tynjälä, 2008; Tynjälä & Gijbels, 2012; Tynjälä, Häkkinen, & Hämäläinen, 2014), che combina quattro elementi di base nel mentor della conoscenza: la dimensione teorica, pratica, auto-regolativa e socioculturale. Il setting di apprendimento si modifica conseguentemente, spostando il focus dalla tradizionale pratica di discussione uno-a-uno, a un contesto di gruppi composti da insegnanti alle prime esperienze con insegnanti più esperti. Le pratiche sociali di mentoring e coaching – condotte anche dai dirigenti – e la loro efficacia nello sviluppo professionale degli insegnanti hanno trovato attuazione anche in alcuni programmi canadesi (Robinson, 2015) che confermano come lo scambio e la riflessività sulle pratiche permetta un cambiamento reale e diretto sull'agire didattico.

Induction. I programmi di "induction" – il sostegno alla carriera iniziale – offrono sia un supporto professionale che personale durante il primo anno dell'attività di insegnamento. All'intero del processo di lifelong learning, occorre considerare che lo sviluppo professionale degli insegnanti è un processo permanente che inizia con la formazione iniziale degli insegnanti e termina al momento del pensionamento. Dopo la prima fase – formazione inziale – che riguarda la preparazione di base – pedagogico-didattica – la seconda fase è quella che permette agli insegnanti di muovere i primi passi in autonomia, confrontandosi con la realtà di essere un insegnante a scuola. Questo fase viene generalmente chiamata la fase di induzione. Alla quale succede la terza fase, lo sviluppo professionale continuo e in-service.

Mentre molta attenzione viene solitamente posta alla formazione iniziale degli insegnanti, sottovalutata, sino ad oggi, è l'organizzazione e la progettazione di programmi di induzione efficaci in grado di sostenere gli insegnanti nel loro passaggio dalla prima formazione a quella continua.

È facilmente intuibile come, per affrontare i problemi epistemologici della disciplina e quelli pedagogico-didattici – espressi da D'Amore (2016; 1999) –

organizzare un sistema di "induction" permanente sia una possibile risorsa per elevare la qualità dell'insegnamento e della riduzione del gap tra ricerca e attuazione didattica.
La ricerca indica che la progettazione di sistemi di induction dovrebbe considerare quattro pilastri tra loro interdipendenti:

– Un sistema di mentoring

Ad un insegnante con esperienza viene attribuita la responsabilità di aiutare l'insegnante principiante, fornendo supporto a livello personale ed emotivo, a livello sociale, ma soprattutto a livello professionale. Oltre all'obiettivo di stimolare l'apprendimento professionale utilizzando una varietà di approcci, come per esempio il coaching, la discussione, la consulenza sul caso, il sistema di mentoring restituisce "cultura" alla scuola e promuover più facilmente comunità di apprendimento.

– Un sistema esperto

Attraverso il sistema esperto si organizzano attività formative e consulenziali, concentrandosi su seminari, partecipazione a corsi con esperti dell'insegnamento e della didattica disciplinare, organizzando lo scambio di materiali, risorse e linee guida per la gestione della classe.

– Un sistema tra pari

Il sostegno tra pari è una risorsa attraverso la quale i nuovi insegnanti possono avere un sostegno di tipo sociale (in particolare in gruppi di insegnanti della stessa scuola) e contemporaneamente professionale, di scambio. Il sistema dei pari è essenziale nella creazione di un ambiente sicuro in cui i partecipanti hanno lo stesso status e in cui gli insegnanti principianti possono scoprire che si trovano ad affrontare molti degli stessi problemi degli esperti. Questa dimensione dell'induction, aiuta altresì a promuovere reti di scuole e comunità di apprendimento professionale.

– Un sistema di auto-riflessione

L'apprendimento di una forma mentis aperta alla generalizzazione e alla trasferibilità dei concetti, è un'opportunità per i nuovi insegnanti a partire dal riflettere sul proprio apprendimento (metacognizione). La crescita personale promuove professionalità e assicura lo sviluppo di un atteggiamento verso l'apprendimento permanente. Organizzare momenti di riflessione – includendo per esempio un sistema di registrazione video o l'uso di portfolio – aiuta al miglioramento continuo e all'innovazione didattica.
Nel volume "Arte e matematica" (2015), D'Amore assume la prospettiva pedagogica dell'uomo planetario, come costruttore della cultura umana. È un'ulteriore direzione di senso, che accompagna l'evolvere della stessa pedagogia attuale: formare ai funzionamenti affinché ognuno possa avere opzioni per la loro applicazione, secondo un personale progetto di vita, attuando sistemi di equità in grado di ridurre le disuguaglianze. Organizzare sistemi di formazione alla didattica – a partire dall'esempio del NRD del Dipartimento dell'Università di Bologna e di Bruno D'Amore – e di induzione

alla professionalità docente, apre una nuova stagione per la qualità dell'insegnamento e della scuola.

Bibliografia

Benavides, F., Dumont, H., & Instance, D. (2011). Alla ricerca di contesti di apprendimento innovativi. In CERI-OCSE, *Apprendere e Innovare*. Bologna: Il Mulino.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2015). *Arte e Matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Bari: Edizioni Dedalo.

D'Amore, B. (2016). A proposito di "metodi di insegnamento" univoci. Errori pedagogici, epistemologici, didattici e semiotici delle metodologie univoche. *La Vita Scolastica web*. ISSN: 0042-7349.

Darling-Hammond, L. (2010). Teacher Education and the American Future. *Journal of Teacher Education*, *61*(1–2), 35–47.

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, *14*, 133–156.

ETUCE-CSEE (2008). *Teacher Education in Europe. An ETUCE Policy Paper*. Bruxelles: UE.

Eurydice, (2015). *The Teaching Profession in Europe: Practices, Perceptions, and Policies*. Eurydice Report. Luxembourg: European Union Publications.

Fullan, M. (1999). *Change Forces: The Sequel*. London: Falmer Press.

Fullan, M., & Stiegelbauer, S. (1991). *The new meaning of educational change*. New York: Teachers College Press.

Geeraerts, K., Tynjälä, P., Heikkinen, H. L. T., Markkanen, I., Pennanen, M., & Gijbels, D. (2015). Peer-group mentoring as a tool for teacher development, *European Journal of Teacher Education, 38*(3), 358–377.

Heikkinen, H. L. T., Jokinen, H., & Tynjälä, P. (2008). *Reconceptualising Mentoring as a Dialogue*. In G. Fransson & C. Gustafsson (Eds.), *Newly qualified teachers in northern Europe. Comparative perspectives on promoting professional development* (pp. 107–124). Gävle: Gävle University Press.

Heikkinen, H. L. T., Jokinen, H., & Tynjälä, P. (2012). Teacher education and development as lifelong and lifewide learning. In H. Heikkinen, H. L. T., Jokinen, & P. Tynjälä (Eds.), *Peer-Group Mentoring for Teacher Development* (pp. 3–30). London: Routledge.

IEA (2013). *TIMSS and PIRLS 2011: Relationships Among Reading, Mathematics, and Science Achievement at the Fourth Grade - Implications for Early Learning*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Margiotta, U. (2016). *Teoria della formazione. Ricostruire la pedagogia.* Roma: Carocci.

NAP (2012). *Education for life and work: developing transferable knowledge and skills in the 21th century.* Washington DC: NAP.

NSCD (2009). *Professional Learning in the learning profession.* Dallas: TX, Report.

Nussbaum, M. (1997) *Cultivating Humanity. A Classical Defense of Reform in Liberal Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Nussbaum, M. (2011). *Non per profitto*. Bologna: Il Mulino.

Nussbaum, M. (2012). *Creare capacità*. Bologna: Il Mulino.

OECD (2009). *Education at a Glance 2009: OECD Indicators.* Paris: OECD Publishing.
OECD (2010). *The nature of learning: Using research to inspire practice*. Paris: OECD Publishing
OECD (2014). *Education at a Glance 2014*. Paris: OECD Publishing.
OECD-CERI (2010). *The nature of learning: Using research to inspire practice*, 69–90. Paris, OECD.
OECD-CERI (2014). *Measuring Innovation in Education: A New Perspective*, Educational Research and Innovation. Paris: OECD Publishing.
OECD-PISA (2014). *The PISA 2012 Technical Report.* Paris: OECD Publishing.
OECD-TALIS (2009). *Creating Effective Teaching and Learning Environments: First Results from TALIS*, Paris: OECD Publishing.
OECD-TALIS (2013). *TALIS 2103 Results. An International Perspective on Teaching and Learning.* Paris: OECD.
PIAAC-ISFOL (2013). *Le competenze per vivere e lavorare oggi: Principali evidenze dall'Indagine PIAAC*. Roma: ISFOL.
Roberts, A. (2000). Mentoring Revisited: A Phenomenological Reading of the Literature. *Mentoring & Tutoring*, *8*(2), 145–170.
Robinson, J. (2015). Mentoring e coaching per i dirigenti scolastici. Uno studio qualitativo sull'expertise adattiva. *Ricercazione*, *7*(1), 63–68.
Schleicher, A. (Ed.) (2012). *Preparing Teachers and Developing School Leaders for the 21st Century*. Brussels: OECD.
Sen, A. (1992). *La disuguaglianza*. Bologna: Il Mulino.
Tynjälä, P. (2008). Perspectives into Learning at the Workplace. *Educational Research Review*, *3*(2), pp. 130–154.
Tynjälä, P., & Gijbels, D. (2012). Changing world: Changing pedagogy. In P. Tynjälä, M.-L. Stenström, & M. Saarnivaara (Eds.), *Transitions and transformations in learning and education* (pp. 205–222). Dordrecht: Springer.
Tynjälä, P., Häkkinen, P., & Hämäläinen, R. (2014). TEL@work Integrating Theory and Practice. *British Journal of Educational Technology*, *45*, 990–1000.
Unione Europea (2006). *Efficienza e equità nei sistemi europei di istruzione e formazione*. Bruxelles: Comunicazione commissione.
Vaillant, D. (2005). *Education reforme and the role of teachers*. In Prelac Journal. Teacher involvement in educational change. Santiago, Chile: UNESCO.
Vanderline, R., & Van Braak, J. (2010). The gap between educational research and practice: views of teachers, school leaders, intermediaries and researchers. *British Educational Research Journal*, *36*(2), 299–316.
Vivanet, G. (2013). *Che cos'è l'evidence based education.* Roma: Carocci Faber.

Incontro personale con la Didattica della matematica

Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Abstract. *In this paper I want to describe my personal encounter with the mathematics education that today I know and that allows me to be in contact with so many different theories but all important and useful, both in research and in teaching practice.*

In Colombia la formazione dei docenti di matematica di qualsiasi livello scolastico avviene, dal 1953, con un corso quinquennale specifico svolto all'università che porta al titolo di "Licenciadura". La formazione matematica e quella didattica avvengono in parallelo: in alcuni corsi si studiano argomenti matematici classici (geometrie varie, analisi varie, algebra, topologia, algebra lineare, teoria dei numeri, geometria algebrica, programmazione lineare, logica etc., insomma i soliti di ogni corso di laurea in matematica, quelli classici); in altri, in contemporanea, si studia la problematica didattica di essi.
Di fatto, la preparazione specifica matematica è più forte, più incisiva, più presente, più decisiva sia nella formazione, sia nella valutazione. Pertanto, alla fine del corso di laurea, coloro che davvero decidono poi di insegnare matematica nelle scuole (nei "Colegios", che si possono paragonare agli Istituti Comprensivi in Italia), frequentano corsi di specializzazione di 4 semestri di didattica della matematica, e qui davvero si entra in profondità. Esistono poi master e dottorati in *Educación matemática* utili non solo per apprendere e per svolgere sempre meglio il proprio lavoro, ma anche per ascendere più rapidamente a livelli stipendiali più alti (in Colombia ci sono 14 livelli stipendiali identici per tipo di scuola e si ascende per motivi e titoli accademici conseguiti che non per età).
Tutti i docenti si chiamano professori, non importa il livello scolastico, e gli stipendi sono identici; non è rara, tutt'altro, la figura di un professore che ha ore di insegnamento in livelli scolastici diversi. Il che, a mio parere, è molto chiarificatore e interessante, professionalmente formativo.
Come professoressa di scuola (che in Italia si potrebbe dire "superiore"), già dotata di specializzazione, venni cooptata dall'università Distrital di Bogotà per dare corsi come professoressa a contratto a studenti della licenciadura e nella specializzazione a professori in servizio. A quei tempi (fra il 1985 e il 1995) la didattica più conosciuta da noi erano le teorie di Gérard Vergnaud, di Raymond Duval e quelle sul curricolo di Jeremy Kilpatrick. Si nominava appena Guy Brousseau, era nota Colette Laborde soprattutto per il software Cabri, si facevano i nomi di Michèle Artigue, di Alan Bishop, dei coniugi

Dina e Pierre Van Hiele, di David Tall, di Celia Hoyles e di Richard Noss, soprattutto.
Nel 1996 il Relme (Réunion Latinoamericana de Matemática Educativa), creato in Messico da Ricardo Cantoral, chiese a noi didatti di Bogotà di organizzare la riunione annuale 1997 nella nostra città; si creò un gruppo di volontari per realizzare questo evento che portò a Bogotà 4000 convegnisti e tanti relatori stranieri, fra i quali uno solo europeo, Bruno D'Amore, a me totalmente sconosciuto.
Di lì a due anni, tutto cambiò; la didattica della matematica venne sempre meglio intesa, gli studi proliferarono, si iniziò addirittura a studiare una sorta di storia dell'evoluzione della didattica della matematica; e così tutte queste teorie cominciarono ad avere un ordine cronologico e logico, prima la teoria delle situazioni didattiche, poi la TAD di Yves Chavallard, la APOS di Ed Dubinsky, la EOS di Carmen Batanero e Juan Godino, la visione semiotica alla Duval, quella semiotico culturale alla Luis Radford, … Mentre scrivo queste righe mi rendo conto che potrei continuare a lungo questo elenco e ricordo ancora la mia meraviglia di quegli anni, 1998–2002, tutti dedicati alla loro scoperta e al loro studio meticoloso, per cercarne una nella quale credere, fino ad arrivare alla consapevolezza, condivisa con Bruno, che tutte hanno connotazioni di grande interesse, che ognuna ha uno scopo, che possono coesistere, che solo conoscendole tutte uno studioso critico sa quale scegliere e quando, e come usarla … Non abbracciare *una* teoria, dunque, ma possederle tutte, questa fu la scelta sua che io ora condivido in pieno. Non avevo mai fatto prima delle ricerche empiriche; facendole, mi rendevo conto che potevo approfittare di parecchi criteri, strumenti, metodi, a seconda della necessità, della specificità e della convenienza.
Negli anni di ricerca in Colombia fra il 1985 e il 1997 avevo collezionato centinaia, che dico?, migliaia di pagine di appunti scritti per future ricerche soprattutto legate alla problematica della formazione degli insegnanti e all'idea di valutazione, temi che sono stati il mio cavallo di battaglia per una dozzina d'anni. E avevo poi puntato tutto su un tema specifico di studio didattico, le frazioni, per poi scoprire grazie a Bruno che su questo tema c'erano migliaia di studi, che si tratta forse del tema più studiato al mondo fin dall'inizio della ricerca didattica … Così che, quando mi decisi a studiare per conseguire un dottorato dando un'interpretazione personale a questa ricerca, dovetti accettare l'idea di dedicare almeno 2–3 anni solo a fare una raccolta del "maggior numero possibile" di questi lavori, per selezionare quelli utili a me. Mi verrebbe voglia di dire "tutti", ma proprio in fase di difesa ufficiale della tesi di fronte a dieci giurati scoprii di aver ignorato un ricercatore ceco che uno di essi conosceva … Fortunatamente fui perdonata e compresa, anche perché nella tesi e nella difesa orale citai diverse centinaia di altri autori dicendo che erano stati scelti fra migliaia di altri possibili a me ben noti sulla base delle mie specifiche necessità di ricerca.

Leggevo solo spagnolo e inglese e, come fanno molti ingenui principianti, semplicemente evitavo testi scritti in altre lingue; ma Bruno mi insegnò che così non si può fare, che non è scientifico, che si devono leggere tutti gli articoli che si reputano utili. Ricorderò per sempre le lacrime agli occhi in una domenica che ci eravamo dati come compito quello di leggere due articoli scritti in olandese il cui abstract in inglese prometteva contenuti interessanti. Imparai anche a fare questo, vocabolario alla mano, a non aver paura di una lingua del tutto lontana dalle mie conoscenze.
Mai avrei creduto che un giorno nomi come quelli citati prima potessero essere quelli di amici attuali, quasi tutti quelli citati e molti di quelli che ancora non ho nominato; e d'essere trattata con rispetto da Ryamond Duval che mi invia con dedica suoi libri appena usciti, Colette Laborde, Athanasios Gagatsis che mi scrive prefazioni e mi invita a convegni a Rodi e Cipro, Guy Brousseau che mi scrive lettere personali con parole entusiasmanti e tenerissime, Juan Godino, Carmen Batanero, Vicenç Font, Carlos Vasco, Salvador Llinares, Luis Radford, Ferdinando Arzarello, Ricardo Cantoral, solo per dirne alcuni …
Quando tengo lezioni o seminari nei master e nei dottorati, cerco di trasmettere questo messaggio: che la ricerca in didattica della matematica è tanto scientifica quanto altre discipline già riconosciute come tali, che ha bisogno di studio specifico e profondo, che si possono ottenere risultati di estremo interesse, teorico e concreto. Ho avuto una lezione profonda che mi entusiasma condividere. E ho conosciuto e vissuto personalmente almeno parte della storia della didattica della matematica, con la fortuna di poter condividere esperienze con molti dei personaggi che l'hanno scritta e che la stanno scrivendo.

La teoria delle funzioni analitiche di Lagrange

Giovanni Ferraro
Università del Molise
Marco Panza
IHPST (CNRS and Université de Paris 1, Panthéon-Sorbonne)
Chapman University

Sunto. *Ricostruiamo in questa nota le caratteristiche salienti della teoria delle funzioni analitiche di Lagrange, mettendo in evidenza la sua struttura, le sue assunzioni fondamentali, così come i suoi principali problemi. Rendiamo conto della nozione di funzione derivata impiegata da Lagrange, e di come essa si richiama a una teoria generale delle serie, così come del modo in cui Lagrange perviene a stabilire l'algoritmo delle funzioni derivate e a ricostruire, sulla base di tale nozione, l'intero edificio del calcolo differenziale e integrale. Rivolgiamo un'attenzione particolare al teorema del resto di uno sviluppo di Taylor in forma di Lagrange mostrando tanto le differenze fra il modo in cui tale teorema è concepito da Lagrange e il modo in cui lo si concepisce oggi, che il ruolo che questi gli assegna come ponte fra la teoria delle funzioni derivate e le sue applicazioni geometriche e meccaniche.*

Abstract. *We reconstruct in this note the salient features of Lagrange's theory of analytic functions, highlighting its structure, its fundamental assumptions, as well as its main problems. We account for the notion of a derivative function which is employed by Lagrange, and for the way it depends on a general theory of series, as well as for way in which Lagrange comes to determine the algorithm of derivative functions and to reconstruct, on the basis of this notion, the whole corpus of the differential and integral calculus. We pay special attention to the remainder theorem for a Taylor expansion in the form of Lagrange, showing both the differences between the way in which this theorem is conceived by Lagrange himself and the way in which it is understood today, and the role he assigns to it as a bridge between the theory of derivative functions and its geometrical and mechanical applications.*

1. Premessa

Intorno all'anno 1800, Lagrange scrisse due volumi contenenti un'ampia trattazione del calcolo differenziale e integrale: la *Théorie des fonctions analytiques,* e il *Leçons sur le calcul des fonctions* La *Théorie* fu pubblicata nel mese di *Prairial* dell'anno V (secondo il calendario rivoluzionario, ossia tra il 20 Maggio e il 18 giugno 1797) presso l'*Imprimerie de la République*. Poco dopo, nel 1801, uscì, come decimo volume della seconda edizione delle *Leçons de École Normale de l'an III*, la prima edizione delle *Leçons.* Il titolo era *Sur le calcul des fonctions* e il volume fu ristampato, con lo stesso titolo e modeste modifiche, nel 12mo *cahier* del *Journal de l'École Polytecnique*, *Thermidor*, an. XII (Luglio–Agosto 1804). La seconda edizione apparve nel

1806 con il titolo *Leçons sur le calcul des fonctions*, *nouvelle édition revue, corrigée et augmentée par l'auteur* (Paris: Courcier). Anche la *Théorie* ebbe una seconda edizione, pubblicata nel 1813, un anno prima della morte di Lagrange (Paris: Courcier).

Tali volumi siano stati certamente scritti anche in connessione all'attività di insegnamento di Lagrange presso la scuola politecnica. Lagrange, infatti, nominato presidente del *Conseil de l'École* della *École centrale des travaux publics*, più tardi *École polytechnique*, nel 1794, e incominciò a insegnare nella Primavera 1795. Probabilmente la *Théorie* include argomenti insegnati nei corsi del 1795 e 1796 e le *Leçons* argomenti insegnati nel 1799. Nonostante ciò, va subito sgombrato il campo da un equivoco: la *Théorie* e le *Leçons* non sono dei semplici manuali universitari ma opere molto ambiziose che intendevano portare a compimento un progetto cruciale per la matematica dell'Illuminismo. Tale progetto, il cui primo manifesto fu l'*Introductio in analysin infinitorum* di Euler, pubblicata nel 1748 (Euler, 1748) mirava a una ricostruzione dell'edificio della matematica ponendo al suo centro l'analisi, considerata come la parte la più pura, la più astratta e la più generale delle scienze matematiche. Gli altri rami della matematica, in particolare la meccanica e la geometria, erano visti come una sorta di analisi applicata, ottenuta utilizzando gli strumenti forniti dall'analisi ma basandosi su nozioni considerate come casi particolari di quelle studiate in analisi.

È opportuno chiarire immediatamente che l'analisi come concepita nel Settecento era qualcosa di molto diverso dalla moderna analisi reale. È una diversità che affonda le sue radici nei concetti base su cui sono costruite le due teorie. Infatti, a fondamento di tutta la moderna analisi reale vi sono le nozioni di insieme e di numero (reale), sulle quali si costruisce progressivamente l'intera teoria: dapprima, la nozione di limite, poi, mediante un sapiente uso del concetto di limite, le derivate, gli integrali, e le serie.

Nel Settecento la teoria degli insiemi non era ancora nata e una nozione complessa come quella di numero reale era lungi da venire (sicuramente erano note entità come π o il numero di Nepero, ma un oggetto come l'insieme dei reali non era disponibile se non richiamandosi in qualche modo all'intuizione geometrica). La matematica settecentesca era concepita come la scienza delle quantità: la geometria quella delle quantità geometriche (segmenti, aree, angoli, …), la meccanica quella della quantità meccaniche (velocità, accelerazioni, …), l'aritmetica quella delle quantità discrete (i numeri naturali). Queste quantità erano tutte considerate come entità particolari sulle quali erano definite un'eguaglianza (distinta dall'identità), una relazione di ordine stretto e un'addizione. Ciò era inteso costituire l'essenza della nozione di quantità: una quantità particolare era vista come un'entità di una natura particolare (ad esempio, un segmento), legata a un'altra della stessa natura (cioè ad altri segmenti) da appropriate regole che fornivano le relazioni di uguaglianza e di ordine e definivano l'operazione di addizione tra di esse (ad esempio, permettevano di stabilire se due segmenti erano uguali o se uno era maggiore dell'altro e di sommarli). L'analisi si distingueva dalla geometria e dalla meccanica in quanto non trattava quantità particolari ma le quantità astratte, ossia quantità legate fra loro nel modo sopra precisato, sulle quali erano inoltre definite le altre usuali operazioni aritmetiche, ma prive di ogni natura specifica. Per questo motivo le quantità astratte potevano essere identificate solo dalle relazioni operazionali intercorrenti fra di esse: esse venivano espresse da lettere, o, eventualmente, da simboli numerici appropriatamente intesi (come già Descartes aveva suggerito all'inizio della *Géometrie*: cf. Descartes, 1637, p. 297), e le loro relazioni operazionali erano, a loro volta espresse, da scritture simboliche, o formule, capaci di manifestare le operazioni atte a condurre dalle une alle altre. Per esempio la formula '$3x$' era intesa denotare una quantità caratterizzata dall'essere il triplo della quantità x (qui '3' era quindi inteso come un indice indicando il numero delle reiterazioni dell'addizione di x a se stessa). Tali formule erano, appunto, l'oggetto di studio dell'analisi. La loro manipolazione sottostava alle regole dell'algebra, quali:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

e a quelle del calcolo differenziale e integrale, quali:

$$\frac{d(x^{n-1})}{dx} = nx^{n-1}.$$

Questa breve descrizione ci fa capire che il contesto in cui si muoveva Lagrange era del tutto diverso da quello della matematica moderna. Se non si tiene conto di tale contesto, la teoria delle funzione analitica potrebbe sembrare la bizzarra invenzione di un anziano studioso, mentre in realtà essa rispondeva a esigenze profonde della matematica del tempo.

2. La teoria delle serie nel Settecento

Per meglio comprendere questo contesto, iniziamo con l'osservare che, dopo Euler, l'analisi era generalmente distinta in tre parti (per dettagli si veda: Ferraro, 2010):

– l'analisi delle quantità finite, ossia l'algebra, nella quale non si faceva uso dell'infinito,
– l'analisi degli infiniti, ovvero il calcolo differenziale e integrale, con tutti i suoi sviluppi,
– una parte intermedia, che Euler aveva chiamato 'introduzione all'analisi degli infiniti', nella quale si studiavano le funzioni, le loro trasformazione e i loro sviluppi in serie di potenze, senza far uso del calcolo differenziale.

Tale tripartizione (che Lagrange, di fatto, riassorbirà, pensando i primi due livelli come casi specifici del terzo) può lasciare sconcertati, in particolare per la presenza della teoria delle serie in una specie di limbo tra il finito e l'infinito. Per chiarire il punto di vista di Euler, notiamo che in un testo matematico settecentesco un'espressione come:

$$A + B + C + etc.$$
denota una somma che può essere tanto finita, come in:
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
quanto infinita, come in:
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$
Questo non dipende dalla scelta di un simbolismo infelice; al contrario, il simbolismo settecentesco non distingueva tra finito e infinito, perché questa distinzione era intesa come inessenziale: posto che su una somma come $A + B + C + etc$ si operi termine a termine, non vi è nessuna necessità, ai fini puramente operazionali, di distinguere il caso in cui la somma è finita da quelle in cui è infinita. Ciò conduceva a pensare, per esempio, una serie intera:
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$
come un polinomio infinito (spesso detto '*infinitomio*') e a ritenere che gli sviluppi in serie intere delle funzioni potessero venir ottenute applicando in modo appropriato le tecniche dell'algebra ordinaria. Un esempio aiuterà a comprendere queste affermazioni. Vogliamo determinare lo sviluppo in serie intera della funzione:
$$y = \frac{1}{1+x}$$
Poniamo:
$$\frac{1}{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
e, operando come se il secondo membro fosse un normale polinomio, avremo:
$$1 = (1+x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$$
Sviluppando la moltiplicazione a secondo membro, si ha:
$$1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots$$
quindi:
$$1 = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_2 + a_3)x^3 + \cdots$$
Affinché il primo e il secondo membro siano uguali, quale che sia x, occorre che i coefficienti delle sue diverse potenze siano tutti separatamente nulli, ovvero:
$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_0 + a_1 = 0 \\ &a_1 + a_2 = 0 \\ &a_2 + a_3 = 0 \\ &\ldots \end{aligned}$$
ossia:
$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \\ &a_1 = -1 \\ &a_2 = 1 \\ &a_3 = -1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto lo sviluppo:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{1}$$

Un tale procedimento era inteso obbedire a quello che era generalmente chiamato 'metodo dei coefficienti indeterminati': tale "metodo" costituisce uno degli strumenti principali della teoria delle serie settecentesca (sulla teoria delle serie nel Settecento, si veda: Ferraro & Panza, 2003; Ferraro, 2008).
A questo punto, però, sorge il problema di capire che cosa significhi il segno '=' ha nella (1). Infatti, se a x sostituiamo, ad esempio, il valore –2, otteniamo la serie:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

che cresce all'infinito e non può quindi essere intesa come uguale a –1, il valore della funzione $\frac{1}{1+x}$ per $x = -2$.
Oggi, in analisi reale, una funzione di x è intesa essere uguale al suo sviluppo in serie se e solo se la prima esprime lo stesso numero dalla seconda, per tutti i valori che x può prendere. Per garantire che tale uguaglianza abbia luogo si precisa, quindi, il cosiddetto intervallo di convergenza della serie, scrivendo, per esempio:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad \text{per } -1 < x < 1 \tag{2}$$

3. La nozione lagrangiana di derivata

Mentre nel Settecento l'estensione alle serie di potenze delle procedure algebriche ordinarie era comunemente accettata, le procedure su cui si basava il calcolo differenziale e integrale, o la sua versione newtoniana, nota come teoria delle flussioni, erano spesso oggetto di considerazioni critiche, in quanto esse implicavano, in un modo o nell'altro, la nozione di infinitesimo (qualche volta mascherata dietro l'appello a una nozione intuitiva di limite), considerata come problematica. Una quantità infinitamente piccola (positiva) era inteso una quantità più piccola di ogni altra quantità positiva, senza pertanto essere nulla, tanto da poter essere omessa, o essere tale che le sue potenze, oltre un certo ordine, potessero essere omesse, in certe circostanze, ma non in altre.
Qualche secolo dopo, in un differente contesto storico, e soprattutto matematico, Robinson riuscirà a formalizzare la nozione di infinitesimo (Robinson, 1966), e dopo di lui, altri, per esempio Nelson (1977), troveranno il modo di ottenere lo stesso risultato in modo molto più semplice, senza ricorrere alle complesse nozioni proprie della teoria dei modelli, involte nella teoria di Robinson. Ma all'epoca tale nozione si prestava all'accusa di scarsa chiarezza e precisione concettuale. Questo era certamente un buon motivo per cercare di evitare ogni richiamo a questa nozione, senza tuttavia dover rinunciare ai risultati ottenuti richiamandosi a essa, tramite l'impiego del calcolo differenziale o integrale o dell'analoga teoria delle flussioni. Nessuno prima di Lagrange era tuttavia riuscito in questo intento. Euler era piuttosto

riuscito a spostare l'attenzione dai singoli differenziali *dx* e *dy* al rapporto differenziale $\frac{dy}{dx}$ (Euler, 1755). Così come esso era impiegato all'epoca, quest'ultimo svolgeva finzioni simili a quella che oggi chiamiamo 'derivata', ma veniva pur sempre definito come rapporto di due differenziali (e quindi infinitesimi).
Questa era la situazione quando Lagrange scrisse i suoi trattati. Evitare il ricorso alla nozione di infinitesimo o a altre nozioni apparentate era appunto uno degli obiettivi specifici della teoria delle funzioni analitiche. Lagrange stesso lo sottolineò nel titolo completo del primo di tali trattati: *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'evanouissans, de limites et de fluxions, et réduite à l'analyse algébrique des quantités finies*.
In altri termini, l'obiettivo dichiarato di Lagrange (o almeno uno dei suoi obiettivi) era quello di mostrare che l'algoritmo del calcolo differenziale e integrale, così come tutte le sue applicazioni, potessero venir ridotti, a un impiego appropriato di procedure di origina algebrica, applicate a quantità finite. Raggiungendo tale obiettivo, Lagrange avrebbe anche mostrato come l'intera matematica conosciuta potesse ridursi a una "algebrica" delle funzioni: l'analisi algebrica, appunto.
La nozione fondamentale alla quale Lagrange si richiama per perseguire questo obiettivo è quella di funzione derivata, introdotta tramite la definizione seguente:
Definizione di derivata. Data la funzione $f(x)$, si consideri un incremento ξ della sua variabile x, e la funzione associata (a due variabili x e ξ) $f(x+\xi)$; si sviluppi quest'ultima funzione in serie intera in ξ, ottenendo un'uguaglianza della forma:

$$f(x+\xi)=f(x)+p(x)\xi+q(x)\xi^2+r(x)\xi^3+\&c.,$$

dove $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sono appropriate funzioni della stessa x, indipendenti da ξ. La prima di esse, la funzione $p(x)$ è allora (funzione) derivata di $f(x)$.
Per vedere come tale definizione funzionasse nella pratica della teoria di Lagrange, vediamo come ottenere la derivata della funzione $f(x)=\frac{1}{1+x}$. A tal scopo, osserviamo anzitutto che vale lo sviluppo:

(3) $$\frac{1}{b+x}=\frac{1}{b}-\frac{x}{b^2}+\frac{x^2}{b^3}-\frac{x^3}{b^4}+\cdots$$

il quale può essere ottenuto in maniera del tutto analoga allo sviluppo di $\frac{1}{1+x}$.
Passiamo a considerare la funzione $f(x+\xi)=\frac{1}{1+(x+\xi)}$. Scrivendo:

$$f(x+\xi)=\frac{1}{(1+x)+\xi}$$

e applicano la (3) con $b=1+x$ e $x=\xi$, otteniamo:

$$\frac{1}{1+(x+\xi)}=\frac{1}{(1+x)+\xi}=$$

$$= \frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\xi + \frac{1}{(1+x)^3}\xi^2 - \frac{1}{(1+x)^4}\xi^3 + \cdots$$

Il coefficiente:

$$-\frac{1}{(1+x)^2}$$

di ξ in tale sviluppo è la derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Un lettore avvezzo alla moderna matematica potrebbe porsi la seguente questione: la definizione di Lagrange permette certamente di ottenere la derivata di funzioni semplici, come quella considerata nell'esempio, e comunque solo di funzioni $f(x)$ la cui funzione associata $f(x+\xi)$ e sviluppabile in serie intera in ξ; ma sappiamo che ci sono funzioni che non soddisfano questa condizione; come è possibile, allora, che Lagrange pensasse che la sua definizione fosse sufficientemente generale?

Per rispondere, sia pure sommariamente, a tale domanda, osserviamo che le parole 'funzione' e 'variabile' avevano per Lagrange (e, in generale, per i matematici del Settecento) un significato molto diverso da quello attuale. Oggi una funzione di variabile reale f: A → B è generalmente concepita come una legge che associa a ogni elemento x dell'insieme A (o di un suo sotto-insieme) un elemento y dell'insieme B (con A e B sottoinsiemi dell'insieme dei reali), o, estensionalmente, come una coppia ordinata di insiemi formata dall'insieme A (o da un suo sotto-insieme) e da un sotto-insieme di B.

Nel mondo di Lagrange, come abbiamo detto all'inizio, la teoria degli insiemi era lungi dall'essere nata, e neppure lo era la teoria dei numeri reali, nella sua forma moderna: non solo non vi era posto per la nozione generale di insieme, ma neppure per nozioni assimilabili a quelle di insieme dei numeri reali o di sotto-insieme di tale insieme, o di un suo sotto-insieme. Le variabili di Lagrange pertanto non erano affatto intese variare sull'insieme dei numeri reali (o su qualche suo sottoinsieme). Erano piuttosto concepite come quantità astratte, nel senso indicato più sopra. Una funzione era identificata con una (unica) espressione analitica, ovvero un'espressione ottenuta in un numero finito di passi a partire dalle funzioni semplici (ossia le funzioni potenza, l'esponenziale, il logaritmo, e le funzioni trigonometriche di base, dirette e inverse), pensate, a loro volta come espressioni elementari, tramite le operazioni algebriche, la composizione di funzione, o l'impiego di rappresentazioni implicite via equazioni (non differenziali). Un'espressione analitica era, a sua volta, identificata con una quantità astratta (avete letto bene: una espressione era direttamente concepita come una quantità; se siete perplessi e volete capire meglio come questo fosse possibile, non possiamo che rimandare a lavori più approfonditi, come il nostro: Ferraro & Panza, 2003, o ad altri lavori lì citati).

Volendo dare una definizione ricorsiva, più o meno precisa, si può affermare

che per Lagrange:
1) le variabili atomiche (ovvero x, y, etc.) sono funzioni;
2) se x è una variabile, allora $x^{n/m}$ (con n e m numeri interi), $\log_a x$, a^x, $\sin x$, $\arcsin x$;
3) se α e β sono funzioni o costanti, allora $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$; $\alpha\,\beta$, α / β, $\alpha \circ \beta$;
4) se α è una funzione, l'equazione $\alpha=0$, fornisce una rappresentazione implicita di una o più funzioni;
5) non vi sono altre funzioni.

Non è affatto chiaro se, per Lagrange, la clausola (4) desse luogo a funzioni diverse da quelle ottenute in base alle clausole (1)-(3), o se essa potesse venir omessa, in quanto tale da fornire soltanto funzioni già ottenibili in base a queste ultime clausole. Quello che è certo è che egli considera il problema di determinare la derivata di una funzione implicita come un problema particolar, distinto da quello di determinare la derivata di una funzione esplicita formata in base a queste clausole. Quando Lagrange parla di "funzioni analitiche" intende esattamente queste funzioni: sono esse gli oggetti studiati in analisi.

Ora, la matematica settecentesca era perfettamente in grado di determinare gli sviluppi in serie di potenze di qualsiasi funzione intesa in tal senso. Infatti, erano ben noti gli sviluppi delle funzioni algebriche; dell'esponenziale, del logaritmo, e delle funzione trigonometriche dirette e inverse. Era allora sufficiente assumere che le serie intere potessero comporsi come le funzioni di cui forniscono lo sviluppo, per ottenere, a partire da questi sviluppi, quelli di ogni funzione esplicita o implicita. Euler aveva mostrato come fare tutto ciò in modo sistematico nel primo volume dell'*Introductio* (Euler, 1748), anche se, in alcuni casi, si era richiamato a argomenti infinitesimalisti, che Lagrange mostrerà come evitare.

4. La costruzione dell'algoritmo delle funzioni derivate

Passiamo ora a vedere come è strutturata la teoria lagrangiana delle funzioni analitiche. Una disanima anche superficiale delle *Théorie* e delle *Leçons* mostra che essa è costituita da quattro componenti principali.

(a) Il primo componente risponde alla necessità di convincere un lettore (a conoscenza della matematica del tempo) della appropriatezza della definizione precedente di (funzione) derivata, ovvero del fatto che da essa discende esattamente lo stesso algoritmo che era in uso nel calcolo differenziale e integrale. Per brevità, chiameremo questo elemento 'dimostrazione fondamentale della teoria delle funzioni analitiche'.

I tre restanti componenti sono i seguenti:

(b) la riformulazione dell'intero edificio del calcolo differenziale e integrale, nelle sua parte pura, in termini di finzioni derivate (definite come detto);
(c) il teorema del resto in forma di Lagrange (che fornisce il resto di una ridotta parziale qualsiasi dello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi);

(d) le applicazioni geometriche e meccaniche della teoria, discendenti da quest'ultimo teorema e equivalenti a quelle note del calcolo differenziale e integrale.

La dimostrazione fondamentale è lungi dall'essere una prova impeccabile, secondo i nostri standard, e, a dire la verità, anche secondo quelli dell'epoca. Essa sembra più che altro rivolta a convincere i lettori. Richiamandosi alla "teoria delle serie" (termine che sembra voler riferirsi ai risultati esposti da Euler nel primo volume dell'*Introductio*, menzionati qui sopra) Lagrange ritiene del tutto assodato che una qualsiasi funzione $f(x+\xi)$ abbia uno sviluppo della forma:

$$f(x+\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\,\xi^{a_k} \tag{4}$$

dove gli esponenti a_k sono numeri razionali. Egli ritiene però di dover dimostrare che tali esponenti non possano, più in particolare, che essere dei numeri naturale e che, quindi, ogni funzione $f(x+\xi)$ abbia uno sviluppo della forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\,\xi^{k} \tag{5}$$

L'argomento che Lagrange presenta a questo fine è stato oggetto di molte controversie, non solo quanto alla sua correttezza, ma anche, e soprattutto, quanto al suo effettivo contenuto, a ciò che Lagrange intende asserire, e a ciò che egli pensa, precisamente, di aver mostrato. (Su questo rimandiamo a: Ferraro & Panza, 2012; Fraser, 1987; e ad altri numerosi lavori ivi citati). Il nostro parere è che Lagrange ritenesse di aver dimostrato che:

– la serie intera $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} p_{\mathrm{k}}(x)\,\xi^{\mathrm{k}}$ è unica per ogni funzione $f(x+\xi)$, ovvero, a ogni tale funzione può essere associato un'unica serie intera in ξ, che ne è lo sviluppo;
– i coefficienti $p_k(x)$ di tale serie sono definiti per ogni x nel dominio di definizione di $f(x)$, salvo eventualmente per alcuni valori isolati;
– per ogni valore di x per cui la funzione $f(x)$ è definita, la serie converge a tale funzione quando il valore di ξ appartiene a un appropriato intorno (non nullo) dello zero;
– quando x e ξ sono indeterminate, la funzione $f(x+\xi)$ e il suo sviluppo $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\,\xi^k$ sono inter-sostituibili.

Il secondo e il quarto punto richiedono qualche precisazione. Lagrange afferma che la sua dimostrazione: "è generale e rigorosa finché x e ξ rimangono indeterminate; ma essa cesserebbe di esserlo se si dessero a x dei valori determinati" (Lagrange, 1813, 23). Con tali parole egli sembra voler riconoscere che vi potrebbero essere dei valori particolari di x, isolati nel dominio di definizione di $f(x)$, per cui la dimostrazione, e quindi il risultato che essa stabilisce non valgono. Consideriamo le due funzioni $\frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$. Per esse, valgono, secondo Lagrange, le seguenti eguaglianze:

(6) $$\frac{1}{x+\xi}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\xi+\frac{1}{x^3}\xi^2-\frac{1}{x^4}\xi^3+\cdots$$

(7) $$\sqrt{x+\xi}=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\xi-\frac{1}{8x\sqrt{x}}\xi^2+\frac{1}{16x^2\sqrt{x}}\xi^3+\cdots$$

Entrambi i membri di destra di queste eguaglianze non sono definiti per x=0. Ma mentre nel primo caso, neppure la funzione generatrice, ovvero $\frac{1}{x}$, è definita per questo valore di x, nel secondo, la funzione generatrice, ovvero $\sqrt{x}$, è perfettamente definita per questo valore di x, mentre non lo è (come il membro di destra della (7)) per x negativo. Il valore x=0 è allora escluso dal dominio di definizione di $\frac{1}{x}$ e è quindi naturale, secondo Lagrange, che la (6) non valga per tale valore, posto che per esso è la stessa funzione generatrice che non risulta definita. Questo stesso valore è invece un valore isolato nel dominio di definizione di $\sqrt{x}$ per cui, secondo Lagrange, la (7) non vale.

Nessuno di questi due casi induce Lagrange a restringere le eguaglianze (6) e (7). Per lui, queste valgono in generale, il che vuol dire che valgono per ogni valore nel dominio di definizione dalle rispettive funzioni generatrici, e garantiscono quindi la generale inter-sostituibilità dei loro rispettivi membri, qualora x e ξ rimangano indeterminati, anche se la seconda, non si riduce a un'eguaglianza fra quantità quando x prende il valore 0.

Un matematico moderno quando formula un teorema su una certa funzione $f(x)$ definisce, preliminarmente l'insieme A dei valori di x per cui il teorema vale. In altri termini, il suo teorema assume la forma seguente:

(SM) $\forall x \in A$, f(x) ha la proprietà P

Questa non era l'attitudine dei matematici del Settecento, e, in particolare, non era quella di Lagrange. Essi formulavano i loro teoremi relativi alle loro funzioni senza imporre restrizioni preliminari sul valore della variabile (se non quelle implicite dipendenti dall'eventuale restrizione del dominio di definizione di tali funzioni), lasciando sottinteso che un teorema possa ammettere eccezioni di natura quantitativa (ovvero non condurre a un'eguaglianza fra quantità) in certi casi particolari e isolati. Un loro teorema assume allora la forma seguente:

(SL) $f(x)$ ha la proprietà P per x indeterminata, salvo che per alcuni valori particolari di x, isolati nel dominio di definizione di $f(x)$, questo non si traduce in un'uguaglianza fra quantità.

Ritorniamo ora all'algoritmo delle funzione derivate. Dopo aver stabilito l'eguaglianza:

(8) $$f(x+\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x)\,\xi^k,$$

da intendersi come abbiamo specificato sopra, Lagrange continua mostrando che il membro di destra di tale eguaglianza può scriversi in una forma appropriata, analoga a quella che oggi assegniamo alla serie di Taylor (ma si noti che per Lagrange, queste ultime funzioni non erano definite e determinate indipendentemente dalla serie stessa, ma in forza di essa). Si tratta del primo passo del componente (a) della sua teoria. A questo scopo, Lagrange fa vedere dapprima che i coefficienti di tale membro si possono ottenere ricorsivamente uno dall'altro, a meno di un fattore numerico. Più precisamente, egli dimostra il seguente teorema:

Teorema. La funzione $p_0(x)$ è la stessa funzione $f(x)$, mentre, per $k>0$, la funzione $p_k(x)$ assume la forma $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$ in cui, per $k > 1$, $f^{(k)}(x)$ ottiene da $f^{(k-1)}(x)$ allo stesso modo in cui $p_1(x)=f^{(1)}(x)$ si ottiene da $f(x)$.

Ne segue, in base alla definizione precedente di funzione derivata, che la (8) può riscriversi sotto la forma:

$$f(x+\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k$$

in cui $f^{(0)}(x)=f(x)$, e, per ogni $k > 1$, $f^{(k)}(x)$ è la funzione derivata di $f^{(k-1)}(x)$, che Lagrange chiama anche, per brevità, 'derivata k-esima di $f(x)$'.

Il problema dell'identificazione dell'algoritmo delle funzioni derivate, ovvero del modo in cui esse si ottengono a partire dalla rispettive primitive, si riduce quindi a stabilire come ottenere il coefficiente $p_1(x) = f^{(1)}(x)$ in (8) a partire da $f(x)$.

Questo è appunto il secondo passo del componente (a) della teoria di Lagrange. Richiamandosi ai risultati di Euler a proposito degli sviluppi in serie intera delle funzioni elementari, in parte ridimostrati in modo da evitare ogni ricorso a argomenti infinitesimalisti, Lagrange determina dapprima le derivate delle seguenti funzioni:

$$y = x^{n/m}$$
$$y = a^x$$
$$y = log_a x$$
$$y = sin\ x$$
$$y = cos\ x.$$

La presenza in questa tanto del seno quanto del coseno può apparire sorprendente, posto che ognuna di queste funzioni si definisce facilmente in termini dall'altra. La scelta di Lagrange sembra dettata da ragioni di semplicità e adesione alla tradizione geometrica, più che da motivi di eleganza e essenzialità. Ancora più sorprendente è l'assenza di ogni funzione trigonometrica inversa. Non è tutta via difficile capire come quest'ultima lacuna possa venir colmata.

Ciò fatto, egli mostra come passare dalle derivate di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ alle derivate delle funzioni:

$$f(x) \pm g(x)$$

$$f(x)\, g(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$f \circ g(x)$$

e come ottenere la derivata della funzione $y = y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $F(x,y) = 0$, in cui $F(x,y)$ sia una funzione di x di cui si conosca la derivata, contenente il parametro y.

Data la nozione lagrangiana di funzione, questo è sufficiente, agli occhi di Lagrange, per permettere di determinare la derivata di ogni funzione. Aggiungiamo solo due ulteriori precisazioni.

Primo, gli argomenti precedenti mostrano, naturalmente, che le funzioni derivate di ogni ordine di una qualsiasi funzione $y = f(x)$ si ottengono da quest'ultima funzione tramite lo stesso algoritmo che permette di ottenere da essa i rapporti differenziali $\frac{d^k y}{dx^k}$ per ogni k. Ciò mostra che le derivate coincidono formalmente con tali quozienti e sono quindi definite esattamente per gli stessi valori di x per cui sono definiti questi ultimi.

Secondo, Lagrange considera esplicitamente il caso dei valori isolati della variabile nel dominio di definizione di una funzione per cui le derivate di un qualche ordine non sono definite. La conclusione cui giunge può essere riassunta nel modo seguente:

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché x_0 sia un valore isolato della variabile x tale che:

$$\left[\frac{d^k y}{dx^k}\right]_{x=x_0}$$

sia definito se e solo se $k \leq n$ (con $n>0$) è che l'unico sviluppo di $f(x_0 + \xi) = f_{x0}(\xi)$ i cui primi n+1 termini hanno rispettivamente la forma $A_k\xi^k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), dove A_k non dipende da ξ, è il seguente:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\xi^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} F_k(\xi)$$

dove $f^{(k)}(x)$ coincide formalmente con ($k = 0, 1, \ldots, n$), e le $F_k(\xi)$ ($k = n+1, n+2, \ldots$) sono opportune funzioni della sola variabile ξ.

Ciò permette di dare un senso preciso alla nozione di funzione derivata di ogni ordine di una funzione $f(x)$ anche per valori di x, per cui questa funzione non possiede uno sviluppo in serie intera.

5. La riformulazione dell'edificio del calcolo differenziale e integrale, e delle sue applicazioni geometriche e meccaniche in termini di funzioni derivate

Molti dei risultati che costituivano l'edificio del calcolo differenziale e integrale, così come svariate applicazioni di questo tanto geometriche che

meccaniche, erano stati ottenuti mediante argomenti infinitesimalisti, dipendenti cioè dall'interpretazione dei differenziali come grandezze infinitamente piccole o degli integrali come somme di infinite grandezze infinitamente piccole. Mostrare che l'algoritmo delle funzioni derivate coincide con quello dei rapporti differenziali non era quindi sufficiente per Lagrange per concludere che l'intero edificio del calcolo, e tutte le sue applicazioni geometriche e meccaniche potevano riformularsi entro la teoria di tali funzioni: non era operare una semplice traduzione notazionale; gli stessi argomenti da cui tale edifico e tali applicazioni dipendevano dovevano essere sostituti, se possibile, da nuovi argomenti fondati sulla considerazione degli sviluppi in serie intera, i quali non potevano certo essere ottenuti meccanicamente a partire dai primi per semplice trascrizione.
La maggior parte della *Théorie* e delle *Leçons* sono dedicate a mostrare come questo fosse possibile, attraverso la considerazione di un grande numero di questioni, più o meni fondamentali, e di esempi (posto che Lagrange non poteva sperare di trattare tutti gli argomenti attinenti al calcolo differenziale e integrale e alle sue applicazioni in due soli trattati, peraltro in gran parte sovrapponibili per argomenti trattati).
Lasciando da parte il teorema del resto, su cui verremo più tardi, ecco l'elenco completo degli argomenti affrontati da Lagrange nei suoi due trattati:

Teoria delle funzioni derivate e delle corrispondenti primitive

1. Derivata di una funzione rispetto a una funzione qualsiasi di una sua variabile.
2. Equazioni alle derivate e trasformazioni delle funzioni.
3. Formule relative alle funzioni trigonometriche.
4. Costanti arbitrarie incluse nelle soluzioni delle equazioni alle derivate.
5. Soluzione di alcune classi di equazioni alle derivate.
6. Teoria delle primitive singolari.
7. Applicazioni alle serie e alle equazioni di terzo grado.
8. Sviluppo di una funzione qualsiasi di una radice dell'equazione $z = x + f(z)$.
9. Funzioni di più variabili e equazioni alle derivate parziali.
10. Teoria dei moltiplicatori.
11. Equazioni alle differenze finite.
12. Calcolo delle variazioni.

Applicazioni geometriche:

1. Tangenti e punti di contatto delle curve.
2. Massimi e minimi.
3. Quadrature e rettificazioni.
4. Curve e superfici nello spazio.
5. Volumi e aree su superfici non piane.

Applicazioni meccaniche:

1. Velocità, accelerazione e forza.
2. Composizione dei moti e delle forze.
3. Moto curvilineo ed equazione del moto.
4. Moto in un mezzo resistente.
5. Moto su una superficie e principio delle velocità virtuali.
6. Centro di gravità e rotazione delle superfici.
7. *Vis Viva* e conservazione dell'energia.

Non possiamo certo considerare tutte queste questioni, neppure per sommi capi. Possiamo però presentare un esempio. Quello che abbiamo scelto attiene alla determinazione della tangente a una curva data. La ragione per cui abbiamo scelto di considerare un'applicazione, piuttosto che un aspetto della teoria pura delle funzioni derivate e delle loro primitive, è che vi è una differenza fondamentale fra la riformulazione lagrangiana dell'edificio del calcolo differenziale e integrale nelle loro parte pura, e quelle delle sue applicazioni geometriche e meccaniche. Mentre la prima si fonda sulla semplice considerazione delle funzioni derivate e delle serie in cui esse intervengono consisterete per il loro aspetto formale, la seconda richiede considerazioni di natura quantitativa, relative a quantità particolari, rispettivamente geometriche e meccaniche. Innovando notevolmente rispetto alla tradizione precedente, Lagrange introduce un strumento generale atto a presiedere a tali considerazioni: il teorema del resto, forse il principale risultato innovativo presentato nella *Théorie* e nelle *Leçons*. Passiamo quindi con il considerare tale teorema.

6. Il teorema del resto: un ponte tra la teoria delle funzioni derivate e le sue applicazioni

La versione lagrangiana del teorema del resto è radicalmente differente da quella moderna. Oggi il teorema del resto in forma di Lagrange è generalmente identificato con il risultato seguente:

Teorema del resto in forma di Lagrange (versione moderna). Sia *f*(z) una funzione della variabile reale z derivabile h volte in un intorno destro di x che include x, e (h+1) volte all'interno di tale intorno. Se z appartiene a tale intorno, ma è diverso da x, allora la differenza fra *f*(z) e il suo polinomio di Taylor di ordine h, ovvero:

$$R_h(z,x) = f(z) - \sum_{k=0}^{h} \frac{d^k}{dz^k}[f(z)]_{z=x} \frac{(z-x)^k}{k!} \qquad (9)$$

è uguale a:

$$\frac{d^{h+1}}{dz^{h+1}}[f(z)]_{z=\lambda} \frac{(z-x)^{h+1}}{(h+1)!} \qquad (10)$$

dove λ è un numero compreso (strettamente) tra x e z.

Il teorema dimostrato da Lagrange nei suoi trattati differisce da questo non solo per la differenza già osservata fra la sua nozione di funzione derivata e quella oggi generalmente impiegata, ma anche perché esso fa intervenire esplicitamente la serie di Taylor (non solo il relativo polinomio di un ordine k qualsiasi) e suppone che tale serie converga alla sua funzione generatrice (ciò che impedisce, ovviamente, a Lagrange di usare tale teorema per dimostrare che la serie converge a tale funzione, sotto opportune condizioni).
Più in particolare, nel teorema di Lagrange, il resto $\mathrm{R_h}(x, \xi)$ è definito come la parte che segue il termine di ordine h dello sviluppo in serie intera della funzione $f(x + \xi)$, per la sostituzione $\xi = z - x$, ossia:

$$(11) \qquad R_h(x,\xi) = \sum_{k=h+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k = \sum_{k=h+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(z-x)^k$$

Il teorema asserisce che il resto così definito si lascia esprimere tramite una forma analitica compatta:
Teorema del resto (versione di Lagrange). Se ξ è un incremento positivo tale che la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k$$

converge a $f(x+\xi)$, allora, per ogni h (h = 0,1, . . .), si ha:

$$(12) \qquad f(x+\xi) = \sum_{k=0}^{h} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k + \frac{\xi^{h+1}}{(h+1)!} f^{(h+1)}(x+j)$$

dove j è un incremento tale che $0 \leq j \leq \xi$.
L'esempio che abbiamo scelto mostra il ruolo di mediazione tra la parte pura della teoria delle funzioni derivate e le sue applicazioni, che Lagrange assegna a tale teorema.
Determinazione della tangente a una curva data
Si considerino tre funzioni della stessa variabile v, $u = \phi(v)$, $u = \varphi(v)$ e $u = \psi(v)$ atte a esprimere analiticamente tre curve che si incontrano in un punto $v = x$, e quindi tali da verificare l'uguaglianza:

$$\phi(x) = \varphi(x) = \psi(x).$$

Per semplicità, si supponga che in un intorno destro I_x di questo punto, in cui gli sviluppi in serie intera di $\phi(x + \xi)$, $\varphi(x + \xi)$ e $\psi(x + \xi)$ convergono a tali funzioni, si compiano queste tre condizioni:
a) le tre curve sono crescenti,
b) le loro ordinate sono positive,
c) l'ordinata della prima curva è minore o uguale delle ordinate delle altre due curve

(l'argomento si riformula facilmente per altri casi).
Siano Δ_1 e Δ_2, rispettivamente, le differenze (non-negative) tra $\varphi(x + \xi)$ e $\phi(x + \xi)$ e tra $\psi(x + \xi)$ e $\phi(x + \xi)$. Poiché $\phi(x) = \varphi(x) = \psi(x)$, ne segue che:

$$\Delta_1 = \phi(x+\xi) - \varphi(x+\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\phi^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right)\frac{\xi^k}{k!}$$
$$\Delta_2 = \psi(x+\xi) - \phi(x+\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x)\right)\frac{\xi^k}{k!}$$
Applicando il teorema del resto, abbiamo allora che:
$$\Delta_1 = \xi[\phi'(x+\xi) - \varphi'(x+\xi)] + \frac{\xi^2}{2!}\left[\phi'\left(x+\xi_{j_1}\right) - \varphi'\left(x+\xi_{j_3}\right)\right]$$
$$\Delta_2 = \xi[\psi'(x+\xi) - \varphi'(x+\xi)] + \frac{\xi^2}{2!}\left[\psi'\left(x+\xi_{j_2}\right) - \varphi'\left(x+\xi_{j_3}\right)\right]$$
dove $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \xi_{j_3}$ sono tre incrementi dipendenti da x e dalle funzioni $\phi(v)$, $\varphi(v)$, $\psi(v)$, ma in ogni caso appartenenti all'intervallo $[0, \xi]$.

Si assuma che $\phi'(x) = \varphi'(x)$. Poiché Δ_2 è non-negativo, si ha che $\psi'(x) - \varphi'(x) \geq 0$. Inoltre, se tale differenza fosse positiva, dovrebbe esistere una quantità positiva δ abbastanza piccola perché valga che:
$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{\xi^2}{2!}\left[\phi'^{(x+\xi_{j_1})} - \psi'^{\xi_{j_2}}\right] - \xi\left[\psi'^{(x+\xi)} - \varphi'^{(x+\xi)}\right]$$
con $0 < \xi \leq \delta$. Ne segue che:
$$\Delta_1 < \Delta_2.$$
Ma in I_x la curva espressa dalla funzione $u = \psi(v)$ giace tra le curve espresse dalle funzioni $u = \phi(v)$ and $u = \varphi(v)$ se e solo se:
$$\Delta_1 \geq \Delta_2$$
Così, in I_x, la prima curva giace tra le altre solo se:
$$\psi'(x) = \phi'(x).$$
Si supponga ora che le curve espresse dalle funzioni $u = \phi(v)$ e $u = \psi(v)$ siano due rette r_1 e r_2, rispettivamente di equazioni:
$$u = p_1v + q_1 \text{ e } u = p_2v + q_2$$
Ne segue che in I_x la seconda retta giace tra la curva di equazione $u = \phi(v)$ e la prima retta solo se $p_1 = p_2$. Poiché le rette considerate si incontrano nel punto $v = x$ e hanno lo stesso coefficiente angolare, devono quindi coincidere. Pertanto non vi è nessuna retta passante per il punto $v = x$ che in I_x giace tra la curva di equazione $u = \varphi(v)$ e la linea retta passante per tale punto la cui pendenza sia uguale a $\varphi'(x)$. Questa linea è pertanto la tangente a questa curva in $v = x$.

7. Ulteriori aspetti. Continuità e comportamento uniforme

Chiarito, sia pure solo con un esempio, il ruolo del teorema del resto (per un chiarimento di ordine più generale, occorrerebbe entrare in dettagli che qui non è possibile considerare), vale la pena di dire alcune cose sulla sua dimostrazione. La ragione è che essa mette bene in evidenza tanto certi aspetti innovatori dell'argomentazione di Lagrange, che saranno in seguito ripresi da Cauchy, e, più tardi, da Weierstrass (su questo si veda: Grabiner, 1989), quanto il diverso contesto concettuale in cui egli si muove.

Lagrange dimostra il suo teorema in due modi diversi nella *Théorie* e nelle *Leçons*, e nelle seconda edizione del primo trattato, modifica la dimostrazione fornita nella prima. Gli aspetti che vogliamo sottolineare si ritrovano, però, *mutatis mutandis*, nelle tre dimostrazioni. Considereremo qui solo un frammento di quella della *Théorie* (che appare, sia pure con ruoli apparentemente diversi, in entrambe le edizioni; per dettagli, cf. Ferraro & Panza, 2012, pp. 166–167). Questa si avvale di un teorema intermedio che Lagrange formula come segue (cf. Lagrange 1797, art. 11; il nome del teorema non è di Lagrange; lo usiamo qui per comodità):

Teorema dell'incremento sufficientemente piccolo (formulazione di Lagrange). Nello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi $f(x+\xi)$, ξ può sempre essere preso tanto piccolo che qualsiasi termine di tale sviluppo sia più grande delle somma di quelli seguenti, e questo succeda per tutti i valori più piccoli di ξ.

La dimostrazione avanzata da Lagrange suggerisce di riformulare tale teorema, con più precisione, come segue:

Teorema dell'incremento sufficientemente piccolo (riformulazione). Considerata una funzione qualsiasi $f(x)$, un qualsiasi numero naturale h e un valore di x tali che la funzione $f(x+\xi)$ possieda uno sviluppo in serie intera $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\, \xi^k$ per tale valore di x e che $p_h(x)$ non si annulla, esiste una quantità positiva δ tale che se $|\xi\,| \leq \delta$ allora:

$$|p_h(x)\xi^h| > \left|\sum_{k=h+1}^{\infty} p_k(x)\, \xi^k\right|$$

Ci soffermiamo su un solo passaggio della dimostrazione. Lagrange mostra dapprima che, posto che x sia tale che $f(x+\xi)$ possieda uno sviluppo in serie intera, per ogni numero naturale positivo h vale la seguente eguaglianza:

$$f(x+\xi) = \sum_{k=0}^{h-1} p_k(x)\, \xi^k + P_h(x,\xi)\xi^h \tag{13}$$

in cui $p_0(x) = f(x)$ e $P_k(x,\ \xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sono funzioni di x e ξ che non diventano infinte per $\xi = 0$ e tali che $p_k(x) = P_k(x, 0)$.

Poi, preso x come fissato, considera i prodotti $\xi P_h(x, \xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ come delle funzioni di ξ che si annullano per $\xi = 0$, e che esprimono, relativamente a un sistema di riferimento cartesiano nelle coordinate ξ, y, delle curve passanti per l'origine. Basandosi sull'evidenza geometrica, Lagrange osserva poi che, salvo nel caso in cui l'origine sia un punto singolare di tali curve (il che può avvenire solo se x assume dei valori particolari), queste ultime curve saranno sempre continue nei pressi di tale punto, e si avvicinano sempre di più all'asse $y = 0$ prima di tagliarlo, e ne conclude che "sarà quindi sempre possibile trovare una ascissa ξ corrispondente a un'ordinata minore di ogni quantità data" e tale che "ogni valore più piccolo di ξ corrisponderà, a sua volta, a delle ordinate minori della quantità data". In termini analitici, questo equivale a affermare che:

(P1) per ogni quantità positiva ε, si può trovare un'altra quantità positiva δ tale che $|\xi P_h(x, \xi)| < \varepsilon$ se $|\xi| \leq \delta$.

Non seguiremo oltre la dimostrazione di Lagrange. Ci basta osservare che, da un punto di vista moderno, asserire (P1) equivale a affermare che le funzioni $\xi P_h(x, \xi)$ sono continue in $\xi = 0$. Per noi, oggi, la continuità di une funzione a variabile reale è una proprietà puntuale che tale funzione può possedere oppure no in ognuno dei suoi punti. Tale proprietà è inoltre fissata tramite una definizione precisa, che non concede nulla all'intuizione geometrica: se una funzione $f(z)$ è definita in un intervallo (a,b) e c è un punto di tale intervallo, essa è continua in c se (e solo se):

(P2) per ogni numero reale positivo ε, esiste un numero reale positivo δ, tale che se z appartiene a (a,b) e $|z-c| \leq \delta$, allora $|f(z)-f(c)| < \varepsilon$.

Per Lagrange la situazione è del tutto differente. Egli non dà mai una definizione della continuità di une funzione, ma dà piuttosto per scontato che ogni funzione sia continua per ogni valore della sua variabile, nel suo intervallo di definizione, tranne che per certi valori isolati. Il suo richiamo all'evidenza geometrica (che non si ritrova in nessun'altro passaggio tanto della *Théorie* quanto delle *Leçons*) non gli serve tanto per giustificare la sua affermazione, quanto per poter trattare come una proprietà particolare una condizione che per lui è comune a tutte funzioni. Il suo problema non è quindi affatto quello di provare la continuità delle funzioni $\xi P_h(x, \xi)$ per $\xi = 0$, ma piuttosto quello di esprimere tale condizione, usando un linguaggio non infinitesimalista. Per precisare questa condizione, Euler si era appunto servito di un tale linguaggio (Euler, 1755, p. 82), asserendo che data una funzione $f(x)$:

(P3) la differenza $f(x+w) - f(x)$ è infinitamente piccola se w è infinitamente piccolo.

Per evitare tale linguaggio, Lagrange si richiama a opportune diseguaglianze, aprendo una strada che sarà poi seguita, come abbiamo detto, da Cauchy e Weierstrass, ma, nel suo considerare che tutte le funzioni godono della proprietà indicata egli resta legato a una concezione che sarà più tardi del tutto abbandonata.

Per lui, inoltre, tale proprietà non è puntuale, come per noi, ma riguarda piuttosto il comportamento della funzione in un intorno di ogni valore della variabile in cui essa è definita, tranne che per valori isolati. Oggi sappiamo che tale concezione, quando si usa il linguaggio delle diseguaglianze, conduce a paradossi di cui Lagrange non sembra essere consapevole: se la nostra definizione di continuità di una funzione in un punto fosse invece presa come una definizione di continuità in un intorno di tale punto, una funzione che, in tale intorno, compie infiniti salti, sempre più piccoli, sarebbe infatti considerata come continua, in base a tale definizione.

Il problema principale che la concezione di Lagrange porta con sé, quanto alla sua dimostrazione del teorema del resto, non sta tuttavia qui, quanto nel fatto che, qualora la sua concezione si applica, come nel caso in questione, a funzioni a due variabili, di cui una è considerata come fissata, essa rende difficile distinguere fra due condizioni fra loro ben diverse:
[Con.1] Una funzione $g(x, \xi)$, definita per un certo valore $\xi = a$ quando x appartiene a un certo intervallo I_x, è tale che, per ogni quantità positiva ε e per ogni x in I_x, esiste una quantità positiva δ tale che $|g(x, \xi) - g(x, a)| < \varepsilon$, se $|\xi - a| \leq \delta$.
[Con.2] Una funzione $g(x, \xi)$, definita per un certo valore $\xi = a$ quando x appartiene a un certo intervallo I_x, è tale che, per ogni quantità positiva ε, esiste una quantità positiva δ tale che, per ogni x in I_x, $|g(x, \xi) - g(x, a)| < \varepsilon$, se $|\xi - a| \leq \delta$.
Nel secondo caso, la funzione $g(x, \xi)$ è continua rispetto alla variabile ξ e possiede tale proprietà in modo uniforme rispetto alla variabile x, in quanto $\delta = \delta(\xi)$; nel primo caso invece tale uniformità viene a mancare in quanto $\delta = \delta(x,\xi)$.
Generalmente, l'emergere del problema connesso con la mancata distinzione fra proprietà uniformi e non uniformi di funzioni, successioni e serie e fatto risalire al noto "errore" di Cauchy a proposito del teorema relativo alla convergenza a una funzioni continua di una successione di funzioni continue (cf. Cauchy, 1821; la letteratura su tale "errore" è molo ampia; fra gli altri, si veda: Giusti, 1984; Laugwitz, 1989). In realtà, il problema emerge già nei trattati di Lagrange. È difficile dire se Lagrange si rendesse conto della differenza fra le due condizioni precedenti. Probabilmente no. In ogni caso, quello che è chiaro è che, tanto nella *Théorie* quanto nelle *Leçons*, egli suppone che molte condizioni valgano in modo uniforme, anche qualora la dimostrazione che egli ha fornito per il loro aver luogo si milita a garantire che esse valgono in modo non uniforme.
La prova del seguente lemma, tratto dalla *Théorie*, e implicato, anch'esso, nella dimostrazione del teorema del resto, ce ne fornisce un esempio lampante (rendiamo qui esplicite delle condizioni relative a tale lemma, che Lagrange sembra solo presupporre, e che sono, in ogni caso, necessarie perché la sua dimostrazione tenga, indipendente dalla supposizione di uniformità):
LEMMA. Se $f(x)$ non è costante e la sua derivata (prima) è definita e non-negativa per un qualsiasi x in un intervallo $[a, b)$ (con $a < b$) che non contiene un'infinità di valori della x per cui $f(x)$ si annulli, ed è tale che $f(x)$ è definita per $x = b$, allora la differenza $f(b) - f(a)$ è anch'essa non-negativa (Lagrange, 1797, art. 48).
Per dimostrare tale lemma, Lagrange considera, nella seconda edizione della *Théorie* (Lagrange, 1813, 78–80), la funzione $P_1(x, \xi)$ definita tramite la (13). Posto che da questa ultima eguaglianza segue tanto:

$$f(x+\xi) = p_0(x) + P_1(x, \xi)\xi$$

quanto:

$$f(x+\xi) = p_0(x) + p_1(x)\xi + P_2(x, \xi)\xi^2$$

si avrà che:

$$P_1(x, \xi) = p_1(x) + P_2(x, \xi)\xi$$

da cui Lagrange trae che:

$$P_1(x, 0) = p_1(x) = f'(x),$$

ovvero $P_1(x, 0)$ non è altro che la derivata (prima) di $f(x)$.

Lasciamo qui da parte le difficoltà inerenti a questo argomento. Ciò che ci importa è che, secondo Lagrange, da qui segue che se $f'(x) \geq 0$, allora ξ può essere preso sufficientemente piccolo, pur restando positivo, perché, valga anche che $f(x+\xi) - f(x) \geq 0$. Nel caso in cui $f'(x) > 0$ ciò segue dallo stesso argomento usato prima nella prova del teorema dell'incremento abbastanza piccolo. Nel caso in cui $f'(x) = 0$, la cosa non è così semplice, ma non è il caso qui di entrare in tale dettaglio (su cui si veda: Ferraro & Panza, 2012, pp. 173–174). Quello che è rilevante è come Lagrange continua.

Secondo lui, questa conclusone può fatta valere per ogni valore di x, salvo che certi valori isolati. Quindi ponendo successivamente:

$$x = a + k\frac{b-a}{n+1}\ (k\ =\ 0, 1, \dots,\ n) \qquad \text{e} \qquad \xi = \frac{b-a}{n+1},$$

egli ammette che vi sia un valore di n sufficientemente grande perché valgano insieme tutte le implicazioni seguenti:

$$f\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right) - f(a) \geq 0$$
$$f\left(a + 2\frac{b-a}{n+1}\right) - f\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right) \geq 0$$
$$f\left(a + 3\frac{b-a}{n+1}\right) - f\left(a + 2\frac{b-a}{n+1}\right) \geq 0$$
$$f\left(a + 4\frac{b-a}{n+1}\right) - f\left(a + 3\frac{b-a}{n+1}\right) \geq 0$$
$$\dots$$
$$f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n+1}\right) - f\left(a + k\frac{b-a}{n+1}\right) \geq 0$$
$$\dots$$
$$f\left(a + (n+1)\frac{b-a}{n+1}\right) - f\left(a + n\frac{b-a}{n+1}\right) \geq 0$$

Sommando fra loro i membri di destra di queste implicazioni ed essendo:

$$f\left(a + (n+1)\frac{b-a}{n+1}\right) = f(b),$$

Lagrange conclude infine che se $f'(x) \geq 0$ per ogni x in $[a, b)$, allora $f(b) - f(a) \geq 0$, come si trattava di dimostrare.

La presupposizione di uniformità in tale argomento è manifesta: perché esso sia corretto è infatti necessario, poste le condizioni indicate nell'enunciato del lemma e supponendo che $f'(a) > 0$ che esista un n sufficientemente grande perché $\frac{b-a}{n+1}$ sia abbastanza piccolo perché:

$$f'\left(a + k\frac{b-a}{n+1}\right)$$

non sia mai nulla, e tutte le implicazioni precedenti si verifichino insieme, ovvero che esista un δ positivo tale se $0 < \xi \leq \delta$ allora da $f'(x) \geq 0$ segue che $f(x+\xi) - f(x) \geq 0$ per ogni x in $[a, b)$.

Nel caso in cui $f'(a) = 0$, le cose sono un poco più complesse. Qui ci limitiamo a assicurare il lettore che, anche in questo caso, l'argomento di Lagrange può essere reso corretto, sotto le condizioni del lemma, posto che la presupposizione di uniformità valga (per i dettagli, si veda: Ferraro & Panza 2012, p. 176). Il nostro obiettivo qui, è infatti solo quello di mostrare come la validità della prova di Lagrange dipenda dal valere di tale presupposizione, il che non è, invece, affatto assicurato dalle condizioni del lemma.

8. Conclusioni

Molte altre cose dovrebbero essere dette per chiarire l'orizzonte concettuale in cui si muovono i due trattati di Lagrange e mostrare tanto la ricchezza matematica, quanto le intrinseche difficoltà della sua teoria. Qui speriamo solo aver mostrato due cose. Da una parte, come questo orizzonte concettuale sia essenzialmente diverso da quello dell'analisi reale moderna, la quale prenderà le mosse, a cominciare da Cauchy, proprio dall'abbandono di tale orizzonte e dall'assunzione di un nuovo punto di vista, secondo il quale lo studio delle funzioni richiede una determinazione previa del loro dominio, ciò che condurrà, fra le altre cose, a una distinzione netta fra analisi reale, analisi complessa, e teorie dei diversi spazi funzionali. Dall'altra, come, sia pure entro un orizzonte concettuale così diverso da quello dell'analisi reale ottocentesca, Lagrange abbia saputo anticipare risultati, tecniche definizionali e dimostrative, ma anche difficoltà, e perfino errori, che segneranno più tardi l'evoluzione di tale teoria. Se è vero che la grandezza di un matematico si misura, fra le altre cose, dalla sua capacità di vedere al di là dei limiti ristretti del suo stesso contesto matematico, così da anticipare temi che saranno al centro di altri e più innovativi contesti, allora non vi è dubbio che la teoria delle funzioni analitiche mostra che Lagrange fu un grande matematico.

Bibliografia

Cauchy, A. (1821). *Cours d'analyse de l'école royale polytechique* (I. Partie *Analyse algébrique*), Paris, de l'imprimerie Royale, 1821, in *Œuvres de Augustin Cauchy,* Gauthier-Villars et fils (Paris) 1882–1974, (serie 2), vol. 3.

Descartes, R., (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode*. Leyde: I. Maire.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysisn infinitorum*. Lausanne: M.-M. Bousquet & Soc, 2 vol. Anche in *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ser. 1, voll. VIII et IX. Leipzig: Soc. Sci. Nat. Helveticæ, 1911–1976.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis cun eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Petropoli: Impensis Academiae Imperialis Scientiarum.

Ferraro, G. (2007). Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815, *Historia Mathematica, 34*, 62–88.

Ferraro, G. (2008) *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*, New York, Springer, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences.

Ferraro, G. (2010). Euler's analytical program, *Quaderns d'història de l'enginyeria, 11*, 175–198.

Ferraro, G., & Panza M. (2003). Developing into Series and Returning from Series. A Note on the Foundation 18th Century Analysis, *Historia mathematica*, *30*, 17–46.

Ferraro, G., & Panza, M. (2012). Lagrange's theory of analytical functions and his ideal of purity of method, *Archive for History of Exact Sciences*, *66*, 95–197.

Fraser, C. (1985). J. L. Lagrange's changing approach to the foundation of the calculus of variations. *Archive for History of Exact Sciences*, *39*, 151–191.

Fraser, C. (1987). Joseph Louis Lagrange algebraic vision of the calculus. *Historia Mathematica*, *14*, 38–53.

Giusti, E. (1984). Gli "errori" di Cauchy e i fondamenti dell'analisi, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, *4*, 24–54.

Grabiner, J. V. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Cambridge, MA: The MIT press.

Lagrange, J.-L. (1806). *Leçons sur le calcul des fonctions*, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée par l'auteur. Paris: Courcier. Also in Lagrange, J.-L. (OEUVRES). 1867–1892. *OEuvres de Lagrange*, ed. M. J.-A. Serret [et G. Darboux], Vol. X. Paris: Gauthier-Villars.

Lagrange, J.-L. (1813) *Théorie des fonctions analytiques*. Paris: Courcier. Also in Lagrange, J.-L. (OEUVRES). 1867–1892. *OEuvres de Lagrange*, ed. M. J.-A. Serret [et G. Darboux], Vol. IX. Paris:Gauthier-Villars.

Laugwitz, D. (1989), Definite values of infinite sums: aspects of the foundations of infinitesimal analysis around 1820, *Arch. Hist. Exact Sci, 39*(3), 195–245.

Nelson, E. (1977) Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis", *Bulletin of American Mathematical Society*, *83*, 1165–1198.

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis.* Amsterdam: North-Holland.

Creazione, applicazione, insegnamento della matematica: luci e ombre

Massimo Ferri
Dipartimento di Matematica e ARCES
Università di Bologna

Sunto. *Un paradosso sociale: nei corsi di laurea in Matematica italiani l'attenzione rivolta ai tre indirizzi (generale, applicativo, didattico) è monotona decrescente rispetto al loro impatto sociale.*

Abstract. *A social paradox: In the Italian courses in Mathematics, the attention paid to the three lines (theoretical research, application, teaching) is monotone decreasing with respect to their social impact.*

1. Studenti "bravi"

"Chi sa fa, chi non sa insegna": questo orribile detto pare concretizzarsi regolarmente in molti corsi di laurea in Matematica italiani, con un grado intermedio aggiuntivo. Infatti sembra fatale che gli studenti "bravi" si iscrivano all'indirizzo generale, quelli mica male all'indirizzo applicativo (sempre che esista), quelli con voti più bassi al didattico. Siccome il corpo docente reagisce spesso con un'analoga attenzione, si rischia un *feedback positivo*, un circolo vizioso con effetti disastrosi: certo è un'ottima cosa che si selezionino e si preparino adeguatamente dei ricercatori di livello internazionale, ma si tratta di una magra soddisfazione se non si riesce a portare l'eccellenza anche nelle applicazioni e soprattutto nell'insegnamento.
Con quali motivazioni chi esce dalla scuola secondaria sceglie Matematica? Probabilmente c'è stata una buona esperienza scolastica, un docente accattivante, forse qualche lettura divulgativa; talvolta la scelta è per esclusione, nell'illusoria prospettiva di un corso di studi meno impegnativo perché più focalizzato.
Nel tempo gli studenti più curiosi scoprono l'esistenza della ricerca matematica e questa può essere un'esperienza fulminante, molto simile all'innamoramento; senza dubbio s'intuisce presto che occorrono capacità analitiche non comuni e si verifica un'autoselezione naturale: chi non riesce a conquistare voti eccelsi capisce di non poter inseguire quel sogno (solo più tardi emergeranno altre doti necessarie, come l'immaginazione e il cosiddetto pensiero laterale).
Anche se non evidenziata negli insegnamenti, la formidabile applicabilità della matematica garantisce un inserimento nel mondo del lavoro più facile di

quanto generalmente si tema: superando un'iniziale crisi d'identità, molti nostri laureati si realizzano nell'industria o negli enti di ricerca ritagliandosi – in buona parte per iniziativa personale – un ruolo specifico anche se spesso "contaminato" da informatica e statistica.
Sembra perciò che sia residuale la quota dei futuri insegnanti. Purtroppo, spesso diviene residuale anche l'interesse del corpo docente nei confronti dell'indirizzo didattico. Ciò va insieme al fatto che i contenuti matematici di questo indirizzo sono (necessariamente) elementari e alla necessità dell'intervento di discipline lontane come psicologia e pedagogia. C'è stupore davanti a certe tesi di laurea e c'è il timore che il futuro insegnante sia poco immerso nel pensiero matematico. Se la matematica per le applicazioni viene vista (ma non si dice!) un po' di serie B, la didattica della matematica viene talvolta vissuta come un vero e proprio corpo estraneo.

2. La matematica nella società

Guarda caso, l'impatto sociale delle tre figure di matematico è una funzione monotona decrescente della pretesa nobiltà: l'importanza a lungo termine della ricerca "pura" è largamente ignorata dalla società, il matematico applicato trova lavoro in una molteplicità di impieghi, ma l'impatto di gran lunga più notevole è quello degli insegnanti di matematica nelle scuole dei vari gradi.
Non c'è da stupirsi che gli scarsi finanziamenti per la ricerca matematica vadano alla parte più applicativa, visto che i matematici "puri" sembrano godere del loro isolamento. I finanziamenti alla scuola sono quelli deprimenti che conosciamo e naturalmente non ha senso distinguere un insegnante di matematica dagli altri a livello stipendiale. Tuttavia è sempre più evidente la pericolosità della diffusa ignoranza matematica nella popolazione italiana, per cui la responsabilità dei colleghi che escono dai nostri indirizzi didattici è altissima.

3. Possibili azioni

Forse occorrerebbe una maggiore osmosi fra i diversi indirizzi; in particolare chi si prepara a lavorare nella scuola dovrebbe avere una maggiore consapevolezza della matematica in via di costruzione; questo darebbe maggiore freschezza all'insegnamento e farebbe svanire quella fastidiosa, diffusissima convinzione che "la matematica sia già stata fatta tutta".
D'altra parte chi fa teoremi dovrebbe conoscere e apprezzare le difficoltà specifiche dell'apprendimento della matematica; ci sono studiosi (matematici come lui/lei) che hanno parecchio da dire in merito; probabilmente ne trarrebbe vantaggio il suo stesso insegnamento.

Multiple semiotic means in the use of formative assessment in secondary school mathematics

Paraskevi Michael-Chrysanthou, Theodora Christodoulou, Iliada Elia, and Athanasios Gagatsis

Department of Education, University of Cyprus

Abstract. *The main idea of this contribution is to enhance the knowledge about the use of multiple semiotic means in formative assessment in mathematics teaching. A teaching episode of formative assessment situation in mathematics classrooms is discussed, focusing on the use and modifications of multiple semiotic means during formative feedback. Our findings reveal that multiple semiotic means such as gestures and different types of representations are involved during the process of feedback and different semiotic actions, such as treatments and conversions, take place, facilitating the interaction between teacher and students. Also, the type of feedback appears as a factor differentiating the type of semiotic means and semiotic actions.*

1. Introduction

Recent international studies (i.e. OECD, 2012) have determined five main difficulties in the teaching and learning of mathematics. One of these difficulties refers to the improper use of formative assessment. The role and effectiveness of formative assessment has occupied several researchers of the mathematical community (e.g. Van De Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013; Black & Wiliam, 1998). Previous research has highlighted the need for using particular teaching strategies in order to achieve an appropriate and effective use of formative assessment. Based on the role and the purpose of formative assessment (i.e. to improve students' learning and to rehabilitate their difficulties), it seems that this kind of assessment can be beneficial for both the students and the teacher. This is reinforced by the significant impact of feedback provided by students to teachers about what they know and what misconceptions they have (Hattie, 2009) in order to resolve any questions and difficulties about the concept that is taught. Arzarello, Paola, Robutti and Sabena (2009) suggest that during the process of mathematics teaching and learning, a diversity of actions is produced both by the students and by the teacher through different semiotic sources. Thus, semiotic means can have an essential role in the formative assessment process also and mainly during the provision of feedback, as different kinds of semiotic systems can co-exist during this process. For instance, gestures, glances, drawings and extra-linguistic means of expression seem to be key components of semiotic activities carried out in class.

In relation to the above, our examination focuses on the contribution of multiple semiotic means in the use of formative assessment in mathematics teaching. More specifically, this study focuses on providing formative feedback during formative assessment and the role of different semiotic means in this process. In particular, we aim to answer the following questions: (1) Which semiotic means are involved during the process of providing formative feedback? (2) What are the interactions and relations between these different semiotic means during formative assessment?

2. Theoretical background

2.1. Formative assessment and feedback

Many definitions have been provided about formative assessment. Recent definitions describe formative assessment as a way of assessment which checks who is learning or not and helps teachers design their next lesson (Van De Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013). More specifically, formative assessment is defined as "a process where the teachers gather information about their students' learning and the teaching is modified as a result of the feedback that they provide to their students" (Cauley & McMillan, 2010). Black and Wiliam (1998) highlight the active role of students in this process, supporting that formative assessment makes students responsible for their learning because they can assess their work, draw conclusions about their learning and plan next steps for further progress.

As previously mentioned, in this contribution we emphasize on feedback provided during the formative assessment process in the mathematics classrooms we have observed. Feedback emerges an important dimension of formative assessment, as several definitions of formative assessment highlight the importance of its integration in the teaching. For example, Nicol and Macfarlane-Dick (2004) argue that assessment can be characterized as formative when it generates information for feedback that can be used by students to enhance their learning and their success. This information is useful to teachers in order to adapt their teaching to the needs of their students. According to different references on feedback, three types of feedback are discriminated. The first type refers to feedback provided by the teacher to the students aiming to help them overcome their difficulties and improve their performance in the particular content they are taught. In this sense, Sadler (1998) refers to formative assessment as a process that seeks to provide feedback on the performance of students in order to improve and accelerate their learning. The second type of feedback refers to the information given by the students to the teacher in order to help him/her to decide how to modify the teaching process for helping students to strengthen their understanding. Actually, Hattie (2009) stresses that a strong influence of formative assessment on the students' performance is achieved by the substantial feedback provided by the students to the teacher regarding their understanding, their mistakes or misconceptions. Furthermore, feedback can be provided not only by the teacher to the students and vice versa, but often peers can provide feedback to each other. For example, in the context of a group work, the students provide their own feedback to their peers, while they cooperate for carrying out the work (Nicol & Macfarlane-Dick, 2004). Therefore, any direction formative feedback gets, it benefits both the students and the teachers.

2.2. The use of semiotic means in the teacher-student interaction

In a semiotic approach to mathematical teaching, the role of signs and the way they are adopted by individuals within their social context is central (Arzarello, Ferrara, Paola, & Robutti, 2005). The term "semiotic" means "theory of signs". According to Peirce, a sign is anything that "stands to somebody for something in some respect or capacity" (Peirce, 1931–1958). Saussure (1959) defined the "sign" as a combination of two mental constructs: a "signified" together with its "signifier". Sometimes a "signifier" can be arbitrary, as it is related to the "signified" with a social condition (an agreement, a rule). In this case, the observer cannot discover himself the "signified" through the "signifier", as he has to be aware of this social condition. Such kind of optic "signifiers" include the written language, the traffic lights, gestures etc. Arzarello, Paola, Robutti and Sabena (2009) claim that during the learning processes in the mathematics class, a variety of semiotic actions and productions are activated by the students and by the teacher using different resources: words (orally or in written form), extra-linguistic modes of expression (gestures, glances), different types of inscriptions (drawings, sketches, graphs), various instruments (from the pencil to the most sophisticated information and communication technology devices) and so on. Such resources can be used with great flexibility, as the same person can exploit many of them simultaneously. Sometimes, they are shared by the students (and possibly by the teacher) and used as communication or thinking tools, with the actions and productions they support to be important for grasping mathematical ideas.
Within this wide perspective, Arzarello (2006) has introduced the "semiotic bundle", which allows studying gestures – and teaching-learning processes – in a multimodal approach. A "semiotic bundle" is a system of signs – with Peirce's comprehensive notion of sign – that is produced by one or more interacting subjects and that evolves in time. Typically, a "semiotic bundle" is made of the signs produced by a student or by a group of students while solving a problem and/or discussing a mathematical question. An important example of "semiotic bundle" is given by the unity speech-gesture. McNeill claimed that gesture and spoken utterance should be regarded as different sides of a single underlying mental process (McNeill, 1992). Gesture and language constitute a "semiotic bundle", made of two deeply intertwined semiotic sets. Researches on gestures have discovered some important

relationships between the two, for example match and mismatch has been studied (Goldin-Meadow, 2003).

Kaput suggests five entities to define representations. Elia and Gagatsis (2016) relate Kaputs' definition of representations to the concept of gestures, showing that (iconic) gestures can be considered as semiotic means, as they are in line with Kaputs' definition. The definition of representations in relation to gestures is the following:

1. The entity which is represented (e.g. two-dimensional geometrical figures);
2. The entity which represents (e.g. diagrams of geometrical figures and gestures);
3. Elements of the entity which is represented (e.g. directions of line segments, vertical lines, parallel lines, intersecting sides etc.);
4. Elements of entity which represents (e.g. gestures representing parallel or vertical lines etc.);
5. Correspondence between 3 and 4 (parallel or vertical lines with the relevant gestures).

Thus, Elia and Gagatsis (2016) relation of gestures to Kaput's definition satisfies also the discrimination representations to internal and external, as gestures are considered as external representation in close interaction to internal representations. Through gestures we are able to display orally our internal thoughts and the way we understand the world. Thus, gestures can be taken as the "windows" of our internal thoughts or as "pipes" transmitting ideas that are already in our minds and wait for the proper material or verbal expression.

McNeill (1992) proposed four categories of gestures with respect to their meaning: (1) deictic gestures, pointing movements to existing or virtual objects and actions in space; (2) iconic gestures which are closely related to the semantic content of speech, that is, they visually represent the content of concrete entities and actions; (3) metaphoric gestures, which represent an image of an abstract object or idea; (4) temporal highlighting gestures, simple repeated gestures used for emphasis. For our analysis further on, we use this framework for identifying the type of gestures that appear in the teaching episodes we examine and discuss their function during providing feedback.

Besides students, the teacher participates also in this semiotic production, and thus the "semiotic bundle" may include also the signs produced by the teacher (Arzarello, Paola, Robutti, & Sabena, 2009). Furthermore, the process developed by the teacher using semiotic sources in order to strengthen the construction of knowledge is called "semiotic game" (Arzarello & Robutti, 2008; Arzarello & Paola, 2007). In particular, a "semiotic game" takes place when the teacher responds to the semiotic resources that the students produce and then he/she directs the construction of knowledge taking into account these sources (Arzarello, 2006). In fact, the most important mathematical use of semiotic means is their internal potential to be changed into other semiotic means. In order to analyze the cognitive processes underlying any mathematical activity, and problems of students' comprehension in learning mathematics we must carefully distinguish these two types of semiotic change (Duval, 2008). The first produces a semiotic mean of the same type as the starting representation. On the other hand, the second produces a semiotic mean of a different type. They are respectively called treatments and conversions.

3. Methodology

For answering our research questions, the data collection was conducted through videotaping two consecutive mathematics lessons at lower secondary school, emphasizing at moments of formative assessment. This data collection was included in the actions of a European research project about the use of formative assessment. The Formative Assessment in Mathematics Teaching and Learning (FAMT&L)[1] is a European research project which aims to design a virtual environment (a web repository) for in-service and pre-service teachers' training about the proper use of formative assessment in teaching-learning situations and in elaborating a training model (or methodology) for mathematics teachers training in secondary school. This project begins from an investigation of the mathematics teachers' and students' beliefs about formative assessment in order to develop this learning environment (Michael-Chrysanthou, Lovece, Vannini, & Gagatsis, 2016; Lovece, Vannini, Michael-Chrysanthou, & Gagatsis, 2016; Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2015; Michael-Chrysanthou, Gagatsis, & Vannini, 2014).

For the purposes of this contribution an episode from a grade 7 mathematic classroom was analyzed. The episode was extracted from a lesson about "*Integers-Rational numbers*" and in particular about the "*Multiplication of Rational number*" and the "Inverse numbers". In the episode, the participants are involved in formative assessment situations'; the teacher applies the "traffic lights" technique for engaging students in the process of providing them feedback. Actually, the students use three cards in different colors (green, orange and red) for giving feedback to their teacher regarding their understanding about the content that is taught. The green card represents a good understanding giving the teacher a "green light" to continue the teaching process. The orange card indicates that the students have a question/misunderstanding and the need for additional help. The red card is used by the students that have a poor understanding of the mathematical concept, so that the teacher to explain it again. As each of the cards has its

[1] [538971-LLP-1-2013-1-IT-COMENIUS-CMP]

own meaning, we consider the "traffic lights" technique as a semiotic source and the cards as an arbitrary sign, as defined by Saussure. The analysis of these didactic episodes is based on Arzarello's and his colleagues (2009) approach of the synchronic analysis. Synchronic analysis enables us to concentrate on the interrelations between different semiotic resources, including gestures and oral language, activated by the subjects (i.e. students and teacher) simultaneously at a specific moment. We consider this approach suitable for analyzing our teaching episode, as we are interested in tracing the semiotic means (gestures, oral and written language, traffic light cards) involved during the process of formative assessment and the interactions between them.

4. Results

In this episode two phases of teacher-students interaction while providing feedback take place. At the beginning of the episode the teacher asked the students to express any questions they might have about the lesson. She observed no reaction from the students and in keeping trying to gain feedback from them, she urged the students to use their traffic light cards for expressing their understanding about the lesson. The students reacted and raised their cards, so the teacher was able to trace students that still have doubts about the mathematical content of the lesson. These were the students that raised an orange card (Figure 1a). So, the teacher focused on these students and started posing them questions for finding their exact difficulties and being able to provide feedback to them. It is important to stress that, in this case, the use of a semiotic mean (the traffic light cards) facilitated the students-teacher interaction, as it enabled the students express the degree of their understanding. This is probably attributed to the fact that when the students who have a question they feel uncomfortable to ask for help in the case the rest of the students don't have any question.

In the first phase of teacher-student interaction during the feedback process, the teacher asked a student with an orange card to describe her difficulties. This student faced difficulties while converting a decimal number into an improper fraction for finding next the inverse number (the student explained that she hasn't understood very well why 2.5 was turned into a fraction). The teacher, instead of answering herself, she transmitted the question to the rest of the students, in order to engage them in a peer-feedback procedure. Then, a second student answered the question, by trying to explain the right procedure. During this students' verbal explanation, the teacher contributed to this semiotic game by making treatments and conversions of the semiotic means produced by the particular student. In fact, the teacher made a treatment of the second student's verbal explanation, by rephrasing her answer and by adding clarifications in order to describe the rule for inverting fractions in a more clear way. After the explanation of the rule, the first student expressed another

question she had. After that, the teacher provided feedback directly to the student, by using a deictic gesture to point at a fraction, in order to repeat and stress the rule she mentioned previously ("*We invert only fractions and not decimals*"). Thus, in this phase the teacher at first provides indirect feedback to the students (by enabling other students in providing peer-feedback) through treatments of semiotic means and then provides direct feedback to the students by involving other semiotic means, such as gestures.
At the second phase of teacher-student interaction during feedback, the teacher focused on a second student that expressed his difficulties by raising an orange traffic light card. Specifically, this student had difficulty regarding the inverse number of $-1\frac{2}{7}$. The teacher in order to start providing him feedback, she posed oral questions for guiding him towards the right procedure. At the beginning, she asked the student which is the inverse number of $-1\frac{2}{7}$ and the student replied with a wrong answer ($-1\frac{7}{2}$). The student has actually inverted only the fractional part of the mixed number, without transforming the mixed number to an improper fraction. Then, the teacher made a metaphoric gesture of a circle around the number $-1\frac{2}{7}$ (Figure 1b), which was previously written on the board, in order to remind and stress the rule that "*we invert the whole mixed number*". In continuing stressing the rule, while explaining that "*for finding the inverse number we inverse the whole fraction*", she used an iconic gesture for showing the action of inverting the denominator with the numerator. A deictic gesture followed in order the teacher to indicate the fractional part of the mixed number ("*You have only inverted the fractional part …"*) and then a temporal highlighting gesture was used for showing the whole mixed number ("… *of the mixed number*"). In this gesture the teacher made a repeated motion of showing each part of the mixed number (the integer and then the fraction) consecutively, in order to help the student realize that these two parts are related and constitute a mixed number. Next, the teacher explains that "*By inverting* $\frac{2}{7}$ *to* $\frac{7}{2}$ *you don't invert the rational number*), while at the same time she uses a deictic gesture pointing at the denominator (7) and numerator (2) respectively and again a metaphoric gesture of a circle around the number $-1\frac{2}{7}$ in order to show the rational number. Thus, the teacher's blended character gestures were synchronized with her verbal expression. After providing feedback to the student by explaining the rule, by involving different gestures, the teacher asked the student to explain her again the right procedure. The student answered correctly that "*we first have to turn the mixed number into an improper fraction*" and continued orally to the solution of the task, which was translated to a symbolic representation on the board by the teacher. Therefore, the teacher's semiotic game while providing feedback was found effective, as the student realized his mistake and followed the right procedure.

Figure 1. (a) Use of traffic cards about the inverse numbers, (b) metaphoric gesture of a circle around the number $-1\frac{2}{7}$.

5. Discussion

The analysis of the teaching episode presented above aimed at first in tracing the semiotic means which are used either by the teacher or the students during formative assessment and mainly while providing formative feedback, from the teacher to the students or between students with the guidance of the teacher. For this purpose Arzarello's and his colleagues' (2009) synchronic analysis was used, which allowed us to identify a diversity of semiotic means involved in the formative assessment process. Although the teaching episode we discuss was carried out during the teaching of Algebra content, mainly related to symbolic representations, our results showed that other semiotic means can have an essential role during this process. In fact, through the analysis of the teaching episode, the teacher was observed to mainly use oral language, written symbolic expressions and gestures. Thus, the teacher was producing semiotic bundles comprising of a multimodality of semiotic means. As stressed by Arzarello and Edwards (2005), multimodality consists in interactions among the different registers within a unique integrated system, composed by different modalities: gestures, oral and written language, symbols, and so on.

As for the students, besides oral language, they had the chance to use another semiotic mean for providing instant feedback to their teacher about their level of understanding about the content of the lesson. The use of traffic lights cards as a semiotic mean gave the students the flexibility to express their questions at any time they felt they haven't understand the mathematical content very well. The particular technique helped also the teacher identify the students' difficulties instantly and provide immediate feedback to them according to their needs. Therefore, the use of traffic lights cards as a semiotic mean can facilitate the interaction between all participants (teacher and students) during the formative assessment process. With this semiotic mean the teacher receives feedback about the effectiveness of teaching and the students' understanding and this helps the teacher decide how to modify the next steps in order to help students face their difficulties. Thus, this semiotic mean creates interplay between the students and the teacher, which facilitates the semiotic game between them.

Besides identifying the type of semiotic means that were involved in our teaching episode, we are also focused on examining how these different semiotic means were related in order to contribute to the production of semiotic bundles and to the semiotic game between the teacher and the students. Our results revealed that the semiotic means identified in the process of gaining or providing feedback were related between them, as conversions from one semiotic mean to another were observed. In fact, conversions from verbal expressions to symbolic representations were often conducted by the teacher, during trying to provide feedback to the students in relation to the difficulties they have expressed. In addition the teacher was frequently producing gestures that were synchronized to her verbal expression; thus it can be consider as another type of conversion, from verbal expressions directly to gestures. Besides conversions, the teacher was observed to make treatments of the semiotic means used by the teachers. This mainly regards treatments of the students' oral productions, as the teacher was using the students' answers for repeating them in order to stress something or for expressing the meaning in a more complete form, using a more proper mathematical language. It is, thus, evident that the transformation of semiotic means, either by treatments or conversions, is an important process for constructing mathematical knowledge and communication during the semiotic game between the teacher and the students. In agreement to this, Duval (2008) stresses that mathematics activities require the possibility of using various semiotic means and intrinsically consist in the transformation of semiotic means (Duval, 2006). It is, therefore, necessary teachers to get aware of the necessity of such kind of processes and actions during their teaching, besides the importance of incorporating multiple semiotic means.

Looking deeper at the 1st phase of the episode, it is interesting to focus on the changes traced in the teachers' semiotic productions between the two phases within this episode, in relation to the type of feedback. Actually, in the first phase of the episode the teacher involved the students in a peer-feedback process. Instead of providing feedback herself, the teacher guided the students in thus process mainly by making treatments of the students' verbal expressions and by posing additional oral questions. She, then, provided direct feedback to the students by producing a semiotic bundle of deictic gestures and speech. Later on, at the second phase of the same episode, a teacher-student direct interaction took place, in which the teacher's semiotic bundle consisted of gestures with a blended character, as additional kinds of gestures were apparent. Thus, at a first level, the teachers' semiotic means were differentiated in relation to the type of feedback, either indirect through guiding peer-feedback or by direct feedback to the students. At a second level, the differentiation regarded the semiotic means involved in the process of providing direct feedback to students, as at the beginning the teacher used a more simple type of semiotic bundle (speech and deictic gesture), whereas further on the semiotic bundle gained a more complex form (speech and different types of gestures). Consequently, we can say that the type of semiotic productions can be affected by the type of feedback (direct or indirect), but also within the same type of feedback different types of semiotic means are possible to be present. Therefore, the teachers should reflect about which are the proper semiotic means according to the type of formative assessment situations they are creating and according to the necessary modifications of their teaching actions based on the students' needs.

Concluding, our analysis highlighted the importance of using multiple semiotic means and transformation actions, such as treatments and conversions, in facilitating the interaction between the teacher and the students when applying formative assessment. Consequently, the use formative assessment actions in relation to the use and transformation of multiple semiotic means can contribute to the development of the students' cognitive, but also social structures, as learning should promote interaction and positive interdependence among students.

References

Alibali, M. W., Kita, S., & Young, A. (2000). Gesture and the process of speech production: We think, therefore we gesture. *Language and Cognitive Processes*, *15*(6), 593–613.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 267–299.

Arzarello, F., & Edwards, L. (2005). *Gesture and the construction of mathematical meaning* (research forum 2). In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 122–145). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Arzarello, F., & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In J. Woo, H. Lew, K. Park, & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 17–24). Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd edition (pp. 720–749.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Arzarello, F., Ferrara, F., Paola, D., & Robutti, O. (2005). The genesis of signs by gestures: The case of Gustavo. *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 73–80). Melbourne: PME.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80*(2), 139–148.

Cauley, K. M., & McMillan, J. H. (2010). Formative assessment techniques to support student motivation and achievement. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 83*(1), 1–6.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger, F. (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, historicity, classroom, and culture* (pp. 39–62). Rotterdam, NL, Sense.

Elia, I., & Gagatsis, A. (2016). The role of gestures in the learning of mathematics. Presentation held in the summer course "*Neuroscience and Mathematics Education*", University of the Aegean, 30 June–04 July 2016, Rhodes, Greece.

General teaching council for England (2011). *Teaching quality papers*. Birmingham: Victoria Square.

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gestures: How our hands help us think.* Chicago: University Press.

Hattie, K. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Lovece, S., Vannini, I., Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2016). Methodologies and tools for the video analysis of formative assessment practices in classroom (with students aged from 11 to 16). *EAPRIL Conference Proceedings 2015,* Issue 2 (pp. 203–213). ISSN 2406–4653.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* Chicago: University of Chicago Press.

Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., & Vannini, I. (2014). Formative assessment in mathematics: A theoretical model. *Acta Didactica Universitatis Comenianae–Mathematics, 14,* 43–70.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2015). Students' beliefs for formative assessment in mathematics teaching and learning. *EAPRIL Conference Proceedings 2014*, Issue 1 (pp. 178–193). ISSN 2406-4653.

Michael-Chrysanthou, P., Lovece, S., Vannini, I., & Gagatsis, A. (2016). Exploring teachers' beliefs on formative assessment in mathematics teaching and learning in Cyprus and Italy. *EAPRIL Conference Proceedings 2015*, Issue 2 (pp. 511–523). ISSN 2406-4653.

Nicol, D., & Macfarlane-Dick, D. (2004). Rethinking formative assessment in HE: A theoretical model and seven principles of good feedback practice. In C. Juwah, D. Macfarlane-Dick, B. Matthew, D. Nicol, D., & Smith, B. (Eds.), *Enhancing student learning though effective formative feedback.* York: The Higher Education Academy.

OECD (2012). *Education at a glance 2012: OECD indicators*. OECD Publishing. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1787/eag-2012-en

Peirce, C. S. (1931–1958). *Collected papers of C. S. Peirce* (C. Hartshorne, P. Weiss, & A. Burks, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Saussure, F. de (1959). *General course in linguistics* (W. Baskin, Trans.). New York: Philosophical Library.

Van De Walle, A. J., Karp, S. K., & Bay-Williams, M. J. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8 ed.). United States of America: Pearson.

Linee

Gianfranco Gambarelli
Dipartimento di Scienze Aziendali, Economiche e Metodi Quantitativi
Università di Bergamo

Abstract. *A joke poetry and an idea for a lesson on the concept of line.*

Guardo
il mosso fascio dei capelli lievi,
la chiara linea della liscia fronte,
il nasino arcuato, la ridente guancia,
le labbra, il mento, le fossette, il collo
e poi più giù le voluttuose curve
dal seno all'anca, al metatarso, all'unghia.

Sento le onde delle tue parole,
un dolce magnetismo si propaga
dal tuo corpo, dagli occhi, dalla mente:
onde invisibili, nubi in movimento,
linee meravigliose, continue, mai uguali.

Non c'è linea più brutta del segmento.

[da: *Anche i matematici hanno un'anima?* di Gianfranco Gambarelli, volume terzo, "Scherzi", VII edizione, Campanotto, Pasian di Prato (UD), 2005, p. 32]

Che cos'è un punto? È la macchiolina azzurra che ho lasciato sul lucido del proiettore. Se la guardiamo da vicino, vediamo una pozza, uno stagno, ci sguazzano le trote … La linea, la linea sono tanti punti, tanti punti che si tengono per mano …
Volete un'idea della linea? Ecco, io la immagino così. Il pittore ha versato un po' di vernice azzurra sulla tavolozza, la vedete? Ora, attenzione, guardate la parte che separa la zona azzurra da quella bianca. Di che colore è? Ecco, vedete, la linea non ha colore, non ha spessore, non ha odore … non c'è. Ma c'è.

Lines

Gianfranco Gambarelli
Department of Business, Economics and Quantitative Methods
University of Bergamo

Abstract. *A joke poetry and an idea for a lesson on the concept of line.*

I watch
the wavy tress of your soft hair,
the clear line of your smooth forehead,
your arched nose and smiling cheek,
your lips, chin, dimples and neck
and then lower down your voluptuous curves
from your breast to your hip, your metatarsus, your nail.

I hear the waves of your words,
a sweet magnetism spreads
from your body, from your eyes, from your mind:
invisible waves, moving clouds,
wonderful lines, continuous and never the same.

There is no line uglier than the segment.

What is a point? It is the light blue speck that I have left on the slide … If we look at it close up, we see a well, a pond where trout swim about … The line, the line is many points, many points all holding hands …
Would you like an idea of what a line is? This is how I imagine it.
A painter has poured a little light blue paint onto his palette.
Can you see it? Now, look carefully at the part that separates the light blue area from the white one. What color is it? There, see, the line is colorless, it has no depth, no smell … it's not there, yet it is.

Contro i criteri di divisibilità ed altro[1]

Giangiacomo Gerla
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

Sunto. *Si propone la tesi estrema per cui tutta la matematica, in linea di principio, sia gioco. Questo purché non si confonda "matematica" con "uso della matematica". Questa tesi suggerisce un approccio diverso all'insegnamento della matematica.*

Abstract. *The paper proposes the thesis that the whole mathematics is a game. This provided that we clearly distinguish "mathematics" and "use of mathematics". This thesis suggests a different approach to teaching of mathematics.*

1. Introduzione

L'interesse per il ruolo dei giochi nell'insegnamento matematico è sempre stato costante nelle ricerche del Professor D'Amore. Ad esempio, si veda quanto egli afferma fin dal 1992 con riferimento principalmente a giochi a due persone.

> Le motivazioni che propongo sono sostanzialmente di due tipi.
> 1° tipo. Comprendere ed applicare le regole di un gioco assomiglia molto, nella pratica matematica reale, all' attività creativa che ritengo essere un diritto di tutti […]
> 2° tipo. Giocare ad un gioco di strategia a due persone, con piena motivazione, può suscitare incredibili, profondi interessi per certi aspetti della matematica. (D'Amore, 1992, p. 48)

Questi due affermazioni si inseriscono, come dice lo stesso D'Amore, nell'idea che i giochi siano una metafora della matematica anche se D'Amore condivide le "precauzioni", espresse dal Prof. F. Arzarello quando afferma:

> Il punto è che si vuole usare il gioco in matematica bisogna trovare delle situazioni in cui è la matematica stessa ad essere 'gioco' e la costruzione del sapere matematico avviene in modo naturale giocando proprio a quel gioco. Conviene lasciare che i giochi vengano giocati come tali e viceversa occorrerà utilizzare, se del caso, situazioni matematiche vere in cui certi atteggiamenti e meccanismi psicologici tipici del gioco scattino in modo naturale nella situazione cosi preparata, costituendo per cosi dire la base naturale perché la situazione sia fatta propria dall' allievo. (Arzarello 1990, pp. 9–10)

---

[1] *In onore dei settanta anni del Prof. Bruno D'Amore sapendo che un'intelligenza viva non va mai in pensione.*

La mia idea è un po' più estrema in quanto sono convinto che tutta la matematica sia un gioco se si evita di confondere *"matematica"* con *"uso della matematica"*. Questo sia se alla parola *"gioco"* si attribuisce un significato tecnico preciso, sia se ad essa viene attribuito un significato legato alle nozioni di fantasia, piacere, competizione ed altro.
In ogni caso, il non riconoscere lo stretto rapporto tra matematica e gioco porta ad una involuzione nell'insegnamento che si evidenzia nei seguenti due punti:

1. La troppa attenzione data all'*apprendimento di procedure* generali per la risoluzione dei problemi invece che allo svolgimento di attività di *invenzione* di strategie di risoluzione. Strategie che si sviluppano confrontandosi con problemi particolari ma che si possono estendere successivamente ad una classe più ampia di problemi.

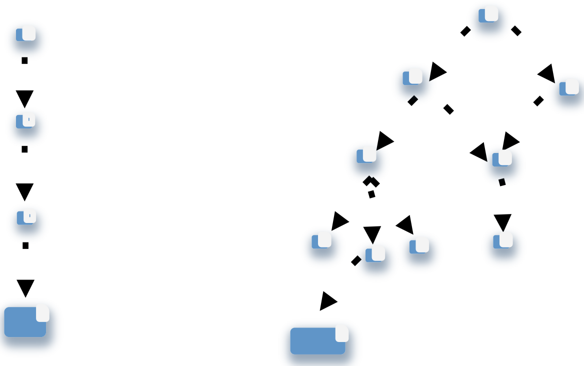
2. La scelta di *somministrare dimostrazioni* di teoremi come unico strumento per lo sviluppo di capacità logiche invece che svolgere attività volte a sviluppare capacità nell'*intuire congetture*, e nell'*inventare* dimostrazioni o confutazioni.

Il primo punto si manifesta nell'insegnamento scolastico o nei corsi universitari in cui la matematica viene considerata solo uno strumento da applicare. Spesso viene giustificato dalla mancanza di tempo e dai limiti nelle capacità degli studenti. Il secondo è dominante (almeno nel corso di laurea in matematica) nell'insegnamento universitario che spesso trasforma la matematica nel diabolica ed infinita sequenza:
… definizioni … enunciato di un teorema … dimostrazione … esercizi … definizioni …
Entrambi, a mio parere, costituiscono un pericolo anche se nel primo caso esiste una coscienza generale del problema da parte di chi insegna e difficoltà obiettive. Nel secondo spesso non è presente neanche il sospetto che vi sia qualcosa di inadeguato nell'insegnamento. Si ritiene infatti che la comprensione del significato di una definizione, dell'enunciato di un teorema e dei passi di una dimostrazione siano cose pienamente sufficienti alla formazione matematica di uno studente.
Nei prossimi paragrafi cercherò di mostrare, con alcuni esempi, che sarebbe possibile ed auspicabile un modo diverso di insegnare matematica.

2. Un'alternativa: i giochi

Per mostrare che una larga parte dei problemi matematici può essere vista come un gioco, ricordiamo che un gioco ad una sola persona può essere definito come una struttura (S, R, G) con S insieme non vuoto, R relazione binaria in S e G sottoinsieme di S. Gli elementi di S sono chiamati *stati* del gioco, gli elementi di G *stati vincenti*. R viene interpretata come *relazione di possibilità*, con l'idea che sRs' solo se le regole del gioco o la struttura fisica dell'oggetto su cui esso si basa permettono di passare dallo stato s allo stato s'. Una *giocata* è una successione $s_1, \ldots, s_n$ di stati tale che s_iRs_{i+1} per ogni $i < n$.

Il gioco si svolge scegliendo a caso il primo stato s_1 ed effettuando una giocata che termini con un elemento s_n tale che $s_n \in G$ in questo caso si dice che il goal è stato raggiunto e che la giocata è vincente.
Questa semplice definizione di gioco riesce a rappresentare bene una classe enorme di giochi ad una sola persona. Ad esempio, un qualunque solitario con le carte definisce un gioco in cui l'insieme S degli stati coincide con l'insieme delle disposizioni delle carte sul tavolo ed R e G sono definiti dalle regole del gioco. A volte R è definita dalla struttura fisica dell'oggetto su cui si basa. Ad esempio consideriamo il gioco del 15 che consiste in un piccolo quadrato (di solito di plastica) sul quale possono scorrere 15 quadratini numerati da 1 a 15. G potrebbe essere costituito dal solo stato g in cui le tessere sono disposte in ordine crescente. Altri esempi sono il cubo di Rubrik, la Torre di Hanoi ed altro. Nei prossimi paragrafi mostreremo come giochi siano presenti costantemente nella matematica. In tali giochi S è l'insieme delle parole di un dato linguaggio formale le parole in G vengono chiamate *forme normali*. Giochi di questo tipo vengono chiamati *sistemi di riduzione a forma normale*.
Ora è possibile distinguere due tipi di giochi, *giochi di pazienza* e *giochi di intelligenza*. Si distinguono per il fatto che nel primo caso, dato $s \in S$, esiste al più uno stato s' tale che sRs'. Questo significa che non sono possibili scelte reali da parte del giocatore il quale in ogni istante sa esattamente cosa fare. Nei giochi di intelligenza invece capita che, dato uno stato s, l'insieme $\{s' \in S : sRs'\}$ contenga molti stati possibili e che quindi siano possibili per il giocatore scelte diverse. Queste scelte sono buone solo se conducono ad una giocata vincente e l'intelligenza dell'autore si esprime nell'individuare scelte buone. Montare un mobile di IKEA fatto di cento pezzi seguendo un libretto di istruzioni è un esempio di gioco di pazienza poiché ad ogni istante la mossa successiva è univocamente dettata dalle istruzioni. Montare lo stesso mobile avendo perso le istruzioni è un gioco di intelligenza. In matematica tutti gli algoritmi e procedure sono in effetti giochi di pazienza.



Gioco di pazienza Gioco di intelligenza

3. Un primo esempio di gioco in matematica: la divisibilità

In questo paragrafo mostrerò un esempio di come procedure usualmente considerate nell'insegnamento scolastico possono essere sostituite da opportuni giochi intelligenti. Mi riferiscono ai criteri di divisibilità.

3.1. Nozioni basi sulla divisibilità

Nel seguito per "numero" intenderò "numero naturale". Inoltre per non appesantire il discorso, spesso rinuncerò al rigore identificando un numero con la sua rappresentazione decimale. Ad esempio scriverò:
"la somma delle cifre del numero n"
al posto di
"la somma dei numeri rappresentati dalle cifre della rappresentazione decimale del numero n"
come sarebbe giusto. In particolare mi riferirò ai criteri di divisibilità e per farlo ho bisogno di considerare il seguente teorema.

Teorema 3.1.1. Dato un numero n ed un numero p, supponiamo che n sia divisibile per p, allora aggiungendo o sottraendo ad n un multiplo di p si ottiene ancora un multiplo di p. Ne segue che, per ogni m,

$$n \text{ divisibile per } p \Leftrightarrow n + p \times m \text{ divisibile per } p$$

$$n \text{ divisibile per } p \Leftrightarrow n - p \times m \text{ divisibile per } p.$$

Dim. Supponiamo che n sia divisibile per p e che quindi esista m tale che $n = m \times p$ e consideriamo un qualunque multiplo $m' \times p$ di p, allora, per la proprietà distributiva:

$$n + m' \times p = m \times p + m' \times p = (m + m') \times p.$$

Questo prova che $n + m' \times p$ è divisibile per p. Viceversa, supponiamo che $n + p \times m$ sia divisibile per p e quindi che esista q tale che $n + p \times m = p \times q$, allora,

$$n = p \times q - p \times m = p \times (q - m)$$

e questo prova che n è divisibile per p.

Un metodo immediato per verificare la divisibilità è suggerito dall'algoritmo euclideo della divisione.

Teorema 3.1.2. Fissiamo un numero $p \neq 0$, allora un numero n è divisibile per p se e solo se il resto della divisione di n per p è 0.

Dim. L'algoritmo della divisione fornisce la scomposizione $n = q \times p + r$ con $0 \leq r < p$. Ora, se il resto r è uguale a 0 abbiamo che $n = q \times p$ e quindi che n è un multiplo di p. Viceversa se supponiamo che n sia un multiplo di p, allora r, essendo uguale alla differenza $n - q \times p$ tra due multipli di p, è ancora un multiplo di p. Essendo $r < p$ questo è possibile solo se $r = 0$.

Il criterio di divisibilità corrispondente a tale teorema è *universale* in quanto funziona qualunque sia il numero p. Tuttavia per alcuni valori di p esistono metodi più efficaci, ognuno giustificato da un corrispondente teorema. Cominciamo con quello più semplice e più noto: la divisibilità per 2.

Teorema 3.1.3. Un numero n è divisibile per 2 se e solo se l'ultima sua cifra è divisibile per 2.

Dim. Se $n = c_n c_{n-1} \dots c_0$ possiamo osservare che

$n = c_n c_{n-1} \dots c_0 = c_n c_{n-1} \dots c_1 0 + c_0 = c_n c_{n-1} \dots c_1 \times 10 + c_0 = c_n c_{n-1} \dots c_1 \times 2 \times 5 + c_0$.

Il numero $c_n c_{n-1} \dots c_1 \times 2 \times 5$ è sicuramente divisibile per 2, quindi $c_n c_{n-1} \dots c_0$ è divisibile per 2 se e solo se c_0 è divisibile per 2.

Ad esempio, dato il numero $354c_0$, abbiamo che

$$354c_0 = 3540 + c_0 = 354 \times 10 + c_0 = 354 \times 2 \times 5 + c_0.$$

Essendo $354 \times 2 \times 5$ divisibile per due, dovendo dividere per due 3547 non resta che dividere per due il numero c_0.

Una naturale estensione di tale teorema è il seguente.

Teorema 3.1.4. Un numero n è divisibile per 4 se e solo se il numero definito dalle ultime due cifre di n è divisibile per 4.

Dim. Osserviamo che

$N = c_n c_{n-1} \dots c_0 = c_n c_{n-1} \dots c_2 00 + c_1 c_0 = c_n c_{n-1} \dots c_2 \times 100 + c_1 c_0$
$= c_n c_{n-1} \dots c_2 \times 4 \times 25 + c_1 c_0$.

Poiché $c_n c_{n-1} \dots c_2 \times 4 \times 25$ è divisibile per 4, la divisibilità per 4 equivale alla divisibilità per 4 del numero $c_1 c_0$.

In questo modo possiamo ottenere anche un criterio di divisibilità per 25. Da notare che questo teorema ed i precedenti sono stati somministrati in puro "stile matematico". Non viene posto un problema per poi cercare insieme la soluzione, ma si fornisce direttamente la soluzione e la giustificazione del metodo adottato. Allo stesso modo si provano i seguenti criteri di divisibilità.

Teorema 3.1.5. Un numero n è divisibile per 5 se e solo se l'ultima cifra è divisibile per 5.

Teorema 3.1.6. Un numero n è divisibile per 10 se e solo se l'ultima cifra è divisibile per 10.

Teorema 3.1.7. Un numero n è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 3.

Teorema 3.1.8. Un numero con più di due cifre è divisibile per 7 se la differenza del numero ottenuto cancellando la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è divisibile per 7.

Teorema 3.1.9. Un numero è divisibile per 11 se e solo se la somma delle cifre di posto pari meno la somma delle cifre di posto dispari è divisibile per 11.

Non dimostro questi teoremi anche perché, se si esclude il caso $p = 3$ i corrispondenti criteri di divisibilità sono abbastanza difficili da ricordare e da applicare e quindi e forse più semplice effettuare direttamente la divisione. Se ad esempio proviamo a vedere se 95676 è divisibile per 7, allora è necessario calcolare il numero 9567–2·6=9555; questo è divisibile per 7 se lo è il numero 955–2·5=945; questo è divisibile per 7 se lo è 94–2·5=84 che è divisibile per 7 dunque lo è anche il numero 95676. In definitiva è vero che per particolari numeri esistono criteri che portano rapidamente a verificare la divisibilità, tuttavia questi numeri sono pochi.

3.2. Il gioco della divisibilità

In questo paragrafo immaginiamo per ogni numero naturale p un opportuno gioco supponendo che p sia un numero primo differente da 2, 5, e 10. Infatti in tali casi, come abbiamo visto, la verifica della divisibilità è immediata.

Definizione 3.2.1. Diciamo che due numeri n ed n' sono *p-equivalenti* se risulta che

$$n \text{ è divisibile per } p \Leftrightarrow n' \text{ è divisibile per } p.$$

Ad esempio possiamo esprimere il criterio della divisibilità per 3 dicendo che un numero n è 3-equivalente al numero n' che si ottiene sommando tutte le cifre da n. È importante osservare che la p-equivalenza non coincide con la congruenza modulo p. Ad esempio 35 e 37 sono 3-equivalenti in quanto entrambi non divisibili per 3, tuttavia, poiché 37–35 non è un multiplo di 3, non sono congrui modulo 3.

Teorema 3.2.1. Valgono le due seguenti p-equivalenze per p diverso da 2, 5, 10:

a) Ogni numero n è p-equivalente al numero che si ottiene aggiungendo o cancellando 0 agli estremi di n.
b) Ogni numero n è p-equivalente al numero n' che si ottiene addizionando o sottraendo a cifre consecutive di n un multiplo di p.

Dim. Per evitare inutili complicazioni formali, proveremo le due parti del teorema su esempi particolari. Nel primo caso, supponiamo che $p = 7$ ed $n = 31540$. Essendo allora, 31540 = 3154×10 = 3154×2×5, risulta evidente che 7 può essere un divisore di 31540 solo se è un divisore di 3154. Quindi 31540 è 7-equivalente a 3154. D'altra parte, stante il significato della notazione posizionale, è evidente che un numero come 03154 è 7-equivalente a 3154.
Per quanto riguarda b) osserviamo che se si considera il numero 3154, essendo 140 un multiplo di 7, 3154 è 7-equivalente a n' = 3154–140 = 3014. In altre parole abbiamo potuto sostituire la coppia di cifre consecutive 15 con la coppia 01.

Da notare che possiamo andar avanti nell'esempio ora considerato osservando che sottraendo 14 a 3014 si ottiene 3000. Poiché è possibile cancellare tutti i 0 finali, abbiamo che 3154 è divisibile per 7 se e solo se 3 è divisibile per 7. In conclusione possiamo affermare che 31540 non è divisibile per 7. Questo modo di procedere è alla base dei seguenti giochi.

Definizione 3.2.2. Sia p un numero naturale diverso da 0, 1, 2, 5, 10. Chiamiamo *gioco del p* il gioco (S, R, G) in cui S è l'insieme dei numeri

naturali, G è l'insieme dei numeri minori di p ed R è la relazione definita in accordo con le due regole:
R1 Se n termina o inizia con la cifra 0 allora è lecito cancellare tale cifra.
R2 È lecito sottrarre o addizionare un multiplo di p da cifre consecutive di n.
Cioè:
$R = \{(n,n')\in N\times N$: è lecito passare da n ad n' o tramite R1 o tramite R2$\}$.

Esempio 3.2.1. Ad esempio, poniamoci il problema se il numero 7411170000000014 sia divisibile per 7. Allora possiamo sottrarre 14 ottenendo:
7411170000000000.
Poi cancellare un po' di 0 e riportarci al numero:
741117.
Possiamo sottrarre 7 a destra e poi cancellare 0 ottenendo:
74111.
Possiamo poi cancellare la prima cifra:
4111.
Se le prime due cifre fossero 42 potremmo cancellare 42 essendo tale numero un multiplo di 7. Possiamo ricondurci a tale caso facilmente aggiungendo 14 al numero rappresentato dalla seconda e terza cifra. Si ottiene:
4251
e quindi, cancellando 42:
51.
Aggiungendo 21:
72.
Cancellando 7:
2 GOAL !!!! (non divisibile).

Poiché in ogni istante sono possibili più mosse, questi giochi rientrano nella categoria dei giochi di intelligenza. Ritornando all'esempio ora fatto, raggiunto il numero 4111 avremmo potuto aggiungere 21 alle due cifre centrali ottenendo:
4321
cancellando 21:
43
sottraendo 42:
1 GOAL !!! (non divisibile).

Da notare che i p-giochi sono suggeriti dall'idea che convenga passare da un problema ad un problema equivalente ma più semplice. In questo caso si tratta di passare da un numero ad un numero con meno cifre (ma non è escluso che questo si possa ottenere con alcune mosse successive).
Concludiamo questo paragrafo mostrando un altro esempio.

Esempio 3.2.2. Poiché i primi multipli di 11 sono numeri scrivibili con coppie di cifre uguali la verifica della divisibilità per 11 si presenta particolarmente semplice. Ecco un esempio in cui $p = 11$ ed $n = 56397$:

56397	sottraendo a destra 77 e cancellando 0
5632	sottraendo 22 a destra e cancellando 0
561	cancellando 11 a destra e cancellando 0
55	cancellando 55
0	Goal !!! (il numero è divisibile per 11).

4. Il gioco delle equazioni

Esiste un gioco che viene fatto migliaia di volte al giorno nelle scuole ma che nessuno riconosce essere un gioco di intelligenza. Si tratta del gioco delle equazioni.

Definizione 4.1. (Gioco delle equazioni). Chiamiamo *gioco delle equazioni*, il gioco in cui:

– S coincide con l'insieme delle possibili equazioni di primo grado in una incognita,
– $G = \{x = \lambda : \lambda \text{ numero reale}\}$,
– R è la relazione definita dalle seguenti regole.
  a) È lecito addizionare o sottrarre una quantità ad entrambi i membri di una equazione.
  b) È lecito moltiplicare o dividere per una quantità non nulla entrambi i membri di una equazione.

Lo stato iniziale viene dettato dall'insegnante, e quindi, dal punto di vista dello studente, viene stabilito a caso. Ad esempio assumiamo che l'insegnante abbia chiesto di risolvere l'equazione $4 \cdot x - 1 = 5 + x$. Lo studente per risolvere l'equazione procede tramite opportune *mosse.* Lo svolgimento del compito potrebbe essere del tipo:

$4 \cdot x - 1 = 5 + x$	⇨	*da tale equazione posso derivare*
$4 \cdot x - 1 + 1 = 5 + x + 1$	⇨	*perché è lecito aggiungere 1 ad entrambi i membri*
$4 \cdot x = 6 + x$	⇨	...
$4 \cdot x - x = 6 + x - x$	⇨	*perché è lecito sottrarre x ad entrambi i membri*
$3 \cdot x = 6$	⇨	...
$(3 \cdot x)/3 = 6/3$	⇨	*perché è lecito dividere per* 3 *entrambi i membri*
$x = 6/3$	⇨	...
$x = 2$		Goal !!! (*la soluzione è il numero* 2).

A destra sono indicate le giustificazioni dei singoli passaggi che lo studente deve essere in grado di fornire nel caso il suo professore lo chieda. In realtà si applica un gioco più rapido le cui regole sono le seguenti:

1. È possibile passare una quantità che si addiziona (o si sottrae) da un lato all'altro dell'equazione cambiandola di segno.
2. È possibile passare una quantità che si moltiplica (si divide) da un lato all'altro di un'equazione invertendola.

Pertanto, con riferimento all'esercizio precedente, lo studente procederà al modo seguente (a destra è indicato quello che presumibilmente pensa lo studente):

$4\cdot x - 1 = 5+x$	⇨	*beh, devo tentare di trasformare questa equazione in una cosa del tipo* $x = \lambda$ *forse sarebbe opportuno togliere –1, per farlo lo sposto a destra cambiandolo di segno*
$4\cdot x = 5+x+1$	⇨	…
$4\cdot x = 6+x$	⇨	*ora sarebbe opportuno togliere x da destra, per farlo lo sposto a sinistra cambiandolo di segno*
$4\cdot x - x = 6$	⇨	…
$3\cdot x = 6$	⇨	*ora sarebbe opportuno togliere il 3, per farlo lo porto sotto al 6*
$x = 6/3$	⇨	…
$x = 2$		Goal !!! *ci sono riuscito: è la forma che cercavo!*

Come si vede la soluzione si ottiene con un vero e proprio gioco di simboli in cui il linguaggio diviene un artefatto con le sue regole d'uso. Non bisogna pensare comunque che si tratti di un procedimento meccanico. La procedura utilizzata si basa su scelte intelligenti anche se esse si riferiscono alla forma delle equazioni e non al loro significato. Infatti è l'intelligenza dello studente che gli permette di evitare sequenze del tipo,

$4\cdot x - 1 = 5+x$	⇨	*a partire da tale equazione posso scrivere*
$5\cdot(4\cdot x - 1) = 5\cdot(5+x)$	⇨	*poi, poiché è lecito moltiplicare per 5 entrambi i membri, posso scrivere*
$5\cdot 5\cdot(4\cdot x - 1) = 5\cdot 5\cdot(5+x)$	⇨	*poi, poiché è lecito moltiplicare per 5 entrambi i membri, posso scrivere*
$5\cdot 5\cdot(4\cdot x - 1)+1 = 5\cdot 5\cdot(5+x)+1$	⇨	*poi, poiché è lecito aggiungere 1 ad entrambi i membri, posso scrivere …*

Tale sequenza è corretta allo stesso modo della prima. Il motivo per cui lo studente la evita è che egli *vede* nella prima sequenza un cammino che porta ad avvicinarsi alla soluzione $x = 2$, nella seconda un cammino che porta ad allontanarsi da ogni possibile soluzione per perdersi in un percorso infinito.

5. Il gioco del cambiamento di base

Scrivere un numero in base 10 significa esprimerlo come somma di potenze di dieci, cioè significa scriverlo nella 'forma normale':

$$a_n\cdot 10^n + \ldots + a_0\cdot 10^0 \qquad (0 \leq a_i \leq 9).$$

Ad esempio la scrittura 347 rappresenta il numero $3 \cdot 10^2+4 \cdot 10^1+7 \cdot 10^0$. Scrivere un numero in base diversa da 10 è esattamente la stessa cosa. Ad esempio scrivere in base 5 significa scrivere nella "forma normale":

$$a_n \cdot 5^n+ \ldots +a_0 \cdot 5^0 \qquad (0 \leq a_i \leq 5)$$

cioè scrivere il numero utilizzando solo le cifre 0, 1, 2, 3, 4, espressioni del tipo 5^n, il simbolo di somma e quello di prodotto. Pertanto se scrivo 3402 in base 5 intendo indicare il numero:

$$3 \cdot 5^3+4 \cdot 5^2+0 \cdot 5^1+2 \cdot 5^0$$

che scritto in base 10 sarà $3 \cdot 125+4 \cdot 25++2 = 477$.
Si pone il problema di come si possa passare da una base ad un'altra, in particolare dalla base 10 ad una base diversa da 10. In proposito esiste una procedura, piuttosto noiosa, basata su di una serie di divisioni successive. Tuttavia, invece di descrivere tale procedura proviamo a considerare tale problema come un gioco o, se si vuole, come un problema di riscrittura e di riduzione a forma normale. Ad esempio partiamo dal numero 389 la cui rappresentazione in base 10 è $389 = 3 \cdot 10^2+8 \cdot 10+9$ e supponiamo di volerlo rappresentare in base 5, cioè come somma di potenze di 5. Questo significa che partendo da 389 bisogna riscrivere la parola iniziale in modo da far scomparire tutte le cifre maggiori o uguali a 5 e potenze di cinque. Un modo per avvicinarsi alla soluzione è effettuare la divisione per 5 ottenendo:
$389 = 5 \cdot (77)+4$.
Il fatto che compaia il '5 moltiplicato per..' sembra essere un miglioramento cioè un 'avvicinamento' alla soluzione, tuttavia la presenza di 77 mostra che la soluzione non è ancora raggiunta. Questo spinge a dividere 77 per 5 ottenendo $77 = 5 \cdot 15+2$ e, sostituendo,
$389 = 5 \cdot (5 \cdot 15+2)+4$.
Poniamo al posto di 15 l'espressione $3 \cdot 5$ ottenendo:
$5 \cdot (5 \cdot 3 \cdot 5+2)+4 = 3 \cdot 5^3+2 \cdot 5+ 4$.
Pertanto la rappresentazione in base 5 è la parola 3024.
Non è difficile formalizzare questo gioco adottando come unica regola di riscrittura quella fornita dall'algoritmo della divisione per 5. Detto in modo più preciso, la regola che permette di sostituire ad ogni numero n l'espressione $5 \cdot q+r$ che risulta da tale divisione. Da notare che il gioco risultante non è deterministico. Ad esempio un modo di procedere diverso da quanto fatto sopra potrebbe essere:

$$\begin{aligned} 389 &= 3 \cdot 10^2+8 \cdot 10+9 = 3 \cdot (2 \cdot 5)^2+(5+3) \cdot (2 \cdot 5)+5+4 = 12 \cdot 5^2+2 \cdot 5^2 +6 \cdot 5+5+4 \\ &= (2 \cdot 5+2) \cdot 5^2+2 \cdot 5^2+(5+2) \cdot 5+4 = 2 \cdot 5^3+2 \cdot 5^2+2 \cdot 5^2+5^2+2 \cdot 5+4 \\ &= 2 \cdot 5^3+5 \cdot 5^2 +2 \cdot 5+4 = 3 \cdot 5^3+2 \cdot 5+4. \end{aligned}$$

Da cui si po' concludere ancora che la scrittura in base 5 è 3024. Il gioco forse si può velocizzare se si aggiungono ulteriori regole. Infatti basta osservare che $6 = 5+1$, $7 = 5+2$, $8 = 5+3$, $9 = 5+4$, $10 = 2 \times 5$, $100 = 4 \times 5^2$ … per procedere al modo seguente:

$389 = 3\times4\times5^2+8\times2\times5+5+4 = 12\times5^2+17\times5+4 = (2\times5+2)\times5^2+(3\times5+2)\times5+4$
$= 2\times5^3+2\times5^2+3\times5^2+2\times5+4$
$= 2\times5^3+5^3+2\times5+4 = 3\times5^3+2\times5+4.$

Il gioco diventa più utile ed interessante se l'insieme degli stati non si riduce all'insieme dei numeri scritti in base 10 ma è uguale all'insieme di tutte le possibili espressioni aritmetiche (insieme dei termini chiusi). In questo caso la struttura dell'espressione potrebbe aiutare Ad esempio consideriamo l'espressione, in base 10,

$3\cdot(8+25)+5\cdot(5^2+1)$.

Chi è abituato ad applicare il metodo delle divisioni successive è portato ad effettuare prima tutti i calcoli per ottenere la relativa rappresentazione decimale e successivamente ad applicare questo metodo a tale rappresentazione. Tuttavia posiamo procedere anche al modo seguente:

$3\cdot(8+25)+5\cdot(5^2+1)$
$3\cdot(5+3+5^2)+5^3+5 =$
$3\cdot5+9+3\cdot5^2+5^3+5 =$
$3\cdot5+5+4+3\cdot5^2+5^3+5 =$
$5^3 +3\cdot5^2+5\cdot5 +4 =$
$5^3+4\cdot5^2+4 \rightarrow$ GOAL!!!

E quindi la rappresentazione in base 5 è 1104.

6. Ma anche le dimostrazioni (come vengono usualmente insegnate) sono in realtà algoritmi

Fino ad ora ci siamo occupati di come si potrebbe sostituire l'apprendimento di una procedura con un gioco. Tuttavia, come abbiamo accennato nell'introduzione, anche la "ben più nobile" attività di dimostrazione di teoremi non permette di uscire dal ruolo passivo a cui quasi sempre viene costretto l'allievo. Ovviamente le dimostrazioni costituiscono un passo avanti rispetto all'apprendimento di una procedura e la sua ripetuta applicazione per sviluppare capacità di esecuzione. Tuttavia se si guarda al modo come esse entrano usualmente in gioco, rimane qualcosa che non è convincente che non le rende poi tanto diverse dalle procedure.

1. L'enunciato del teorema viene fornito dall'insegnante nell'ambito di un contratto didattico in cui l'insegnante non sottopone problemi ma fornisce le "sue" soluzioni, non propone possibili congetture ma detta le "sue" verità.
2. Infatti la verità dell'enunciato viene data per scontata nel momento in qui tale enunciato viene dato.
3. Proprio per il fatto che l'enunciato viene dato per vero, la nozione di congettura, con il relativo equilibrio tra vero e falso non compare. Manca pertanto completamente l'idea di confutazione che ha sempre giocato in matematico un ruolo tanto cruciale quanto misconosciuto.

4. L’esclusiva presenza di teoremi e non di congetture non permette l’emergere delle dimensioni emotive di “dubbio”, “creazione”, “scoperta”, “sorpresa”, “delusione”, “competizione”.
5. Si da per scontato che la ricerca della dimostrazione (o della confutazione) non è un compito che spetta agli studenti. La dimensione emotiva “soddisfazione personale di esserci riuscito” non può comparire.
6. Non sono presenti scelte. L’allievo deve attendere pazientemente lo svolgimento della dimostrazione dell’insegnante, una sequenza di passi logici ognuno successivo all’altro senza che ci sia una qualche scelta o una qualche esitazione.

Mi riferisco a situazioni ottimali con insegnanti bravi che spiegano il significato di quello che dicono e con allievi intelligenti che non si limitano ad imparare a memoria la dimostrazione per poi ripeterle. Eppure davanti ad una ipotesi da verificare, le capacità razionali di un laureato in matematica con un buon voto non è detto che siano migliori di quelle di una persona che, pur avendo solo la licenza elementare, ha passato la vita a giocare a scopone oppure a dama.

Tuttavia è possibile evitare di somministrare l’enunciato di un teorema e la relativa dimostrazione come un prodotto già confezionato che gli studenti inevitabilmente vedranno come appartenente al mondo immobile della scuola e dei libri di testo. Non sostengo che questo si possa fare sempre, è evidente che una buona parte della matematica richiede dimostrazioni tanto complesse che nemmeno sotto forti suggerimenti uno studente è in grado di raggiungere. Tuttavia sarebbe essenziale che almeno la decima parte del tempo dedicato alla matematica fosse spesa in un laboratorio in cui si chiede ad un allievo di affrontare congetture, inventando dimostrazioni o contro esempi.

Ad esempio consideriamo la prima parte del teorema 3.1.1 del quale abbiamo dato una dimostrazione che può essere letta in pochi minuti e proviamo a sostituire al suo enunciato il seguente problema che si riferisce al caso particolare $p = 2$.

Se sommo ad un numero pari un numero pari, quello che ottengo è ancora un numero pari?

È evidente che la stessa forma interrogativa stimola in un classe una discussione, la produzione di esempi, la ricerca di contro-esempi e così via. È probabile che gli studenti, dopo avere effettuato una serie di sperimenti numerici prima o poi si formino la convinzione che la risposta è positiva. Potrebbero addirittura congetturare la validità della seguente tabella:

pari + pari = pari
dispari + dispari = pari
pari + dispari = dispari
dispari + pari = dispari

Tuttavia, essendo i numeri infiniti si pone il problema della ricerca di una dimostrazione delle proprie intuizioni che chiuda la questione definitivamente. Alcuni possono seguire la via algebrica su numeri particolari, ad esempio osservare che $34+14 = 17\times2+7\times2$ per poi mettere in evidenza il numero 2 ottenendo $(17+7)\times2$ che è evidentemente un multiplo di 2. Poi riflettere su tale dimostrazione ed accorgersi che può essere ripetuta per qualunque coppia di numeri pari. Altri possono ricorrere fortemente al significato "concreto" ed operativo della proprietà di divisibilità per 2. Se ho due scatole A e B di cioccolatini e posso distribuire equamente sia il contenuto di A che il contenuto di B a due persone, allora dopo aver rovesciato il contenuto delle due scatole sul tavolo il mucchio di cioccolatini ottenuto può essere equamente distribuito a due persone?
Più interessante potrebbe essere proporre il teorema della divisibilità per 2 che dovrebbe essere riformulato nella forma di interrogativo:

Come fare per riconoscere che un numero è divisibile per 2?

In questo caso si presenta sia il problema di formulare una congettura, sia quello di trovare una dimostrazione o una confutazione della congettura. A tale proposito l'insegnante può suggerire di esaminare il comportamento di un po' di numeri, magari esplorando i primi dieci. Non dovrebbero esserci difficoltà a scoprire che 0, 2, 4, 6, 8, 10 sono divisibili per 2, specialmente se si ricorda che "*n* divisibile per 2" significa che *n* oggetti si possono ripartire equamente tra due persone. Poi potrebbe chiedere se esiste una proprietà comune a tutti i numeri della serie infinita:
12, 14, 16, …
Fatto questo, dovrebbe emergere la giusta congettura. Ma come dimostrarla? Esistono molte possibili vie che un bravo maestro potrebbe suggerire e non sarò io, con quel poco di esperienza di scuola che ho, a suggerire quale.

Bibliografia

Arzarello, F. (1990). Bambini, giochi e costruzione del sapere matematico: luci ed ombre. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica: gioco ed apprendimento,* Atti del Convegno Nazionale *Incontri con la matematica n. 4* (pp. 7–13), 16–17–18 novembre 1990, Castel San Pietro Terme. Bologna-Roma: Apeiron.

D'Amore, B. (1990). *Matematica: gioco ed apprendimento*. Atti del Convegno Nazionale *Incontri con la matematica n. 4*, 16–17–18 novembre 1990, Castel San Pietro Terme. Bologna-Roma: Apeiron.

D'Amore, B. (1992). *I Giochi di strategia nella didattica dalla scuola materna all'università*. Convegno matematica e scacchi, Forlì, http://forliscacchi.it/_doc/mateDamore.html

ALIEM XXI:
Tres lustros de investigación latinoamericana en educación matemática[1]

Fredy Enrique González
Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina"
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela

Resumen. *ALIEM XXI es una Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el Siglo XXI, mediante la cual se definió una problemática de investigación en Educación Matemática específica para países latinoamericanos que, en cinco áreas, agrupa diferentes líneas de investigación, con sus respectivos temas susceptibles de despertar interés indagatorio entre los educadores matemáticos de la región; para conocer qué se ha cubierto de dicha agenda en el lapso 2000–2015, se efectuó una revisión del título de las comunicaciones presentadas en las más recientes ediciones de la CIAEM, el CIBEM, la RELME y el COVEM, relacionándolos con las áreas que componen ALIEM XXI, con miras a realizar un balance en función de lo logrado y de lo que aún está pendiente, con la finalidad de actualizar y redefinir las áreas temáticas que la conforman.*

Resumo. *ALIEM XXI é uma Agenda latino-americana para a pesquisa em educação matemática para o século XXI, que definiu um problema de pesquisa em educação matemática específica para países da América Latina que inclui cinco áreas, diferentes linhas de pesquisa, com seus respectivos temas suscetíveis de interesse investigativo entre educadores de matemática na região; para saber o que tem sido coberto nesta agenda no período 2000–2015, foi a revisão do título das comunicações apresentadas nas últimas edições do CIAEM, o CIBEM, o RELME e o COVEM, relacioná-los com as áreas que compõem a ALIEM 21, com vista a levar a cabo uma avaliação com base nos resultados alcançados e o que está pendente , para atualizar e redefinir as áreas temáticas que o constituem. Palavras-chave: produção científica; Bibliometria; Educação matemática história Social.*

Résumé. *ALIEM XXI est un programme d'Amérique latine pour la recherche dans l'enseignement des mathématiques pour le XXIe siècle, qui défini un problème de recherche dans l'enseignement des mathématiques spécifique à des pays d'Amérique latine comprenant cinq domaines, différents axes de recherche, avec leurs sujets respectifs susceptibles d'intéresser d'enquête parmi les enseignants de mathématiques dans la région ; pour savoir ce qui a été couvert à cet ordre du jour*

[1] Este *papel* está basado en la Conferencia Especial pronunciada por el autor en la XXIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en Ciudad de Panamá en julio de 2015.

pour la période 2000–2015, était une révision du titre des communications présentées dans les dernières éditions de la CIAEM, la CIBEM, le Vicent et la COVEM, elles concernent les domaines qui composent ALIEM 21, en vue de procéder à une évaluation sur la base de ce qui a été accompli et ce qui est en attente, afin de mettre à jour et de redéfinir les domaines thématiques qui la composent.

Abstract. *ALIEM XXI is a Latin American Agenda for research in mathematics education for the 21st century, which defined a problem of research in mathematics education specific to Latin American countries comprising five areas, different lines of research, with their respective subjects susceptible of investigative interest among math educators in the region; to know what has been covered in this agenda in the period 2000–2015, was a revision of the title of the communications presented in the latest editions of the CIAEM, the CIBEM, the RELME and the COVEM, relate them to the areas that make up ALIEM 21st, with a view to carry out an assessment on the basis of what has been achieved and what is pending, in order to update and redefine the thematic areas that constitute it.*

1. Introducción

La producción de conocimiento, basada en la investigación científica sobre el objeto que define el asunto de interés indagatorio de una disciplina, de acuerdo con lo expresado por Ardila (2003), es "*lo que le da identidad"* y constituye uno de los factores coadyuvantes de su desenvolvimiento; ello es así por cuanto " *la investigación científica*" "*tiene por objeto la búsqueda de un saber adicional o complementario al existente"* (García Leal, 2005) el cual, al ser "*estudiado y empleado por los investigadores noveles en la formación de sus propias ideas o en la construcción de sus juicios o argumentos discursivos*" (Cantoral, 2008) se constituye en un aspecto fundamental de la conformación de la comunidad científica vinculada con el objeto de estudio de la disciplina en cuestión; tal es el caso de la Educación Matemática, concebida aquí como:

> una disciplina que tiene como campo de estudio la problemática específica de la transmisión y adquisición de contenidos, conceptos, teorías, y operaciones matemáticas en el contexto de las diversas instituciones escolares y otras instancias educativas (formalizadas o no), y que se expresa en forma de conocimientos teóricos y prácticos, relativos a dicha problemática, generados por el quehacer académico que, en conferencias, grupos de estudio, ponencias, congresos y exposiciones, llevan a cabo los miembros de la comunidad matemática internacional que se ocupan de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina y que se materializa, tanto en los informes, libros y artículos que son publicados en revistas u otros medios especializados que le sirven de soporte, como en las expresiones orales y en los artefactos producidos por los miembros de las diferentes comunidades de practicantes de esta disciplina. (González, 1995, p. 6)

En el estudio que en este documento se reporta, la investigación es concebida como una "*actividad dirigida a la producción (sistemática, organizada,* *metódica) de conocimientos, con la intención de proponer respuestas a interrogantes formuladas por alguien en torno a situaciones problemáticas previamente definidas a partir de sus intereses, motivaciones y valores"* (González, 2005; p. 8); este autor agrega que:

> la investigación está vinculada con procesos de búsqueda, obtención, procesamiento y transformación de información, que propicien la generación de conocimientos que puedan ser aplicados en la solución de problemas: *cognitivos* (ausencia, insuficiencia, inexistencia de conocimientos), *de desarrollo* (retraso, retroceso, detención en el alcance de parámetros o estándares deseados en relación con cierto patrón de referencia), *estructurales* (inadecuación en cuanto al acoplamiento esperado entre los componentes de cierta estructura), *de funcionamiento* (falla en la realización de las tareas que alguien o algo debe ejecutar) y *sociales* (inequidad en la distribución de los beneficios obtenidos a partir de la explotación de bienes de carácter público) (ob. cit., p. 8).

Particularmente, en el caso de la investigación en Educación Matemática, resulta imprescindible el aporte de Jeremy Kilpatrickquien, en su trabajo intitulado "*A History of Research in Mathematics Education*" (Kilpatrick, 1992), hace referencia a los orígenes de la investigación en educación matemática, así como también a los cambios ocurridos tanto en su metodología como en el currículum; además, este autor hace mención de los temas que convocaban el interés de los investigadores en el momento de la producción de dicho trabajo, a saber: prácticas docentes, procesos de aprendizaje, empleo de tecnología, prácticas de evaluación, desarrollo profesional y contexto social.
Kilpatrick afirma, de manera categórica, que:

> La historia de la investigación en educación matemática es parte de la historia de nuestro campo – la Educación Matemática. Este se ha desarrollado durante los últimos dos siglos debido a que matemáticos y educadores han enfocado su atención hacia qué matemáticas se enseñan y se aprenden en la escuela y cómo se llevan a cabo estos procesos; también se han interesado en el qué y en el cómo de las matemáticas que deberían enseñarse y aprenderse en la escuela. Desde su comienzo, la investigación en educación matemática ha sido también modelada por fuerzas provenientes del campo más general de la investigación educativa, la cual abandonó, hace aproximadamente un siglo, la especulación filosófica en favor de un enfoque más científico. Al igual que la Educación Matemática, la investigación en este campo ha tenido que luchar para lograr su propia identidad. Ha tratado de formular su propia problemática y sus propias formas de tratarla. *Ha intentado definirse a sí misma y constituir un grupo de personas que se autoidentifiquen como investigadores en Educación Matemática*. (Kilpatrick, 1998, p. 1) (Subrayado añadido)

La "*tarea de auto-definición*", a la cual hace referencia Kilpatrick, puede verse concretada en la actividad de producción de conocimientos acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, la cual se hace ostensible mediante: realización de eventos, publicación de revistas y otros

medios de difusión, organización de grupos de estudio, la edición de *handbooks*, entre otros.
En el caso latinoamericano se cuenta con espacios de encuentro de los educadores matemáticos de este ámbito geográfico como lo son la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME); la Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM; y el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM); y, otra multitud de oportunidades para el intercambio de ideas, propuestas, resultados, preocupaciones indagatorias que se realizan al interior de prácticamente todos los países de esta región (Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM); Congreso Boliviano de Educación Matemática (COBEM); Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME); Congreso Nacional de Matemática Educativa de Guatemala (CONAMEG); Reunión Dominicana de Matemática Educativa (REDOME); Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)).

Tabla 1

Ediciones del RELME, CIAEM, CIBEM, COVEM (1961 – 2017)

Año	RELME		CIAEM		CIBEM		COVEM (en Venezuela)	
	Nº	***Lugar***	***Nº***	***Lugar***	***Nº***	***Lugar***	***Nº***	***Lugar***
1961			I	Bogotá, Colombia				
1966			II	Lima, Perú				
1972			III	Bahía Blanca, Argentina				
1975			IV	Caracas, Venezuela				
1979			V	Campinas, Brasil				
1985			VI	Guadalajara, México				
1987	I	Mérida, México	VII	Santo Domingo, República Dominicana,				
1988	II	Guatemala, Guatemala						
1989	III	San José, Costa Rica						
1990	IV	Acapulco, México			I	Sevilla, España		
1991	V	Tegucigalpa, Honduras	VIII	Miami, Estados Unidos				
1992	VI	Cuernavaca, México						
1993	VII	Panamá, Panamá						
1994	VIII	San José, Costa Rica			II	Blumenau, Brasil	I	Maturín, Monagas
1995	IX	La Habana, Cuba	IX	Santiago, Chile				
1996	X	Ponce y Cayey, Puerto Rico						
1997	XI	Morelia, México					II	Valencia, Carabobo
1998	XII	Bogotá, Colombia			III	Caracas, Venezuela		
1999	XIII	Santo Domingo, República Dominicana	X	Maldonado, Uruguay				
2000	XIV	Panamá, Panamá					III	Maracaibo, Zulia
2001	XV	Buenos Aires, Argentina			IV	Cochabamba, Bolivia		
2002	XVI	La Habana, Cuba					IV	Trujillo, Trujillo
2003	XVII	Santiago, Chile	XI	Blumenau, Brasil				

Continúa

Tabla 1

Ediciones del RELME, CIAEM, CIBEM, COVEM (1961 – 2017) (Continuación)

Año	RELME		CIAEM		CIBEM		COVEM (en Venezuela)	
	Nº	***Lugar***	***Nº***	***Lugar***	***Nº***	***Lugar***	***Nº***	***Lugar***
2004	XVIII	Tuxtla Gutiérrez, México					V	Barquisimeto, Lara
2005	XIX	Montevideo, Uruguay			V	Porto, Portugal		
2006	XX	Camagüey, Cuba						
2007	XXI	Maracaibo, Venezuela	XII	Querétaro, México			VI	Maracay, Aragua
2008	XXII	México, D.F. México						
2009	XXIII	Santo Domingo, República Dominicana			VI	Puerto Montt, Chile		
2010	XXIV	Cd. de Guatemala, Guatemala					VII	Caracas, Venezuela
2011	XXV	Camagüey, Cuba	XIII	Recife, Brasil				
2012	XXVI	Belo Horizonte, Brasil						
2013	XXVII	Buenos Aires, Argentina			VII	Montevideo, Uruguay	VIII	Coro, Falcón
2014	XXVIII	Barranquilla, Colombia						
2015	XIX	Panamá, Panamá	XIV	Chiapas, México				
2016	XXX	Monterrey. México					IX	Barquisimeto, Lara
2017					VIII	Madrid, España		

En la Tabla 1 se muestran las ediciones de los eventos de Educación Matemática más relevante para los educadores matemáticos de la región latinoamericana. [2]

Entre los cuatro, la CIAEM es el evento más antiguo; se inició a comienzos de la década de los años 60´s del siglo XX, en pleno auge del denominado Movimiento de la Matemática Moderna (Matos y Valente, 2010); le sigue la RELME cuyo germen fue la primera Reunión Centro Americana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, realizada en Mérida, México en 1987; el CIBEM cuyo origen

> está ligado a la VIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (VIII CIAEM), que se celebró en la República Dominicana, en el año 1987, en donde una delegación española liderada por el entonces presidente de la Federación

[2] El autor agradece al Dr. Oswaldo Martínez por su sugerencia en la organización de las tablas insertas en este documento.

> Española de Asociaciones de Profesores de Matemática, Gonzalo Sánchez Vásquez, propusieron en la reunión del Comité Interamericano de Educación Matemática, que se realizara el primer CIBEM en España. Con esta proposición mostraban su interés en estrechar los lazos entre las comunidades portuguesa, española y latinoamericana de educación matemática. Se acordó realizar esta nueva conferencia regional donde estuvieran agrupadas precisamente estas comunidades y donde los idiomas oficiales fueran el Español y el Portugués. Dichos congresos serían organizados de manera conjunta por la Asociación de Profesores de Matemática (Portugal), la Federación Española de Educación Matemática y el Comité Interamericano de Educación Matemática. (Ver: http://www.oei.es/noticias/spip.php?article1753)

El I CIBEM, según aviso consignado en la Revista SUMA, Nº 2, de 1989 (http://revistasuma.es/IMG/pdf/2/081.pdf), fue realizado en Sevilla (España) del 24 al 30 de septiembre de 1990; en los años siguientes se llevaron a cabo tres RELME´S (1991, Tegucigalpa, Honduras; 1992, Cuernavaca, México; y 1993, Ciudad de Panamá); una CIAEM (en 1991 tuvo lugar la VIII CIAEM en Miami, USA); se llegó así a 1994 cuando, contemporáneamente con la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa (San José, Costa Rica) y el II CIBEM (Blumenau, Brasil), tuvo lugar la primera edición del Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM), el cual fue organizado por la Asociación Venezolana de Educación Matemática, ASOVEMAT, en la ciudad de Maturín en 1994, año éste que se ubica en la década de los 90´s del siglo XX, considerado como el lapso de eclosión de la Educación Matemática en Venezuela, de acuerdo con la periodización propuesta por González (2014) que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2

Periodización de la Educación Matemática en Venezuela

		PERÍODO		
I		**Precolombino**		
II		**Colonial**		
III	**FASES**	**Republicano**		
	III-a	**Siglo XIX**		
	III-b	**Siglo XX**		
			EVENTOS CLAVE DE REFERENCIA	
		LAPSO	**INICIO**	**CIERRE**
		1900-1958	Códigos de Instrucción Pública	Derrocamiento de la Dictadura de Pérez Jiménez
		1960 - 1970	I Conferencia Interamericana de Educación Matemática (I CIAEM)	Reforma Educativa de 1969
		1970 – 1980	Creación de los Estudios de Postgrado en Matemática	Seminario sobre la Situación de la Enseñanza de la Matemática en el Ciclo Básico de la Educación Media
		1980 – 1990	I Encuentro Nacional de Profesores de Didáctica de la Matemática en Institutos de Educación Superior	I Encuentro de Coordinadores de Programas de Investigación y de Postgrado
		1990 – 2000	Fundación de la ASOVEMAT	III CIBEM
	III-c	**Siglo XXI**		
			EVENTOS CLAVE DE REFERENCIA	
		LAPSO	**INICIO**	**CIERRE**
		2000 – 2013	Promulgación de la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela	Creación del Doctorado en Educación Matemática

(González, 2014)

También se dispone de revistas específicas, como la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME, México); el Boletín de Educação Matemática (BOLEMA, Brasil); la Revista Educación Matemática (México), el Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (JIEMM, Brasil); la revista UNION (España); y multidisciplinarias como PARADIGMA (Venezuela) y ACTA SCIENTIAE (Brasil); a modo de ilustración, en el Gráfico 1 se muestran las portadas de algunas de estas publicaciones.

Gráfico 1. Algunas Publicaciones Ilustrativas de espacios de difusión de la Investigación Iberoamericana en Educación Matemática.

Además, se editan publicaciones donde se dan a conocer las pesquisas realizadas en diferentes países latinoamericanos, entre las que resulta imprescindible señalar las ediciones del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, ALME, que incluyen los extensos de los trabajos expuestos en la RELME anterior a aquella donde se entrega la edición de la ALME, Gráfico 2.[3]

[3] El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) es una publicación asociada con la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELM) y es publicada un año después de la RELME a la cual corresponde; en el año 2015, a los asistentes a la RELME 29 (Panamá), se les entregó el ALME 28, la cual reúne los extensos de las comunicaciones expuestas en RELME 28; por tanto, para el momento de la elaboración del presente documento, ALME 28 es la edición más actualizada, la cual se asocia con la RELME 28 llevada a cabo en Barranquilla (Colombia), en 2014.

Gráfico 2. Portadas de la primera y de la más reciente de las ALME

También se cuenta con la publicación de los resúmenes de las comunicaciones expuestas en el VII CIBEM, y en otros eventos que han tenido lugar al interior de los diferentes países de la región tales como Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM); Congreso Boliviano de Educación Matemática (COBEM); Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME); Congreso Nacional de Matemática Educativa de Guatemala (CNAMEG); Reunión Dominicana de Matemática Educativa (REDOME); Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM); en el Gráfico 3 se muestran las portadas de las publicaciones asociadas con algunos de los eventos aquí mencionados.

Gráfico 3.
Portadas de Memorias de eventos regionales y nacionales en Educación Matemática

Con base en lo expuesto, puede inferirse la robustez de la investigación que se realiza en el campo de la Educación Matemática tanto a nivel internacional, en general, como latinoamericano en particular, y cuyos primeros indicios –

como lo señala Kilpatrick (1992) – pueden ubicarse en 1908 cuando fue fundada la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).

En el caso latinoamericano, el quehacer investigativo en Educación Matemática, se hace ostensible en varios escenarios donde exhiben los resultados de su actividad indagatoria los miembros de las organizaciones clave que operan en la región; entre éstas destacan: el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) y el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME); el quehacer del CIAEM se manifiesta principalmente en la realización, desde 1961, de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática, cuyas ediciones tienen lugar, regularmente, cada cuatro años y de las cuales, hasta el momento, se han llevado a cabo catorce, la primera fue en Bogotá, Colombia (I CIAEM, 1961) y la décimo cuarta (la más reciente) realizada en Chiapas, México (XIV CIAEM, 2015); por su lado, la actividad del CLAME se hace visible a través de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) y su correspondiente Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME); la RELME tuvo su génesis en la Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, cuya primera edición tuvo lugar en Mérida, Yucatán (México) en abril de 1987; fue a partir de su décima primera edición (1997) cuando comenzó a ser denominada Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, dando continuidad a la numeración (RELME 11)

El proceso de desarrollo creciente de la Investigación en Educación Matemática en la región, constituyó el contexto en cuyo marco fue propuesta la Agenda Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática para el Siglo XXI (ALIEM XXI) (González, 2000), Gráfico 4.

Gráfico 4. Portada de la Revista Educación Matemática donde fue publicada ALIEM XXI

ALIEM XXI fue concebida como un

> instrumento conceptual que se propone a personas, instituciones y organizaciones interesadas en mejorar la calidad y el nivel de competencia matemática de los ciudadanos latinoamericanos, con la finalidad de invitarlos a unificar los esfuerzos y recursos humanos, financieros y técnicos disponibles, de modo que se puedan generar conocimientos, saberes, bienes y servicios susceptibles de ser utilizados como herramientas cognitivas que nos ayuden a comprender mejor la realidad de la educación matemática en cada uno de nuestros países y de la región en general, o como alternativas viables de solución a los múltiples problemas y carencias que se nos presentan en relación con la información y formación matemática de los ciudadanos que pueblan nuestras respectivas naciones, especialmente los que componen los sectores menos favorecidos. (González, 2000)

La agenda se estructuró en Áreas, Líneas y Temas: (a) Las Áreas, fueron concebidas como ámbitos conceptuales amplios que se derivan de los sistemas de referencia, humano, institucional, contextual y disciplinario,[4] (Gráfico 5) que han sido propuestos para interpretar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática; (b) Las Líneas, fueron definidas como direcciones orientadoras de los esfuerzos investigativos dentro de cada área; (c) y los Temas, estuvieron referidos a asuntos específicos, concebidos como problemas susceptibles de abordaje investigativo mediante proyectos concretos, ubicados en una línea determinada.

[4] El subsistema Humano abarca a las personas que protagonizan situaciones sociales en las que conscientemente o no, con intención manifiesta o sin ella, se procura o trabaja con conocimientos y saberes matemáticos explicitados o implicados en la situación social considerada. El Contextual se refiere a todos los aspectos de índole social, cultural, histórica, geográfica y política que enmarcan la situación y, a la vez, sirven para interpretar el sentido y significado que para sus actores tienen las acciones que ellos protagonizan. El Institucional se vincula con los aspectos de carácter organizacional que condicionan la estructura de relaciones que se establecen entre los protagonistas de la situación. Finalmente, el subsistema Disciplinario abarca el dominio de conocimientos y saberes y las competencias asociadas con ellos, en cuyos procesos de adquisición o desarrollo se tiene interés indagatorio (González, 2000).

Grafico 5. Sistemas de referencia para organizar la investigación en Educación Matemática en ALIEM XXI.

Las siguientes áreas y líneas de ALIEM XXI son las siguientes:

Área Temática 1: Estudios de caracterización de los contextos donde se producen los procesos de adquisición de conocimientos y saberes matemáticos; *Líneas dentro del Área Temática 1:* (1) Estudios comparativos interregionales de Educación Matemática, (2) Estudios de Sociología de la Educación Matemática, (3) Estudios de Etnomatemática, (4) Reconstrucción histórica de la Educación Matemática como disciplina científica en los países latinoamericanos, (5) Aplicaciones de la Matemática, (6) Estudios acerca de los aspectos socio contextuales del encuentro edumático, (7) Estudio de los aspectos socioculturales de la Educación Matemática, (8) Implicaciones didácticas de la Historia de la Matemática, (9) Estudios acerca del impacto de las nuevas tecnologías sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Área Temática 2: Estudios que examinan el proceso de aprendizaje de la Matemática por parte de estudiantes de los diversos niveles del sistema educativo (primario, secundario y universitario). *Líneas dentro del Área Temática 2:* (1) Procesos Psicológicos implicados en el Aprendizaje de la Matemática, (2) Estudios acerca del Perfil Cognitivo del Estudiante de Matemática, (3) Perfil Afectivo del Estudiante de Matemática.

Área Temática 3: Estudios acerca de las prácticas docentes del profesor de Matemática; *Líneas dentro del Área Temática 3:* (1) Estudios acerca de la Práctica Profesional del Profesor de Matemática; (2) Los procesos de comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el aprendizaje de los alumnos, (3) Enseñanza experimental de la Matemática.

Área Temática 4: Formación Inicial y Permanente del Profesor de Matemática; *Líneas dentro del Área Temática 4:* (1) *Estudios acerca del desarrollo profesional del profesor de Matemática*; ¿qué debe saber y saber hacer un profesor de Matemática para el próximo milenio? Esto se considera importante a fin de generar conocimientos que permitan diseñar, desarrollar y evaluar programas especiales de formación permanente de profesores de Matemática. Algunas de las cuestiones que han de ser consideradas son, entre otras, las siguientes: (a) especificidad de los procesos de formación de profesores de Matemática; (b) el papel de las universidades y de los centros de formación de profesores en el desarrollo de un perfil cónsono con los nuevos roles que ha de desempeñar el profesor de matemática; (c) indicadores de competencia matemática en relación con la formación del profesor; (d) comparación de prácticas institucionales diferenciadas de formación profesional; (e) impacto de la formación adquirida sobre las prácticas docentes consolidadas, rutinarias, establecidas, cristalizadas. Entre las preguntas que ameritan respuesta están ¿Cómo se convierte el profesor de novato en experto? ¿Qué características deben tener los programas de formación inicial y de formación permanente de profesores? ¿Cómo incrementar las vocaciones hacia la docencia en Matemática? Otras preguntas interesantes son: ¿Cuál es el perfil ideal del docente de Matemática? ¿Cuál es el impacto de los procesos del pensamiento del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje)?.

Área Temática 5: Estudios acerca de las prácticas de evaluación utilizadas en el aula de clases de Matemática. Existe una clara necesidad de hacer investigación relativa al desarrollo de nuevos enfoques para evaluar el aprendizaje de la Matemática, incluyendo los efectos de la introducción de técnicas alternativas de evaluación, sobre los profesores y los estudiantes, y sobre las prácticas escolares. *Líneas dentro del Área Temática 5:* (1) Modos alternativos de evaluación, (2) Evaluación de textos y otros materiales instruccionales.

2. Preguntas de Investigación

Dado que han transcurrido tres lustros desde la publicación de ALIEM XXI, cabrían entre otras las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles de las investigaciones propuestas en ALIEM XXI se han llevado a cabo?
2. ¿A la luz de ALIEM XXI, hacia cuáles ámbitos temáticos se ha orientado la investigación latinoamericana en Educación Matemática?
3. ¿Cómo está estructurada la investigación en Educación Matemática en la región latinoamericana?
4. ¿De las áreas temáticas consideradas en ALIEM XXI, cuáles son las que más han sido abordadas por los investigadores latinoamericanos en Educación Matemática?
5. ¿Cómo se ha distribuido la investigación asociada con ALIEM XXI en los países de la región?

Respuestas completas a las interrogantes formuladas ameritarían el examen exhaustivo de toda la producción científica latinoamericana en Educación Matemática durante los tres lustros constitutivos del lapso 2000–2015, y considerada en los espacios de difusión de la Educación Matemática, ya mencionados (eventos, revistas, memorias y reportes de los grupos de investigación), lo cual requeriría la intervención de un equipo de pesquisadores que cuente con la colaboración de educadores matemáticos de los diferentes países de la región, lo cual superaría en mucho la pretensión del presente trabajo.

3. Método

Este estudio tuvo carácter exploratorio y consistió en una revisión del título de las comunicaciones expuestas en cuatro de los más recientes eventos latinoamericanos relativos a Educación Matemática; tres de alcance regional (RELME 27, Buenos Aires, Argentina, 2013; XIV CIAEM, Chiapas, México, 2015; VII CIBEM, Montevideo, Uruguay, 2013) y uno nacional (VIII COVEM, Santa Ana de Coro, edo. Falcón, Venezuela, 2013); con dicha revisión se pretende contribuir al esfuerzo por dar direccionalidad y organicidad a la investigación en Educación Matemática que se lleva a cabo en la región latinoamericana. La decisión de considerar los títulos como unidad de análisis fue tomada con base en la afirmación de Cortes (2012: 49) quien sostiene que: "*el título del trabajo científico tiene la función de describir sucintamente su contenido, además de ayudar al lector en la exploración del estudio*", por hacer referencia a su asunto de interés indagatorio.

4. Corpus

Para la realización de la revisión que sirvió de base para la realización del trabajo del que se rinde cuenta en este informe, fueron consideradas las Tablas de Contenido, en versión digitalizada, de los siguientes documentos (Gráfico 6):

1. Programa de la XIV CIEAM, Chiapas, México, 2015;
2. Memorias del VII CIBEM, Montevideo, Uruguay, 2013;
3. ALME 27 (Memorias de la RELME 27), Buenos Aires, Argentina, 2013;
4. Programa del VIII COVEM, Santa Ana de Coro, Venezuela, 2013.

Gráfico 6. Identificación de los eventos cuyas Tablas de Contenido fueron examinadas

5. Procedimiento

En las Tablas de Contenido fue examinado el título de cada uno de los diferentes tipos de trabajos (conferencia, ponencia, taller, etc.), resaltando una palabra o frase que pudiera ser relacionada directamente con alguna de las áreas o líneas de las señaladas en ALIEM XXI. La información, dada la necesidad de hacerla más manejable en virtud del monto de la información que habría de ser examinada, se registró en matrices especialmente diseñadas; una matriz que resultó clave, fue la que agrupó los criterios establecidos por cada uno de los eventos para ubicar las comunicaciones expuestas, Tabla 3.

Tabla 3

Criterios para ubicar las comunicaciones expuestas en cada evento

CIAEM	RELME 27 / ALME 27	VII CIBEM	VIII COVEM
1. Álgebra en Educación Matemática. 2. Cálculo diferencial e integral en Educación Matemática. 3. Competencias en Educación Matemática. 4. Educación Matemática y relación con otras áreas de conocimiento. 5. Desarrollo curricular en matemáticas. Educación Matemática en las primeras edades escolares (hasta grado 6). 6. Educación Matemática y necesidades especiales. 7. Educación Matemática en las primeras edades escolares (hasta grado 6). 8. Estadística y Probabilidad en Educación Matemática. 9. Etnomatemáticas y perspectivas socioculturales. 10. Formación continua y desarrollo profesional en Educación Matemática. 11. Formación de profesores de enseñanza secundaria en Educación Matemática (grados 7 a 12). 12. Formación de profesores de enseñanza primaria en Educación Matemática (grados 1 a 6). 13. Geometría en Educación Matemática. 14. Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática. 15. Investigación en Educación Matemática. 16. Modelización en Educación Matemática. 17. Nuevos enfoques y tendencias en Educación Matemática. 18. Resolución de problemas 19. Sociología de la Educación Matemática. 20. Uso de tecnologías basadas en la web en Educación Matemática. 21. Uso de tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.	**RELME 27** 1. Aprendizaje cooperativo 2. Capacitación para el trabajo 3. Educación a distancia 4. Educación continua 5. Educación de adultos 6. Epistemología 7. Estudios socioculturales 8. Etnomatemáticas 9. Factores afectivos 10. Formación de profesores 11. Gráfica y funciones 12. Lenguaje matemático 13. Medición 14. Metacognición 15. Modelación matemática 16. Modelos matemáticos 17. Modelos mentales 18. Números racionales y proporcionalidad 19. Pensamiento algebraico 20. Pensamiento geométrico 21. Pensamiento lógico 22. Pensamiento matemático avanzado 23. Pensamiento numérico 24. Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística 25. Pensamiento variacional 26. Resolución de problemas 27. Socioepistemología 28. Tecnología avanzada 29. Visualización 30. Otros (Indicar cuáles) ALME 27 1. Análisis del discurso matemático escolar 2. Propuestas para la enseñanza de las matemáticas 3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar 4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación inicial 5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.	1. I.1 - Pensamiento Algebraico. 2. I.2 - Pensamiento Numérico. 3. I.3 - Pensamiento Geométrico. 4. I.4 - Pensamiento Matemático Avanzado. 5. I.5 - Pensamiento relacionado con la Probabilidad. 6. I.6 - Matemática para alumnado con Necesidades Educativas Especiales. 7. I.7 - Los procesos de Comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el Aprendizaje del Alumnado. 8. I.8 - Procesos Psicológicos implicados en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática. 9. I.9 - Perfil Afectivo del Alumnado y del Profesorado. 10. II.1 - La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelización Matemática. 11. II.2 - La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático. 12. III.1 - Educación Matemática y Diversidad (Cultural, Lingüística, de Género, etc.). 13. III.2 - Educación Matemática e Inter (pluri, multi) culturalidad. 14. III.3 - Educación Matemática en Contexto (Etnomatemática). 15. III.4 - Educación Matemática y Participación Crítica en las Políticas Públicas. 16. III.5 - Educación Matemática y Pertinencia Social de la Matemática Escolar. 17. III.6 - Educación Matemática e Historia de la Matemática.	1. Aprendizaje cooperativo 2. Creencias y actitudes hacia la matemática 3. Desarrollo de talentos en matemática 4. Diversidad funcional 5. Formación del lenguaje y el pensamiento matemático 6. Funciones y gráficas 7. Epistemología e Historia de la Matemática y de la Educación Matemática 8. Etnomatemáticas 9. Educación Matemática crítica 10. Enseñanza por proyectos 11. Evaluación en matemática 12. Factores afectivos 13. Formación de docentes 14. Matemática lúdica 15. Medición 16. Metacognición 17. Modelación matemática 18. Modelos mentales 19. Pensamiento aritmético 20. Pensamiento algebraico 21. Pensamiento geométrico 22. Pensamiento lógico 23. Pensamiento probabilístico y estadístico 24. Pensamiento variacional 25. Pensamiento matemático avanzado 26. Proporcionalidad 27. Socioepistemología 28. Solución de problemas 29. Uso de Tecnologías 30. Visualización 31. Otra continúa

Tabla 3

Criterios para ubicar las comunicaciones expuestas en cada evento (continuación)

CIAEM	RELME 27 / ALME 27	VII CIBEM	VIII COVEM
	1.	18. III.7 - Educación Matemática y Diversidad Funcional (condiciones visuales, auditivas, motrices, etc., especiales). 19. III.8 - Educación Matemática y Matemática Contemporánea. 20. IV.1 - Formación Inicial. 21. IV.2 - Formación y Actualización del Profesorado. 22. IV.3 - Práctica Profesional del Profesorado de Matemática. 23. V.1 - Matemática para la Vida. 24. V.2 - Juegos y Estrategias en Matemática. 25. V.3 - Historia de la Matemática y su Inclusión en el Aula. 26. V.4 - Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática. 27. V.5 - TIC y Matemática. 28. VI.1 - Cultura Matemática en la Escuela del siglo XXI. 29. VI.2 - Enseñanza Experimental de la Matemática. 30. VI.2 - Enseñanza Experimental de la Matemática. 31. VI.3 - Matemática Interniveles. 32. VI.4 - Estudios Comparativos Interregionales de Educación Matemática. 33. VII.1 - Relaciones entre Historia de la Matemática e Investigación en Educación Matemática. 34. VII.2 - Papel de la Teoría en la Investigación en Educación Matemática 35. VII.2 - Papel de la Teoría en la Investigación en Educación Matemática. 36. VIII.1 - Factores condicionantes del desarrollo de la Educación Matemática como Disciplina Científica. 37. VIII.2 - Comunidades de Práctica de la Educación Matemática en Iberoamérica.	

En la Tabla 3 se aprecia el aspecto teórico o conceptual al que habría de referirse la comunicación para poder considerar su posible aceptación en el respectivo evento; este criterio es el más directamente relacionable con ALIEM XXI.

Otros criterios para organizar las comunicaciones se refieren a las Modalidades de participación y al nivel educativo donde podría ser ubicado el trabajo del cual se deriva la comunicación a exponer.

6. Resultados

6.1. Visión General de los Cuatro Eventos

En general, las modalidades de participación en los cuatro eventos son similares; tanto la apertura como el cierre tienen carácter plenario; habitualmente, son la oportunidad para que un(a) educador(a) matemático(a) pronuncie una conferencia cuyo tema tenga carácter global de interés general para todos los participantes en el evento; entre ambos momentos tienen lugar una variedad de actividades; algunas de éstas son las siguientes: minicursos, talleres, conversatorios, y sesiones de trabajo de grupos específicos, y mediante ellas se pretende lograr, parafraseando los que Iglesias (2012) atribuye al COVEM, los siguientes propósitos: (a) dar difusión a las teorías propias de la Educación Matemática; (b) propiciar oportunidades para que los educadores matemáticos latinoamericanos puedan compartir las experiencias de producción científica en Educación Matemática que han llevado a cabo en sus respectivos países; (c) crear condiciones para el fortalecimiento de la investigación en este campo disciplinario; (d) crear vínculos académicos, profesionales y personales entre los miembros de las diferentes comunidades de educadores matemáticos representadas en el evento; y, (e) proyectar los conocimientos y saberes en ellas generados.

Por otro lado, las modalidades y niveles educativos considerados también son semejantes; sin embargo, conviene destacar el señalamiento explícito de la Educación Especial en la CIAEM.

Además se puede constatar que los temas a los cuales han de referirse las comunicaciones para poder ser consideradas como admisibles, presentan variedad en cuanto a ámbitos y especificidades; éste sí podría ser un aspecto distintivo entre los eventos, aunque se nota que el COVEM asumió los de la RELME, en este evento se enfatizan los temas que tienen que ver con: análisis del discurso matemático escolar; propuestas para la enseñanza de las matemáticas; aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar; el pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación inicial; y, uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas; en el CIBEM el contenido de las comunicaciones está agrupado en los siguientes Bloques Temáticos: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos; la Resolución de Problemas en Matemáticas; Aspectos socioculturales de la Educación Matemática; Formación del profesorado en Matemáticas; Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; Matemáticas y su integración con otras áreas; Investigación en Educación Matemática; Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica; y, Comunicación y divulgación matemática.

Por su parte, en la CIAEM las comunicaciones se han de referir a: Álgebra en Educación Matemática, Cálculo diferencial e integral en Educación Matemática, Competencias en Educación Matemática, Desarrollo curricular en matemáticas, Educación Matemática y necesidades especiales, Educación Matemática y relación con otras áreas de conocimiento, Educación Matemática en las primeras edades escolares (hasta grado 6), Estadística y Probabilidad en Educación Matemática, Etnomatemáticas y perspectivas socioculturales, Formación continua y desarrollo profesional en Educación Matemática, Formación de profesores de enseñanza primaria en Educación Matemática (grados 1 a 6), Formación de profesores de enseñanza secundaria en Educación Matemática (grados 7 a 12), Geometría en Educación Matemática, Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática, Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática, Investigación en Educación Matemática, Modelización en Educación Matemática, Nuevos enfoques y tendencias en Educación Matemática, Resolución de problemas, Sociología de la Educación Matemática, Uso de tecnologías basadas en la web en Educación Matemática, y Uso de tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

6.2. Análisis Comparativo Específico de los cuatro eventos

Como ya fue señalado, las temáticas tratadas en las comunicaciones, explícitamente indicadas en sus respetivos títulos fueron el criterio usado para vincularlos con las áreas temáticas y las líneas de ALIEM XXI; esto permitió identificar los asuntos de interés indagatorio considerados en cada uno de los eventos y compararlos entre si, a los fines de establecer cuáles eran comunes a los cuatro eventos y lo que eran de interés para tres, dos o sólo uno de ellos.

Los asuntos de interés indagatorio comunes a los cuatro eventos fueron los siguientes: (a) Estudio de Entidades Matemáticas Específicas; (b) Perspectivas socioculturales de la Educación Matemática (Etnomatemática, Socioepistemología, Educación Matemática Crítica); (c) Formación Inicial y continua de profesores que enseñan Matemática; (d) Modelización en Educación Matemática; (e) Resolución de Problemas; (f) Uso de las TIC´S en Educación Matemática; (g) Evaluación en Educación Matemática, Tabla 4.

Tabla 4

Asuntos de interés indagatorio comunes a los cuatro eventos

Asunto	CIAEM	RELME 27 / ALME 27	VII CIBEM	VIII COVEM
Entidad Matemática Específica	• Álgebra en Educación Matemática.	• Gráfica y funciones	• Educación Matemática y Matemática Contemporánea	• Funciones y gráficas
	• Cálculo diferencial e integral en Educación Matemática.	• Medición		• Medición
	• Estadística y Probabilidad en Educación Matemática	• Números racionales y proporcionalidad		• Proporcionalidad
	• Geometría en Educación			
Perspectivas socioculturales de la Educación Matemática	• Etnomatemáticas y perspectivas socioculturales. • Sociología de la Educación Matemática.	• Estudios socioculturales • Etnomatemáticas • Socioepistemología	• Educación Matemática e Inter (pluri, multi) culturalidad. • Educación Matemática en Contexto (Etnomatemática). • Educación Matemática y Participación Crítica en las Políticas Públicas. • Educación Matemática y Pertinencia Social de la Matemática Escolar. Cultura Matemática en la Escuela del siglo XXI.	• Etnomatemáticas • Educación Matemática crítica • Socioepistemología
Formación de Profesores	• Formación continua y desarrollo profesional en Educación Matemática. • Formación de profesores de enseñanza secundaria en Educación Matemática (grados 7 a 12). • Formación de profesores de enseñanza primaria en Educación Matemática (grados 1 a 6).	• Formación de profesores • El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación inicial	• Formación Inicial. • Formación y Actualización del Profesorado. Práctica Profesional del Profesorado de Matemática.	• Formación de docentes
Modelación	• Modelización en Educación Matemática	• Modelación matemática • Modelos matemáticos	• La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelización Matemática.	• Modelación matemática
Resolución de problemas	• Resolución de problemas	• Resolución de problemas	• La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelización Matemática. • La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático.	• Solución de problemas
TIC´S	• Uso de tecnologías basadas en la web en Educación Matemática • Uso de tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.	• Tecnología avanzada	• TIC y Matemática.	• Uso de Tecnologías
Evaluación	• Evaluación en Educación Matemática	• Evaluación en Educación Matemática	• Evaluación en Educación Matemática	• Evaluación en Educación Matemática

Los estudios que se refieren a entidades matemáticas específicas son aquellos que abordan un objeto o proceso matemático en particular, o consideran un área matemática en general; se aprecia que hay interés en prácticamente todos los ámbitos en los que convencionalmente se distribuye la Matemática (Álgebra, Cálculo, Geometría, y Estadística y Probabilidad).

En cuanto a las perspectivas socioculturales, hay un interés manifiesto por los aspectos sociológicos de la Educación Matemática los cuales son abarcados desde diferentes perspectivas, destacándose la Socioepistemología, la Etnomatemática y la Educación Matemática Crítica; entre los asuntos considerados cabe mencionar los siguientes: Inter (pluri, multi) culturalidad en Educación Matemática; Educación Matemática en Contexto; Participación crítica en las políticas públicas relativas a educación matemática; Cultura matemática en la escuela del Siglo XXI; y Pertinencia Social de la matemática escolar.

La formación de los docentes que enseñan Matemática es otro de los asuntos que convoca el interés indagatorio en todos los eventos; en este caso, se distinguen dos criterios; uno se refiere a la especificidad de la formación de acuerdo con el nivel educativo donde el futuro docente de matemática se ha de desempeñar (nivel primario, uno a seis años; y nivel secundario, siete a doce años); el otro criterio remite al segmento de la trayectoria de la formación, en la cual se consideran los siguientes: inicial (ocurre durante los estudios postsecundarios); periodo de prácticas (la fase culminante de la formación inicial); continua (que acontece después de concluida la formación inicial); en este segmento se consideran la siguientes modalidades: formación postgraduada y formación continua no necesariamente asociado con estudios de postgrado sino con la actualización permanente que corresponde al desarrollo profesional del profesor.

La Modelación o Modelización Matemática es otra de las temáticas comunes; se examinan modelos matemáticos de variados procesos, y también se la vincula con la resolución de problemas en diferentes ámbitos, tanto intra matemáticos como extra matemáticos.

La resolución de problemas, como "Corazón de la Matemática" que es (según Paul Halmos, 1980) convoca el interés indagatorio de los investigadores en Educación Matemática de las comunidades representadas en los cuatro eventos; se los hace intervenir en procesos de modelización matemática y, también, se les asume como vehículos importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en diferentes niveles y modalidades de los sistemas educativos iberoamericanos.

Otro de los temas comunes a los cuatro eventos es el relacionado con el uso de las TIC´S para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; aquí se incluyen trabajos relacionados con el diseño de experiencias didácticas mediadas tecnológicamente; la aplicación de software de Geometría Dinámica o de Cálculo Simbólico; el desarrollo de entornos virtuales de aprendizaje, y muchos otros aspectos que asumen la mediación tecnológica como contexto para el desarrollo de procesos de formación en matemática.

Otro asunto que convoca el interés indagatorio de los miembros de las diversas comunidades de educadores matemáticos asistentes a estos cuatro eventos es la evaluación en Educación Matemática; así, por ejemplo, en el COVEM hubo interés manifiesto en torno de los siguientes aspectos: la dinámica del aula de Matemática durante las actividades evaluativas, desarrollo de estrategias alternativas de evaluación de la formación matemática de futuros ingenieros,

el uso de recursos de base cognitiva (v.g. mapas mentales) para evaluar el aprendizaje matemático, y los aspectos éticos de la actividad evaluativa.
En la CIAEM el interés estuvo centrado en el papel que desempeña la evaluación continua en las clases de Matemática y en el tratamiento dado a los contenidos de Geometría en los exámenes aplicados para evaluar el aprendizaje de la Matemática en estudiantes de educación secundaria.
En el CIBEM, los trabajos vinculados con la evaluación se refirieron a: el uso de los juegos como medio evaluativo, la viabilidad de la evaluación por pares, la evaluación mediante la resolución de problemas, la autorreflexión y la autocrítica en procesos de resolución de problemas como estrategia de evaluación formativa, la evaluación formativa desde una perspectiva lúdico-didáctica, implementación de un sistema de información como medio para la evaluación de aprendizajes en Estadística Descriptiva, y evaluación de impacto de programas informáticos implementados para la enseñanza de la Matemática.
En la RELME fueron reportadas algunas experiencias innovadoras en evaluación; se hizo referencia a la implementación de un instrumento de evaluación; a la evaluación por rúbricas; se implementaron modalidades alternativas de evaluación tales como: la evaluación en parejas, la evaluación en línea, y las autoevaluaciones virtuales; también fueron evaluadas las estrategias puestas en juego por los estudiantes al resolver problemas que involucran el uso de operaciones con números racionales, y la implementación de sistemas novedosos de evaluación en ciertas áreas matemáticas específicas como lo es el Cálculo; así mismo aparecen trabajos relativos a la evaluación de la idoneidad de recursos didácticos en el área de matemática; se mantienen trabajos relacionados con la evaluación diagnóstica de los estudiantes ingresantes a la educación superior, así como también sobre la situación de los alumnos re-cursantes o repitientes; comienzan a emerger los estudios relacionados con la evaluación de competencias.

6.3. Comentario

Uno de los rasgos distintivos de las áreas temáticas propuestas en ALIEM XXI es su generalidad; las mismas se refieren a aspectos de nivel macro tales como la caracterización de los contextos de producción de la formación matemática de las personas (Área Temática 1); el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en función de los niveles y modalidades de los sistemas educativos nacionales, atendiendo aspectos cognitivos y afectivos tanto de los estudiantes como de los docentes (Área Temática 2); las prácticas que los profesores ponen en juego en sus aulas de clase (Área Temática 3); la formación inicial y permanente, así como el desarrollo profesional de los profesores que enseñan Matemática (Área Temática 4); y, finalmente, las prácticas mediante las cuales se gestiona la evaluación del aprendizaje de la Matemática (Área Temática 5).

En contraste con este carácter genérico de la Agenda, se aprecia entre los miembros de las comunidades de investigadores en Educación Matemática representadas en los cuatro eventos, interés por abordar indagatoriamente entidades matemáticas específicas tanto de carácter algebraico o geométrico, como también pertenecientes al ámbito del cálculo, la estadística o la probabilidad. Se atiende así a la inquietud formulada por Heid (2010): "*Dónde está la Matemática (en la Investigación en Educación Matemática*"[5] en cuanto a la necesidad de prestar atención explícitamente al contenido matemático en las investigaciones en Educación Matemática.

Otra tendencia importante, ostensiblemente apreciable en las comunicaciones expuestas en los escenarios gestados por los responsables de la puesta en escena de los eventos examinados, es la consideración de los aspectos socioculturales de la Educación Matemática acerca de lo cual Michelle Artigue opina que: "*para este enfoque, el objeto de base no es el sujeto que aprende ni la situación didáctica, sino la institución en la que están insertos. Los saberes no existen sino como emergentes de prácticas situadas institucionalmente*" (Artigue, 2004, p. 9).

Se aprecia que las perspectivas teóricas, que enfatizan lo sociocultural, de mayor incidencia en la región son la Etnomatemática y la Socioepistemología, y en menor medida la Educación Matemática Crítica y la Teoría Antropológica de lo Didáctico; como ejemplo de lo anterior pueden exhibirse los trabajos de:

Ana Patricia Vásquez Hernández (*Etnomatemática: eje central de la recuperación de saberes matemáticos. Experiencia de américa latina y retos para Costa Rica*, ALME 27, p. 1501);

Ricardo Cantoral, Daniela Reyes-Gasperini (*Socioepistemología y matemáticas: del aula extendida a la sociedad del conocimiento. "Todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar*", ALME 27, p. 1573).

Los pormenores de la formación y el desarrollo profesional de los profesores que enseñan Matemática es otro de los asuntos indagados recurrentemente; es así como, frecuentemente, son dados a conocer los resultados de pesquisas relativas a las diferentes etapas del proceso de socioprofesionalización del profesor de Matemática, considerando múltiples aspectos de su formación y desarrollo.

Los estudios sobre Modelación (o Modelización) también son cada vez más frecuentes.

Los problemas, considerados por Halmos (1980), como el "corazón de la Matemática" son un asunto de indagación permanente y se les examina desde una gran variedad de perspectivas, tal como lo evidencian, entre otros, los siguientes trabajos:

[5] *Where's the Math (in Mathematics Education Research)?* (Heid, 2010).

Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez (*Estudio de la primera representación en la resolución de problemas*, ALME 27, p. 263); Sonia Bibiana Benítez, Lidia María Benítez (*La enseñanza a través de la resolución de problemas: una experiencia de clase*, ALME 27, p. 1205).
Como consecuencia de que, según Castells (2001), el escenario sociotecnológico en el que se vive actualmente es "la era de la información y, por primera vez en la historia es la comunicación instantánea de muchos a muchos. Ha penetrado ya profundamente nuestra forma de trabajar, de informarnos, de relacionarnos, de aprender y de vivir", son abundantes los trabajos acerca de las TIC´S en Educación Matemática.
Con los aspectos antes mencionados, son cubiertos los siguientes temas de ALIEM XXI: Área Temática 1: (2) (Estudios de Sociología de la Educación Matemática); (3) (Estudios de Etnomatemática); (7) (Estudio de los aspectos socioculturales de la Educación Matemática); y (9) (Estudios acerca del impacto de las nuevas tecnologías sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática); Área Temática 3: (1) (Estudios acerca de la Práctica Profesional del Profesor de Matemática); Área Temática 4: (1) (Estudios acerca del desarrollo profesional del profesor de Matemática; ¿qué debe saber y saber hacer un profesor de Matemática para el próximo milenio?); en este último caso, la especificidad de las interrogantes formuladas en ALIEM XXI, aún se requiere mucho más indagación en relación con esta temática; y, Área Temática 5: (1) Modos alternativos de evaluación, y (2) Evaluación de textos y otros materiales instruccionales.
Los asuntos de interés indagatorio comunes a tres eventos fueron los siguientes: (a) Pensamiento Matemático en diversas áreas (algebraico, geométrico, numérico, variacional, probabilístico y estadístico) y modalidades (lógico, matemático avanzado) (CIAEM, CIBEM, COVEM); (b) Dominio Afectivo en Educación Matemática (RELME, CIBEM, COVEM); (c) Procesos Psicológicos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (metacognición y modelos mentales) (RELME, CIBEM, COVEM); (d) Aspectos Lingüísticos y comunicacionales de la educación matemática (RELME, Discurso Escolar; CIBEM, COVEM); (e) Materiales y Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (RELME, CIBEM, COVEM); (f) Historia y epistemología de la Educación Matemática (CIAEM, CIBEM, COVEM); (g) Procesos de Enseñanza y aprendizaje de la matemática relativos al nivel educativo (CIAEM, RELME, CIBEM); (h) Desarrollo Curricular (CIAEM, RELME, COVEM); (i) Educación Matemática y Necesidades Educativas Especiales (CIAEM, CIBEM, COVEM), Tabla 5.

Tabla 5
Asuntos de interés indagatorio comunes a tres eventos

Asunto de Interés	CIAEM	RELME27 ALME 27	VII CIBEM	VIII COVEM
Pensamiento Algebraico		x	x	x
Pensamiento Numérico		x		
Pensamiento Geométrico		x	x	x
Pensamiento Aritmético				x
Pensamiento Lógico		x		x
Pensamiento Matemático Avanzado		x	x	x
Pensamiento relacionado con probabilidad y estadística		x	x	x
Pensamiento Variacional		x		x
Factores afectivos		x	x	x
Creencias y Actitudes				x
Metacognición		x		x
Modelos Mentales		x		x
Procesos Psicológicos implicados en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática.			x	
Lenguaje matemático		x		x
Formación del lenguaje y el pensamiento matemático	x	x		x
Análisis del discurso matemático escolar	x	x	x	
Los procesos de Comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el Aprendizaje del Alumnado.	x		x	x
Propuestas para la Enseñanza de las Matemáticas	x	x		x
Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática.	x	x	x	
Enseñanza Experimental de la Matemática.	x		x	x
Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas	x	x	x	
Enseñanza por proyectos	x		x	x
Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática.	x	x		x
Educación Matemática e Historia de la Matemática.	x	x	x	
Historia de la Matemática y su Inclusión en el Aula.	x	x	x	
Relaciones entre Historia de la Matemática e Investigación en Educación Matemática.	x	x	x	
Factores condicionantes del desarrollo de la Educación Matemática como Disciplina Científica.	x		x	x
Educación Matemática en las primeras edades escolares (hasta grado 6).	x	x	x	
Educación de adultos	x	x	x	
Matemática Interniveles.	x	x	x	
Desarrollo curricular en matemáticas.	x		x	x
Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar	x	x	x	
Lúdica Matemática	x	x	x	x
Educación Matemática y necesidades educativas especiales.	x	x	x	

Continúa

Tabla 5

Asuntos de interés indagatorio comunes a tres eventos (Continuación)

Asunto de Interés	CIAEM	RELME27 ALME 27	VII CIBEM	VIII COVEM
Matemática para alumnado con Necesidades Educativas Especiales.	x	x	x	x
Educación Matemática y Diversidad (Cultural, Lingüística, de Género, etc.).	x		x	
Educación Matemática y Diversidad Funcional (condiciones visuales, auditivas, motrices, etc., especiales).	x		x	x
Desarrollo de talentos en matemática	x		x	x
Diversidad funcional	x	x		x

El Pensamiento Matemático es considerado en sus diversas áreas (algebraico, geométrico, numérico, variacional, probabilístico y estadístico) y modalidades (lógico, matemático avanzado) en la CIAEM, el CIBEM, y el COVEM).

Complementarios con los estudios acerca del Pensamiento Matemático, también hay interés por los aspectos afectivos, tanto del alumnado como del profesorado; en tal sentido, en RELME, CIBEM, y COVEM, han sido presentados trabajos que abordan prácticamente todas las facetas del dominio afectivo (Martínez, 2005; Martínez, Villegas, & González, 2007); es relevante el trabajo de Maroto, Marbán, Palacios e Hidalgo (2015), quienes desarrollaron una escala multidimensional para estudiar el dominio afectivo en Matemáticas.

En RELME, CIBEM y COVEM, ha habido interés manifiesto por la cognición humana en general, y la cognición matemática en particular; de ello dan cuenta los estudios referidos a los procesos psicológicos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, tales como el papel que desempeña la metacognición en la formación de profesores (Carione & Martínez, 2015) y cómo este proceso cognitivo de orden superior puede ser desarrollado mediante la resolución de problemas matemáticos (Vesga Bravo, Roa Poveda, & Pinilla Alvarado, 2015).

En los mismos tres eventos referidos en el párrafo anterior, se evidencia el interés por “los procesos de comunicación en el aula de matemática”, asociándolos con cuestiones relacionadas con el lenguaje natural y con el lenguaje matemático, los cuales vinculan con el Discurso Matemático Escolar (cuestión ésta de notable presencia en la RELME) y la formación y desarrollo del pensamiento matemático.

Como es de esperar, abundan las indagaciones relacionadas con materiales y recursos para la enseñanza y aprendizaje de la matemática; se puede afirmar que en RELME, CIBEM y COVEM han sido expuestas una gran cantidad de propuestas para dinamizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, entre los que se destacan los que plantean una “enseñanza experimental de la Matemática”, el “uso de recursos tecnológicos”, y la “enseñanza por proyectos”.

Los estudios sobre historia de la Matemática y de la Educación Matemática han sido asumidos explícitamente por CIAEM, CIBEM y COVEM; en la RELME, tales indagaciones aparecen vinculadas con los análisis históricos propios del abordaje socioepistemológico de las entidades matemáticas específicas de las que se ocupan los investigadores que suscriben esta perspectiva teórica; entre los estudios ubicados en este ámbito se destacan los que examinan la relación entre Historia de la Matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, considerando su inclusión en el aula de clases; así como también aquellos que intentan develar los factores condicionantes en el desarrollo de la Educación Matemática como disciplina científica.

Los estudios que examinan procesos de Enseñanza y aprendizaje de la matemática tomando en cuenta el nivel y la modalidad educativa se presentan en la CIAEM, la RELME, y el CIBEM; consisten en indagaciones que toman en cuenta la especificidad que adquiere la Matemática Escolar según el nivel educativo y la modalidad en la cual estén participando los discentes; así, se examinan los pormenores de la educación matemática de acuerdo con la edad de los estudiantes a quienes está dirigida, como por ejemplo los de los primeros grados escolares (1º a 6º), o con la modalidad de la cual se trate, tal como ocurre con los estudiantes en extraedad (quienes cursan un grado escolar menor al que deberían estar cursando según su edad cronológica) o estudiantes adultos.; aquí también se ubican los estudiantes que examinan la enseñanza de la Matemática en los grados que marcan el tránsito de un nivel a otro.

Los asuntos relacionados con el Desarrollo Curricular se hacen explícitos en CIAEM, RELME, y COVEM; el interés se orienta hacia el estudio de cuestiones tales como: las competencias generales y específicas que han de desarrollar los profesores que enseñan Matemática; los procesos transicionales entre niveles educativos, por ejemplo de la educación secundaria a la educación universitaria; orientaciones curriculares nacionales para la enseñanza de áreas matemáticas específicas; proposición de currículos contextualizados apoyados en estudios socioculturales; análisis comparativos de modelos curriculares para la formación de profesores; retos que han de superar los docentes en algunos países para enfrentar las transformación curricular propuestas por las autoridades gubernamentales de sus respectivos países; y, las modificaciones en los procesos de formación docentes generadas a partir de las transformaciones curriculares, entre muchos otros temas.

Entre los aspectos de interés indagatorio comunes a tres eventos destaca el de la Ludomática, es decir, los aspectos lúdicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática; caso ilustrativos son el de Lopes (2015) quien rescata un juego tradicional para utilizarlo en el aprendizaje de conceptos asociados con la probabilidad; y el de Gonzáles Prado (2014), quien utilizó la lúdica matemática para propiciar el aprendizaje de nociones algebraicas a partir de conceptos geométricos.

Finalmente, es común a tres de los eventos, el asunto de las Necesidades Educativas Especiales (NEE) en la Educación Matemática; entre estos se incluyen los que tienen que ver con Diversidad debida a factores sociales (cultural, lingüística, de género, entre otras) así como con la Diversidad Funcional, asociada con condiciones personales particulares (condiciones físicas, o de otra naturaleza, que inciden sobre la visión, la audición, o la motricidad); estos estudiantes, tal como lo señala de Oliveira (2013). "*necesitan vivenciar procesos diferenciados de enseñanza y aprendizaje de la matemática*" (p. 719); en general, estos estudios se enmarcan en el contexto de la *Educación Inclusiva,* es decir, una que reconoce y valora las diferencias derivadas de la singularidad específica de cada persona, individualmente considerada, o de grupos de personas, atendiendo a sus particularidades idiosincrásicas derivadas de sus específicas condiciones socioculturales (Alsina & Planas, 2008); diversos trabajos se orientan hacia el desenvolvimiento de estrategias para enseñar contenidos matemáticos a alumnos que presentan discapacidades específicas tales como ceguera o baja visión (Martínez Perrone, 2013); esta *discapacidad* también fue abordada, pero desde la perspectiva de los profesores, por Moura y Lins (2013), cuyo propósito principal fue "*identificar estrategias didácticas utilizadas por los profesores de Matemática para trabajar con alumnos deficientes visuales*" (p. 2175); por su parte, Mántica, Götte, y Dal Maso (2014), trabajaron con estudiantes para profesor de Matemática que asumirían la responsabilidad de enseñar esta disciplina a estudiantes ciegos integrados en aulas regulares

Otro asunto investigado en el marco de las NEE fue el relacionado con las dificultades que se presentan para enseñar Matemática a personas que tienen limitaciones auditivas; tal es el caso del estudio llevado a cabo por Costa, Sales y Mascarenhas, (2013), quienes se interesaron en identificar "*las dificultades que los discentes sordos están confrontando en el aprendizaje de la matemática y analizar las prácticas de los profesores de matemática que están atendiendo a esos alumnos en las escuelas"* (p. 2192); con las dificultades para aprender Matemática que tienen los alumnos sordos también trabajaron Silva, Corrêa, Xavier, & Colares (2013).

En la XIV CIAEM (Chiapas, Mx; 2015), hubo una notable presencia de indagaciones referidas a la educación matemática de personas con necesidades educativas especiales, tales como sordos, ciegos, deficientes visuales o con alguna condición específica (Síndrome de Jacobsen; Fernández González, Prieto Espuñes, Ibáñez Fernández, Fernández Colomer, López Sastre, & Fernández Toral, 2006); los estudios abordaron, entre otros asuntos, los siguientes: (a) el desarrollo de estrategias didácticas para propiciar el aprendizaje de la Matemática de personas con una discapacidad específica; en el caso de las personas sordas, se desarrollaron talleres, se realizó la lectura e interpretación de textos de Matemática; se examinaron juegos de lenguaje matemático; se realizó una ingeniería didáctica de las operaciones con fracciones); en relación con estudiantes ciegos, se efectuaron adaptaciones de materiales didácticos, y se implementaron estrategias para la enseñanza de la Geometría); (b) la formación de profesores que han de enseñar matemática a personas con NEE; (c) el examen de las condiciones que deben darse en las aulas para garantizar una educación matemática de calidad para todas las personas; y, (d) el examen de la producción científica en matemática educativa para la educación especial. La amplitud y calidad de estos trabajos es un indicio del creciente interés que han estado manifestando los investigadores de la Matemática Educativa de nuestra región hacia la Educación Matemática Especialmente Inclusiva (Martínez & González, 2015).

Resalta el interés en el estudio del pensamiento matemático en sus diversas áreas (algebraico, geométrico, numérico, variacional, probabilístico, estadístico) y modalidades (lógico, avanzado), así como también en los procesos psicológicos implicados en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, particularmente, la metacognición. Pero no es solo el dominio cognitivo el que convoca el interés indagatorio de los investigadores latinoamericanos en Educación Matemática; también son atraídos por los pormenores del dominio afectivo y sus incidencias sobre el desempeño tanto de estudiantes como de profesores, enfatizando lo relativo a sus actitudes y creencias y, en menor medida, sus emociones, con lo cual pudiera pensarse que se requiere más indagación en cuanto a Matemática Emocional (Gómez Chacón, 2000).

Los aspectos lingüísticos y comunicacionales de lo que acontece en el aula de clases de Matemática, así como su incidencia sobre la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, también son examinados con frecuencia; prestándose especial atención a las características del Discurso Matemático Escolar y a las relaciones entre lenguaje matemático y pensamiento matemático.

Como es de esperar, son abundantes los trabajos relacionados con propuestas didácticas y el desarrollo de materiales y recursos para ser implementados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, tanto con el uso de las TIC´S como sin ellas; no obstante, dadas las potencialidades de los software, se reportan resultados de numerosos estudios relativos al impacto del uso de dispositivos tecnológicos sobre el aprendizaje de la matemática, enmarcados en el contexto de la enseñanza por proyectos y de la enseñanza experimental de la Matemática.

Como indicio de su fortaleza como campo disciplinario se destacan los estudios sobre la Historia de la Educación Matemática a los fines de develar los factores condicionantes de su desarrollo como disciplina científica, para lo cual se examinan entre otros, asuntos tales como las relaciones entre Historia de la matemática y Educación Matemática; Historia de la Matemática e Investigación en Educación Matemática, y las incidencias de la inclusión de la Historia de la Matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Los aspectos relativos al currículo de Matemática son examinados tanto a nivel mezzo (planes de estudio) como micro (pormenores de lo que ocurre en las aulas de clase en correspondencia con los niveles educativos).
Un asunto que emerge con cada vez más fuerza es el relativo a la formación matemática de personas con Necesidades Educativas Especiales, no sólo de aquellos que presentan alguna discapacidad, sino de quienes son talentosos para la Matemática, o se encuentran en situación de vulnerabilidad social, o se encuentran inmersos en contextos socioculturales que le son ajenos (desplazados, inmigrantes).
Los trabajos antes referidos abordan los siguientes aspectos de ALIEM XXI: Área Temática 1: (4), (6), (8); Área Temática 2: (1), (2), y (3); Área Temática 3: (2).
Entre las temáticas que, explícitamente, fueron identificadas en dos de los eventos, está la que tiene que ver con los estudios comparativos interregionales; los cuales aparecen explícitamente en la CIAEM y en el CIBEM; a continuación se hará referencia a varios de los trabajos presentados en el primero de los dos eventos nombrados.
El trabajo de Tatto (2015), toma en cuenta los resultados del *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M), encargado por la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement,* IEA, para hacer referencia al conocimiento matemático necesario para enseñar matemática a nivel secundario; el TEDS-M es un estudio de carácter internacional, en el cual la formación de docentes de matemática para la educación secundaria fue comparada con la de los profesores de educación primaria y en el cual se examinó cómo diferentes países (Botswana, Canada, Chile, Chinese Taipei, Georgia, Germany, Malaysia, Norway, Oman, Philippines, Poland, Russian Federation, Singapore, Spain, Switzerland (German-speaking cantons), Thailand, and United States) han preparado a sus profesores para enseñar matemática en primaria y en los primeros años de la educación secundaria. El TEDS-M permitió evidenciar la considerable variación que existe entre estos países en cuanto al aseguramiento de la calidad, los requerimientos para ingresar al sistema, la extensión de los programas; además, se apreciaron diferencias en cuanto a las oportunidades que los programas de formación inicial de profesores de Matemática ofrecen para que estos aprendan tanto Matemática como Didáctica de la Matemática. Otras diferencias notables se refieren los tipos y la organización que tienen los programas de formación docente en Matemática. En el TEDS-M, Chile fue el único país latinoamericano participante.
Otros estudios comparativos, referidos a países latinoamericanos, que fueron presentados en la CIAEM; se llevaron a cabo comparaciones entre los currículos prescritos para la enseñanza de la matemática en la educación básica en Brasil y Argentina cuando ocurrieron reformas en estos países durante la década de 1990; también fue expuesta una comparación, en cuanto

a enseñanza y aprendizaje del álgebra y análisis, entre los sistemas educativos de Chile y Francia.

Entre los estudios comparativos más interesantes que fueron presentados en la XIV CIAEM puede mencionarse el de Gonçalves y Pires (2015) quienes expusieron los resultados preliminares de un estudio que pretende caracterizar los sistemas de enseñanza en algunos países latinoamericanos (Argentina, Brasil, Chile, Paraguay y Uruguay), en función de la organización curricular de la Matemática en la enseñanza media, con el fin de identificar el impacto que sobre el currículo han tenido las perspectivas teóricas de la Educación Matemática que circulan en la región.

Otro trabajo que merece ser destacado en la comparación realizada por Nunes, Aguiar y Elliot (2015) entre México y Brasil en cuanto a los resultados del desempeño en Matemática de sus respectivos estudiantes tomando como referencia los resultados de las pruebas PISA 2003–2012.

Entre los trabajos comparativos expuestos en el CIBEM destaca el de Pires (2013) quien presentó resultados parciales de un estudio mayor denominado "*Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de Educação Matemática, em países da América Latina*" (Argentina, Brasil, Chile, Paraguay, Perú, Uruguay, y Venezuela); además fue presentado un trabajo sobre la incidencia de la Educación Matemática en los currículos de Matemática de Brasil y Chile; y un análisis comparativo del desempeño en matemáticas y la producción de los indicadores educativos IDEB (índice de desarrollo de la educación básica, Brasil) y PED (pruebas de evaluación diagnóstica, España).

Otros asuntos de interés indagatorio comunes a dos eventos fueron: Matemática para la Vida, Modalidades de Aprendizaje e Investigación en Educación Matemática; la escasa presencia de estas temáticas pudiera estar indicando algún grado de saturación en relación con cuestiones tales como: (a) la necesidad de vincular el aprendizaje matemático con la capacitación para el trabajo; (b) la socialización en el proceso de adquisición de conocimiento matemático tales como la que se genera cuando se ponen en juego prácticas asociadas con el aprendizaje cooperativo; y, (d) el reconocimiento del papel que desempeña la teoría en los procesos de Investigación en Educación Matemática. En alguna medida, estos trabajos pudieran relacionarse con los aspectos (5) y (6) del Área Temática 1 de ALIEM XXI.

Asuntos de interés indagatorio que aparecen en sólo uno de los eventos se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6.
Asuntos de interés indagatorio presentes en un evento

CIAEM	RELME 27 / ALME 27	VII CIBEM	VIII COVEM
	1. Modalidad Educativa: Educación a distancia 2. Modalidad Educativa: Educación continua		
		1. VIII.2 - Comunidades de Práctica de la Educación Matemática en Iberoamérica.	
1. Competencias en Educación Matemática.			
2. Educación Matemática y relación con otras áreas de conocimiento.			
3. Investigación en Educación Matemática.		2. VII.2 - Papel de la Teoría en la Investigación en Educación Matemática	
4. Nuevos enfoques y tendencias en Educación Matemática.			

Asuntos que aparecen en solo uno de los eventos y que pudieran ser indicios de tendencias emergentes son los que se refieren a: estudios comparativos regionales, la constitución de comunidades de práctica en Educación Matemática, y el estudio de las competencias en Educación Matemática. Resalta como una cuestión interesante que comienza a ser considerada, el examen de los nuevos enfoques y tendencias en Educación Matemática.
Con estos trabajos se atienden los siguientes aspectos de ALIEM XXI: Área Temática 1: (1).

6.4. Comentario Global

Los estudios históricos han sido asumidos explícitamente por CIAEM, CIBEM y COVEM; en la RELME, tales indagaciones aparecen vinculadas con los análisis históricos y epistemológicos, propios de la Socioepistemología (Cantoral, 2001) de las entidades matemáticas específicas de las que se ocupan los investigadores que suscriben esta perspectiva; entre los estudios ubicados en este ámbito se destacan los que examinan la relación entre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática e Historia de la Matemática, considerando su inclusión en el aula, así como también aquellos que intentan develar los factores condicionantes del desarrollo de la Educación Matemática como disciplina científica.
Otra clase de indagaciones que comienzan a tener visibilidad en los eventos analizados son los estudios comparativos entre países, entre los que destacan aquellos que examinan el currículo para la enseñanza de la Matemática en diferentes países latinoamericanos.
También son dignos de mencionar los que asumen como su asunto de interés indagatorio la formación matemática de personas con necesidades educativas especiales (NEE); estos estudios aparecen en mayor número en la XIV CIAEM, el evento interamericano más recientemente realizados (Chiapas, Mx; mayo de 2015); esto podría estar indicando que este asunto de la "*Educación*

Matemática Especialmente Inclusiva" (Martínez, 2015) esté siendo objeto de atención de un número cada vez mayor de investigadores latinoamericanos en Educación Matemática; los trabajos se refieren, fundamentalmente, a: lectura e interpretación de textos matemáticos para estudiantes sordos; la adaptación de materiales instruccionales para personas con deficiencia visual, la formación de los profesores que enseñan Matemática en el contexto de la denominada Educación Especial, las barreras actitudinales constatables en las aulas con presencia de estudiantes que presentan Necesidades Educativas Especiales, la enseñanza de conceptos geométricos a personas con deficiencia visual, entre otros.

En cuanto a los rasgos de un futuro posible y deseable para la Educación Matemática en América Latina concebidos en ALIEM XXI como características de la comunidad latinoamericana de educadores matemáticos, se pudo constatar que aún han de realizarse esfuerzos para logar un mayor grado de *integración entre los miembros de las diversas comunidades nacionales;* sin embargo, se logró constituir la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), una organización que promueva la unidad de las asociaciones vinculadas con la Educación Matemática en nuestros países; además, aún es necesario alcanzar una *mayor divulgación de su producción*; así que sería bueno editar alguna publicación de circulación continental a la que tenga acceso la mayoría de la población, sobre todo la menos favorecida económicamente. También, existen *grupos y equipos de trabajo multinacionales* apoyados en redes como lo son la Red Latinoamericana de Etnomatemática (RELAET) "cuyo origen fue la *Red de Estudios Colombianos de Etnomatemática*, que se constituyó en el Tercer Congreso de Etnoeducación, realizado en Bogotá en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en los días 2 al 7 de Junio de 2003; el cambio de nombre de la Red de Estudios Colombianos de Etnomatemática a *Red Latinoamericana de Etnomatemática* se produjo a raíz de que los miembros adscritos a la red y los que visitan la página, en su mayoría, son latinoamericanos interesados en el estudio de la Etnomatemática" (ver: http://www.etnomatematica.org/home/?page_id=27); y la *Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe*, (REDUMATE), "la cual se fundó durante la realización de la *Escuela seminario internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática*, celebrada entre el 6 y 17 de agosto del 2012 en San José, Costa Rica" (Ver: http://www.centroedumatematica.com/redregional/?q=node/106).

Siguen pendientes las siguientes tareas:

1. Avanzar hacia la creación de un escenario global regional propio que permita *consolidar una perspectiva disciplinaria con identidad específica* que sea capaz de ejercer un protagonismo semejante al que hoy mantienen comunidades de otras latitudes.

2. Establecer *Acuerdos de cooperación y ayuda mutua entre la CIAEM, la CIBEM y el CLAME.*
3. Desarrollar un *Programa Regional de Formación de Recursos Humanos de Alto Nivel*, con competencia para diseñar, dirigir, ejecutar, promover y evaluar investigaciones en Educación Matemática.
4. *Vincular los programas de postgrado en Educación Matemática*.
5. *Desarrollar un programa doctoral que permita formar un importante grupo de doctores con representantes de cada uno de nuestros países*.

Referencias

Alsina, A., & Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva: propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea.

Ardila, R. (2003). El Papel de la investigación científica en Psicología. Disponible en: http://www.rubenardila.com/EL%20PAPEL%20DE%20LA%20INVESTIGACIÓN%20CIENTÍFICA%20EN%20PSICOLOGÍA.pdf

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática, 16*(3), 5–28.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2008) ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad?, *Relime, 11*(1), 5–8. Disponible en http://www.clame.org.mx/relime.htm

Carione, N. H., & Martínez, M. Á. (2015). Herramientas de metacognición en la formación de un docente competente para enseñar a los estudiantes del Siglo XXI. *Comunicación expuesta en XIV CIAEM-IACME*; Chiapas, Mx; 3-7 de mayo de 2015. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/544/248

Castells, M. (2001). La Galaxia Internet: reflexiones sobre Internet, empresa y sociedad. Barcelona, España: Plaza & Janes.

Cortes, G. R. de O. (2012). *Prácticas socio-retóricas do artigo científico de História e Sociología. Variaçao, Identidade e Ethos Disciplinar*. Recife, BR: Ed. Universitaria/UFPE

Costa, W. C. L. da, & Sales, E. R. de, & Mascarenhas, R. C. de S. (2013). As dificuldades no ensino de matemática para alunos surdos segundo discentes e docentes. *Actas del VII CIBEM* (pp. 2192–2199). Disponible en: http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/679.pdf

Fernández González, N., Prieto Espuñes, S., Ibáñez Fernández, A., Fernández Colomer, J., López Sastre, J., & Fernández Toral, J. (2006). Deleción terminal del 11q (síndrome de Jacobsen) asociada a atresia duodenal con páncreas anular. *Anales de Pediatría, 65*(3)*,* 249–252. Disponible en: http://www.analesdepediatria.org/es/delecion-terminal-del-11q-sindrome/articulo/13035405/.

García Leal, L. (2005). El desarrollo de la Investigación Científica en el ámbito de lo jurídico. *Frónesis,* Caracas, *12*(2), 109–114. Disponible en http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1315-62682005000200007&lng=es&nrm=iso

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Gonçalves, H. J. L., & Pires, C. M. C. (2015). Organização Curricular de Matemática no Ensino Médio de Países Latino-Americanos: Resultados Comparativos Preliminares. XIV CIAEM-IACME; Chiapas, Mx, 3–7 de mayo de 2015. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/579/263

Gonzales Prado, N. (2014). Una forma de aprender expresiones algebraicas manejando conceptos de áreas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27* (ALME 27) (pp. 1259–1264). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Disponible en: http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

González, F. (1995). La Investigación en Educación Matemática: una revisión interesada. En González, F. (Ed.), *La Investigación en Educación Matemática* (pp. 1–42). Maracay: Ediciones COPIHER.

González, F. (2000). Agenda latino-americana de investigación en educación matemática para el siglo XXI. *Revista Educación Matemática*, *12*(1), 107–128.

González, F. (2005). Uso del Enfoque Pentadimensional en el Análisis Interno de productos escritos de investigación. *Educaçâo em Questâo* (Revista de la UFRN), *23*(9), 7–15.

González, F. (2014). VENEZUELA: Signs for the Historical Reconstruction of Its Mathematics Education. En Héctor Rosario, Patrick Scott, Bruce Vogeli (Eds.). *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas.* NY: Teachers College of Columbia University. Series on Mathematics Education: Volume 10.

Heid, M. K. (2010). Editorial: Where's the Math (in Mathematics Education Research)?. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 102–103.

Iglesias, M. (2012). COVEM: vitrina de la investigación en Educación Matemática en Venezuela. *AsoVEMat_JDN: Boletín Informativo de la Junta Directiva Nacional de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, 3*(1), 6–7. Disponible en: http://www.uneg.edu.ve/intranet/saw/ssv/documentos/informador/201205006.pdf

Kilpatrick, J. (1992) A History of Research in Mathematics Education. En Grouws, D. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3–38). New York: Simon & Schuster Macmillan (Existe una edición en español, incluido como primer capítulo del texto Kilpatrick, Gómez, Rico (Eds.) (1998). Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf

Kilpatrick, J. (1998). La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, Jeremy; Gómez, Pedro; Rico, Luis (Eds.) (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación* (pp. 1–18). *Historia.* Bogotá: una empresa docente. Disponible en:
http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf

Lopes, J. M. (2015). O trabalho com conceitos de contagem e de probabilidade através de um jogo de dominós. *Comunicación expuesta en XIV CIAEM-IACME*; Chiapas, Mx; 3–7 de mayo de 2015. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/144/100.

Mántica, A. M., Götte, M., & Dal Maso, M. (2014). La enseñanza de la matemática a alumnos ciegos y disminuidos visuales. El relato de una experiencia. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27* (ALME 27) (pp. 1023–1030). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Disponible en: http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

Maroto Sáez, A., Marbán Prieto, J. M., Palacios Picos, A., & Hidalgo Alonso, S. (2015). Diseño de una escala multidimensional para el estudio del dominio afectivo emocional en matemáticas. XIV CIAEM-IACME; Chiapas, Mx; 3–7 de mayo de 2015. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/438/202

Martínez Padrón, O. (2005). Dominio Afectivo en Educación Matemática. *Paradigma, XXVI* (2), 7–34.

Martínez Padrón, O. (2007). Semblanzas de la línea de investigación: Dominio afectivo en Educación Matemática. *Paradigma, XXVIII*(1), 237–252. Disponible en: http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v28n1/art12.pdf

Martínez Padrón, O., Villegas, M., & González, F. (2007). *Afecto y comprensión en la resolución de problemas*. Ponencia presentada en RELME 21, Universidad del Zulia, Maracaibo.

Martínez Perrone, L. (2013). Estrategias para enseñar contenidos matemáticos a alumnos ciegos o con baja visión. *Actas del VII CIBEM*, 726–730. Disponible en: http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1375.pdf

Martínez, A. M. (2015). *Caracterización Teórico Conceptual de la Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI)*. Proyecto de Investigación libre no publicado. Maracay, Venezuela. Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertado (Maracay) (Tutor: Fredy González)

Matos, J. M., & Valente, W. R. (Eds.) (2010). A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos. Lisboa, Pt.: Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Campus de Caparica; UIED, Unidade de Investigação, Educação e Desenvolvimento. Documento en Línea. Disponible en: http://run.unl.pt/bitstream/10362/5321/1/Matos_2010.pdf.

Moura, A. de A., & Lins, A. F. (2013). A educação matemática numa perspectiva inclusiva com materiais manipuláveis. *Actas del VII CIBEM*, 2175–2182. Disponible en: http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/877.pdf

Nunes, S. M. L., Aguiar, G. da S., & Elliot, L. G. (2015). Avaliação em Matemática de Brasil e México: PISA 2003–2012. XIV CIAEM-IACME; Chiapas, Mx; 3–7 de mayo de 2015. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1344/82

Oliveira, E. S. (2013). Aplicativos no ensino e aprendizagem de crianças com Necessidades especiais na área mental. *Actas del VII CIBEM*, 19–725. Disponible en: http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/896.pdf

Silva, G. V. da, Corrêa, M. V., Xavier, A. R., & Colares, A. A. (2013). Dificuldades de alunos surdos no aprendizado de matemática. *Actas del VII CIBEM,* 7899–7904. Disponible en: http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1245.pdf

Tatto, M. T. (2015). Mathematics Knowledge for Teaching at the Secondary Levels: Methods and Evidence from the TEDS-M Study. XIV CIAEM-IACME; Chiapas,

Mx; 3–7 de mayo de 2015. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1517/742
Vesga Bravo, G. J., Roa Poveda, C, J., & Pinilla Alvarado, J. J. (2015). Desarrollo de habilidades metacognitivas a través de la solución de problemas matemáticos. Comunicación expuesta en XIV CIAEM-IACME; Chiapas, Mx; 3–7 de mayo de 2015. Disponible en: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/685/646

Alcune riflessioni sui fondamenti teorici della ricerca in didattica della matematica nella sua complessità e problematicità

Maura Iori
NRD, Università di Bologna

Sunto. *Numerose sono le teorie che alimentano la ricerca in didattica della matematica, e che la ricerca a sua volta alimenta, sviluppa e genera per far fronte ai problemi che l'insegnamento-apprendimento della matematica solleva a tutti i livelli scolastici. Ciascuna di esse fornisce metodi e strumenti di analisi specifici per trattare determinati aspetti della didattica della matematica che altre non possono fornire. Da qui la complessità della ricerca. D'altra parte, la molteplicità di teorie porta inevitabilmente il ricercatore a porsi il problema della loro connessione, in relazione a un problema di ricerca che richiede un'analisi più specifica e articolata, con diverse metodologie e strumenti. Da qui la problematicità della ricerca. Questo contributo fornisce una panoramica su tali aspetti e su come la diversità tra gli approcci teorici venga gestita e considerata come una risorsa per la ricerca in didattica della matematica, e dunque per l'insegnamento-apprendimento della matematica.*

Abstract. *There are many theories that nourish the research in mathematics education, and that research in turn nourishes, develops and produces in order to address the issues that mathematics teaching-learning raises at all school levels. Each of them provides specific analysis methods and tools to deal with certain aspects of mathematics education that others cannot provide. Hence the complexity of the research. On the other hand, multiple theories inevitably lead researchers to address the problem of their connection in relation to research problems that require a more specific articulated analysis, with different methodologies and tools. Hence the problematic nature of the research. This paper provides an overview of these issues and how the diversity of theoretical approaches is addressed and regarded as a resource for the research in mathematics education, and thus for teaching-learning mathematics.*

1. Introduzione

L'insegnamento-apprendimento della matematica si manifesta in molteplici aspetti che non possono essere studiati, descritti, compresi o spiegati mediante un'unica teoria. Numerosi sono dunque gli approcci alla ricerca in didattica della matematica. Essi si fondano su teorie differenti che si contraddistinguono per le diverse interpretazioni dei ruoli attribuiti agli aspetti cognitivi, epistemologici, socioculturali, semiotici che emergono dalle attività di insegnamento-apprendimento. Una loro connessione all'interno di uno studio

di ricerca può dunque aumentarne il potere descrittivo, esplicativo, nonché di controllo e di previsione.
Le teorie in didattica della matematica costituiscono un corpo di conoscenze sull'insegnamento-apprendimento in continua evoluzione; esse si sviluppano o modificano a causa degli stessi risultati di ricerca e dei contributi di discipline differenti: pedagogia, psicologia, sociologia, epistemologia, filosofia, didattica generale, linguistica, semiotica, neuroscienze, per citarne alcune. Da qui la complessità della ricerca in didattica della matematica. D'altra parte, quando un fenomeno viene letto e interpretato alla luce di teorie differenti, e le varie interpretazioni vengono tra loro confrontate, la ricerca manifesta anche tutta la sua problematicità, in quanto i principi su cui si fondano le diverse teorie non sono sempre tra loro compatibili.
Chi si occupa di ricerca in didattica della matematica o vuole semplicemente aggiornarsi sui suoi risultati non può dunque fare a meno di strumenti per riconoscere e gestire le somiglianze e le differenze tra le teorie, per rendere più profonde le osservazioni, le interpretazioni e le analisi di quel che succede in aula, nelle ore di matematica, e dunque gestire le situazioni d'aula in modo più efficace con le diverse metodologie di insegnamento che la ricerca scientifica mette a disposizione o che la comunità scientifica riconosce come valide.

2. Che cosa intendiamo per "teoria" (scientifica)

Non abbiamo qui la pretesa di fare un discorso epistemologico generale, riguardo alle teorie scientifiche; non è infatti questo il nostro scopo. Vogliamo invece spingerci di più verso la didattica della matematica, trattando l'argomento alla luce di alcuni Autori di questo mondo che hanno cercato di fare chiarezza sulla questione.
In *Le Parole della Pedagogia: Teorie Italiane e Tedesche a Confronto*, alla voce "scienza" si trova: "Il termine 'teoria scientifica' o 'scienza' è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta) condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione ecc.)" (D'Amore, 2007, p. 335).[1]
Si utilizza inoltre il termine "paradigma" (Kuhn, 1962) per indicare l'insieme delle teorie, delle leggi e degli strumenti che definiscono una tradizione di ricerca. In altre parole, il termine "paradigma" si utilizza per indicare una visione globale del mondo su cui indaga la comunità di scienziati di una determinata disciplina e che indirizza, in un dato periodo storico, la ricerca riguardo alla scelta dei fenomeni o problemi rilevanti da studiare, alla formulazione delle ipotesi e ai metodi di ricerca.

[1] Colgo l'occasione per riportare alcuni riferimenti a cui Bruno D'Amore ha fatto implicitamente riferimento nella prefazione di questo volume.

Per Thomas Kuhn (1922 – 1996) un importante aspetto dei paradigmi è la loro *incommensurabilità*: due paradigmi non possono cioè essere confrontati, in quanto le assunzioni o i concetti che sono parti integranti dei rispettivi paradigmi e coerenti all'interno di essi risultano complessivamente incompatibili. La *scienza normale* corrisponde a quei periodi in cui esiste all'interno di una disciplina un paradigma condiviso dagli scienziati. Il passaggio da un paradigma a un altro avviene soltanto dopo una crisi di un paradigma, e costituisce per Kuhn una vera e propria *rivoluzione* (*scientifica*).
Imre Lakatos (1922 – 1974) introduce invece l'idea di "programma di ricerca" (Lakatos, 1970), cioè di:

> una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare). Ogni programma deve contenere: un nucleo o centro del programma; un sistema di ipotesi ausiliarie; una euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei problemi. In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se: fa predizioni che la precedente non era in grado di fare; alcune di tali predizioni si possono provare come vere; la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare. (D'Amore, 2007, p. 335)

In particolare, nelle scienze umane una teoria si dice "scientifica" se dispone di un oggetto specifico di studio, un suo proprio metodo di ricerca e un suo specifico linguaggio condiviso.

> In questa direzione Thomas A. Romberg, alla fine degli anni ottanta, per definire le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile affermava che:
> deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole ci devono essere problematiche centrali e condivise che guidano il lavoro dei ricercatori;
> le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
> il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comune, sulla quale il gruppo è d'accordo;
> il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile. (D'Amore, 2007, pp. 336–337)

Le teorie in didattica della matematica hanno tutte queste caratteristiche.
Per quanto sopra riportato, una *teoria in didattica della matematica* può essere concepita come una rappresentazione condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni (di insegnamento-apprendimento della matematica) tra loro correlati da relazioni causali, basata su assunzioni o principi condivisi da una gruppo di ricercatori, in un dato periodo storico e in un dato contesto culturale e sociale, che hanno interessi comuni e per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise.

Le teorie possono essere distinte a seconda dei principi che le caratterizzano, dei problemi sui quali si focalizzano, degli scopi che perseguono, dei loro modi di concepire la ricerca e i metodi di ricerca. In ogni caso, ogni teoria attinge a differenti discipline costituendo un corpo di conoscenze in continuo accrescimento, insieme alla ricerca stessa. Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) considerano le teorie come:

> sistemi di concetti e relazioni, basati su assunzioni e norme. Esse sono costituite da un nucleo, da componenti empiriche, e dalla loro area di applicazione. Il nucleo include i fondamenti di base, le assunzioni e le norme, che vengono dati per acquisiti. Le componenti empiriche comprendono concetti addizionali e relazioni con esempi paradigmatici; esse determinano il contenuto empirico e l'utilità attraverso l'applicabilità. (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 169) [2]

La loro nozione di teoria è di tipo dinamico ed è modellata, da una parte, da idee centrali, concetti e norme e, dall'altra parte, dalle pratiche dei ricercatori e degli insegnanti.

Teorie e osservazioni sono in ogni caso strettamente intrecciate le une alle altre, in modo dialettico: le teorie guidano le osservazioni e, allo stesso tempo, sono influenzate dalle osservazioni (Hanson, 1958). In altri termini, una teoria delimita i propri scopi, le proprie domande, i propri oggetti e metodi di ricerca e, allo stesso tempo, gli scopi, le domande, gli oggetti e i metodi di ogni ricerca sono carichi di teoria o di teorie.

In didattica della matematica, a seconda degli aspetti dei fenomeni di insegnamento-apprendimento sui quali si focalizza maggiormente l'attenzione – l'apprendimento, il discente, il contenuto da apprendere, l'insegnante, il contesto sociale etc. – tra le teorie alle quali si può attingere ci sono le seguenti:

- *teorie costruttiviste* nelle loro diverse varianti (Cobb, 1988; Ernest, 1991; Goldin, 1990; von Glasersfeld, 1995)
- *teoria delle situazioni didattiche* (Brousseau, 1986, 1997)
- *teoria antropologica della didattica* (Chevallard, 1992)
- *teorie socioculturali* nelle loro diverse varianti (D'Ambrosio, 1985; Radford, 1997)
- *teorie semiotiche* nelle loro diverse varianti (Arzarello, 2006; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Duval, 1993, 1995; Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994, 1998; Hoffmann, 2006; Sáenz-Ludlow & Presmeg, 2006)

per citarne solo alcune.

3. Strategie per connettere teorie in didattica della matematica

Le teorie possono essere distinte a seconda della struttura dei loro principi o concetti di base, del tipo di oggetti o fenomeni su cui si focalizzano, delle

[2] Tutte le citazioni in italiano di autori non italiani sono traduzioni nostre.

domande di ricerca che si pongono, del tipo di risposte che considerano adeguate, del modo di vedere la ricerca, i suoi scopi e i suoi metodi, etc. La loro diversità costituisce in ogni caso una importante risorsa per comprendere e gestire la ricchezza e complessità della produzione scientifica.
Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) chiamano strategie di *networking* quelle *strategie* (linee guida generali) per mettere in relazione, per quanto possibile, teorie differenti e dunque gestire realtà complesse:

> Le strategie di *networking* sono quelle strategie di connessione che da una parte rispettano il pluralismo e/o la modularità degli approcci teorici autonomi, ma che dall'altra parte sono interessate a ridurre la molteplicità degli approcci teorici tra loro sconnessi nelle discipline scientifiche. […] Le strategie di *networking* sono strutturate in coppie di strategie simili, per le quali si possono fare distinzioni di grado: comprendere e rendere comprensibile, comparare e contrastare, combinare e coordinare, integrare localmente e sintetizzare. (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, pp. 170–171)

Queste coppie sono collocate tra due poli ideali, o strategie estreme:

- "ignorare le altre teorie", considerando ciascuna teoria come relativa e isolata;
- "unificare globalmente", per avere un'unica teoria.

Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) evidenziano che la maggior parte dei ricercatori che connettono teorie applica contemporaneamente più di una strategia, adottando strategie intermedie tra le due estreme. In particolare:

- "Comprendere" le altre teorie, e le loro articolazioni nelle pratiche di ricerca è una condizione indispensabile per connetterle.
- "Comparare" e "contrastare" le teorie sono le strategie più utilizzate. Tutte le teorie possono essere comparate o contrastate. Il "comparare" ha come scopo quello di individuare in modo generale le loro somiglianze e differenze, mentre il "contrastare" ha come scopo quello di sottolineare le loro differenze tipiche.
- "Coordinare" e "combinare" le teorie sono strategie che hanno come scopo quello di utilizzare strumenti analitici differenti per lo studio di un dato problema pratico o per l'analisi di un fenomeno empirico. Il coordinamento può essere effettuato soltanto tra teorie le cui assunzioni o principi sono tra loro compatibili e le cui componenti empiriche o *praxeologie* (sistemi di pratiche di ricerca) sono complementari. Quando gli approcci teorici sono soltanto giustapposti si parla di "combinazione", anziché di coordinamento. La combinazione di approcci teorici non necessita della complementarietà o della completa coerenza degli approcci teorici. Possono essere combinate anche teorie con assunzioni di base contraddittorie, al fine di ottenere una visione multiforme del fenomeno preso in esame (per esempio la teoria delle situazioni didattiche e le teorie socioculturali).
- "Sintetizzare" e "integrare (localmente)" le teorie sono strategie che hanno come scopo quello di sviluppare le teorie mettendo insieme, in un

nuovo quadro, alcuni approcci teorici. La strategia "sintetizzare" è utilizzata per connettere due o più teorie aventi la stessa rilevanza in modo da far evolvere una nuova teoria. Se il livello di sviluppo delle teorie considerate non è lo stesso, e se ci sono soltanto alcuni concetti o aspetti di una teoria inseriti in una teoria più elaborata e dominante, si parla di "integrazione locale".
Il *networking* di teorie può essere realizzato in vari modi usando differenti strategie che si focalizzino su aspetti diversi delle teorie e per scopi differenti: comprendere le altre teorie (e la propria), comprendere meglio un dato fenomeno empirico, sviluppare una data teoria, e, più in generale, migliorare la pratica di insegnamento. Si tratta di: "un nuovo modo di guardare le teorie, che può modellare nuovi tipi di pratiche di ricerca" (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 176).
In generale, la connessione tra teorie dipende dalla compatibilità dei principi delle teorie e dagli scopi della connessione. In termini di integrazione, le teorie possono essere connesse (anche solo localmente) se i loro principi teorici (o soltanto alcuni di essi) sono "sufficientemente vicini" gli uni agli altri (Radford, 2008b).
Così, nell'àmbito del *networking* di teorie, la strategia "integrare localmente" può dare origine a percorsi multi-teorici in grado di gestire in modo efficace e a più voci la complessità dei fenomeni di insegnamento-apprendimento.

4. Conclusioni

I molteplici aspetti dei processi di insegnamento-apprendimento richiedono strumenti di analisi specifici, che forniscano chiavi di lettura differenti, per tener conto simultaneamente delle differenti dimensioni (affettiva, cognitiva, socioculturale, semiotica, o semio-cognitiva) dei fenomeni di insegnamento-apprendimento.
Le teorie in didattica della matematica, come tutte le teorie scientifiche, sono in continua evoluzione, si modificano e si sviluppano continuamente insieme alla ricerca stessa – da qui la *complessità* della ricerca – e possono essere confrontate, combinate, coordinate o localmente integrate – evidenziando tutta la *problematicità* della ricerca – allo scopo di ottenere un'analisi più ampia e articolata dei fenomeni di insegnamento-apprendimento della matematica. D'altra parte esse permettono di fornire all'insegnante metodologie, metodi, strumenti differenti per stimolare un insegnamento-apprendimento della matematica da più punti di vista, evitando il ricorso a metodi o strumenti pre-confezionati o alternativi di dubbia efficacia, in quanto non sottoposti al severo giudizio scientifico (D'Amore, 2016).

Nota. *Questo è un lungo estratto di un articolo molto più complesso in via di scrittura definitiva.*

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 267–299.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., pp. 746–783). New York: Routledge.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, *23*(2), 87–103.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44–48.

D'Amore, B. (2007). Voci per il dizionario. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.). *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto* (Didattica disciplinare, pp. 72–75; Formazione in scienze naturali, pp. 140–142; Formazione in matematica, pp. 145–147; Scienza, pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri.

D'Amore, B. (2016). A proposito di "metodi di insegnamento" univoci: Errori pedagogici, epistemologici, didattici e semiotici delle metodologie univoche. *La Vita Scolastica web*. Disponibile su http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/magazine/articoli/a-proposito-di-metodi-di-insegnamento-univoci/

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Ernest, P. (1991). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of 15th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25–32), Assisi.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2–3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. (1990). Chapter 3: Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4*, 31–47 and 195–210.

Hanson, N. R. (1958). *Patterns of discovery: An inquiry into the conceptual foundations of science.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hoffmann, M. H. G. (2006). What is a "semiotic prospective", and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 279–291.

Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.) (1970). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 165–178.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Guest editorial: Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 1–10.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.

Lo elemental de la formación de doctores en Educación matemática

Olga Lucía León Corredor
Doctorado Interinstitucional en Educación
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotá, Colombia

A Bruno D'Amore

Abstract. *Doctoral programs in mathematics education analyze and research any situation affecting the mathematical training of all members of society, and the development of mathematics in every culture. In Latin America, particularly in Colombia, economic and violence, situations arise new challenges for doctoral research in mathematics education. These phenomena require directors of doctoral research, high-quality professional and social commitment. This paper is a tribute to Bruno D'Amore from Interinstitutional Doctorate in Education, which it is composed of Distrital Francisco Jose de Caldas University, Valle University, and National Pedagogical University.*

1. Los fenómenos que hacen necesaria la investigación doctoral

El campo de la educación matemática, es una fuente de problemas para la investigación doctoral en educación matemática. El décimo tercer Congreso Internacional de Educación Matemática (13th ICME, por sus siglas en inglés), realizado en la ciudad de Hamburg (Alemania), del 24 al 31 de julio de 2016, además de ser el escenario natural para la manifestación del desarrollo de teorías y modelos de investigación; de encuentro de comunidades de investigadores; de articulación de medios de difusión de la producción científica; también se constituyó en el espacio de formulación de nuevos de problemas de investigación en educación matemática que serán de necesaria consideración por los doctorados en educación matemática de todo el mundo (Icme13, 2016).

Las situaciones políticas, sociales y económicas de carácter nacional y transnacional, revelan la emergencia de nuevos fenómenos de investigación, que no pueden ser ignorados por los doctorados en educación matemática. La complejidad de ese tipo de situaciones requiere la cooperación de varios centros y doctorados de investigación, de varias regiones del planeta.

La primera situación se vincula a la emergencia de generaciones de relevo de los actuales profesores de matemáticas y de investigadores en educación matemática. En regiones como América Latina y el Caribe, dos fenómenos se asocian a esta situación, el primero tiene que ver con la eficiencia en titulación, que según el informe sobre la educación en América Latina y el Caribe, (UNESCO IESALC, 2005), las carreras de Educación (promedio de

30%) y Ciencias Básicas (promedio de 50%), no son eficientes en titulación, para el caso Colombia la tasa de graduación al año 2013, en las mismas carreras, no supera el 37% (Ministerio de Educación de Colombia, 2014). El segundo tiene que ver con la deserción del sistema educacional de los nuevos graduados en Educación, según datos del Ministerio de Educación de Chile, (Mineduc), el 40% de los docentes que ingresó en el año 2000 no estaba ejerciendo al finalizar el año 2009 (La Tercera, 2016). Las dos fenómenos indican que los procesos de formación de matemáticos y profesores de matemáticas en América Latina, necesitan ser estudiados, para comprender la presencia de tasas tan altas de deserción y de no eficacia en la titulación. En un futuro la comunidad de educadores matemáticos se puede reducir significativamente y con ello la formación en matemáticas de los pueblos.

La segunda situación, se vincula con el lugar que tiene la investigación en educación matemática, para garantizar una educación para todos, en la Declaración de Incheon se enuncia:

> La inclusión y la equidad en la educación y a través de ella son la piedra angular de una agenda de la educación transformadora, y por consiguiente nos comprometemos a hacer frente a todas las formas de exclusión y marginación, las disparidades y las desigualdades en el acceso, la participación y los resultados de aprendizaje. Ninguna meta educativa debería considerarse lograda a menos que se haya logrado para todos. Por lo tanto, nos comprometemos a realizar los cambios necesarios en las políticas de educación y a centrar nuestros esfuerzos en los más desfavorecidos, especialmente aquellos con discapacidad, para velar por que nadie se quede atrás. (UNESCO, 2015)

Esta situación vincula fenómenos asociados a la forma como poblaciones minoritarias con condiciones de aprendizaje diferentes a las de la mayoría, aprenden matemáticas y comunican sus aprendizajes, poblaciones que por siglos han sido excluidas de los ambientes escolares y de la educación matemática.

La tercera situación se asocia a los fenómenos de violencia y su efecto en la educación de las poblaciones, los datos del Observatorio sobre el Desplazamiento Interno del Consejo Noruego para Refugiados (IDMC-NRC), a finales de 2015, reportan que en todo el mundo, había 40,8 millones de personas desplazadas internamente por causa de conflictos armados – 2,8 millones más que en 2014 – el 53% de los cuales en cinco países afectados por conflictos: Siria, Colombia, Irak, Sudán y Yemen. En Colombia menos del 5% de la población desplazada interna, cuenta con algún tipo de educación superior o técnica.

Es decir, los doctorados en educación matemática, cumplen funciones científicas y sociales, necesarias para la comprensión de lo existente y la exploración de lo imaginado por parte de la humanidad; comparten la responsabilidad, con otros sectores sociales, de resaltar lo humano y desarrollar la humanidad en cada sociedad y fomentan prácticas sociales con la herramienta fundamental de la que disponen: la investigación, y con el dispositivo fundamental para la acción: los grupos de investigación.

2. Las personas que hacen posible la formación doctoral

A Bruno D'Amore

El Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE) de las universidades del Valle, Pedagógica Nacional, y Distrital Francisco José de Caldas, es un Doctorado concentrado en el campo intelectual de la educación, la pedagogía y la didáctica, además de consolidar los equipos de investigación con trayectoria reconocida, así como para recoger el acumulado más importante en educación, pedagogía, didáctica durante los últimos 30 años. Y, en este caso, las universidades colombianas participantes crearon un camino de posibilidad y lo han recorrido para realizar una sinergia interinstitucional, que promueve el desarrollo de la comunidad académica en educación.

Bruno D'Amore se vinculó en el año 2007 como profesor invitado, actualmente es profesor del programa. En este breve espacio se destacan grandes rasgos de Bruno D'Amore como formador de doctores en educación matemática en un País que necesita el aporte de doctores en educación, para comprender y anticipar un espacio de paz para las nuevas generaciones.

El investigador

Formación: Phd In Mathematics Education, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Eslovaquia
Lineas de Investigación:

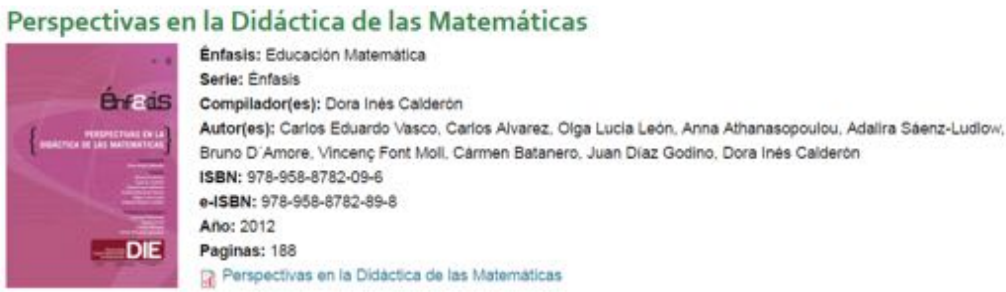
- Análisis Histórico Critico y Didáctico de los Elementos Fundantes de la Didáctica Fundamental
- Formación de Profesores de Matemáticas
- Influencia de las Transformaciones Semióticas en las Construcciones del Cognitivo

Estrechamente relacionados en su investigación están los centros de investigación NRD de la Universidad de Bologna (Italia), SUPSI de Locarno (Suiza), el laboratorio de didáctica de la Universidad de Bordeaux (Francia), la facultad de Educación de Chipre en Nicosia.

El director de investigaciones doctorales

Estudiante	Título del Trabajo de grado	Estado
Pedro Javier Rojas Garzón	Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos	Finalizado
Héctor Mauricio Becerra Galindo	Reflexión de los profesores de matemáticas sobre las problemáticas semióticas en las representaciones de conjuntos infinitos a partir de entrevistas con estudiantes	En proceso
Jaime Romero	Modelos y concepciones en el aula: Una perspectiva pragmática	En proceso
Deissy Narvaez	El contrato didáctico y sus efectos: ¿qué son realmente y dónde se revelan?	En proceso
Henry Alexander Ramírez	Dificultades de aprendizaje en matemáticas: convicciones y concepciones de profesores sobre las bases del análisis de los errores de sus estudiantes. Estudio epistemológico, semiótico y didáctico	En proceso
Luis Ángel Bohórquez	Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemáticas sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas	En proceso
Rocío Malagón	Practicas docentes de los profesores de matemáticas en Colombia	En proceso

El divulgador de grandes ideas de la educación matemática


Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas

Énfasis: Educación Matemática
Serie: Énfasis
Compilador(es): Dora Inés Calderón
Autor(es): Carlos Eduardo Vasco, Carlos Alvarez, Olga Lucia León, Anna Athanasopoulou, Adalira Sáenz-Ludlow, Bruno D´Amore, Vincenç Font Moll, Cármen Batanero, Juan Díaz Godino, Dora Inés Calderón
ISBN: 978-958-8782-09-6
e-ISBN: 978-958-8782-89-8
Año: 2012
Paginas: 188
Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas

Esta solo es una muestra del gran interés de Bruno, por presentar tópicos que son de profundo interés en la educación matemática.

El amigo

En el año 2006, cuando inició el Énfasis de Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación, el número de doctores en educación matemática, en Colombia no era superior a diez, y estaban distribuidos en varias regiones y universidades del país, la primer estrategia fue conformar un equipo interinstitucional e internacional que asumiera el reto de organizar un doctorado cooperativamente, Bruno decidió hacer parte de ese equipo y se comprometió solidariamente con el reto de consolidar el primer doctorado interinstitucional en educación, que contaba con el énfasis en educación matemática en Colombia.

Muchos problemas hemos enfrentado, algunos los hemos logrado superar, muchos nos faltan por resolver, los egresados de este doctorado en el énfasis de educación matemática están comprometidos con el desarrollo de la educación matemática de Colombia, todavía son muy pocos para los grandes retos que tiene el país. La dedicación de 10 años de trabajo solidario con el equipo, para apoyar y abrir los caminos en el espacio nacional e internacional para nuestros estudiantes y egresados, para ampliar sus espacios de confrontación científica, nos permite afirmar hoy, que estamos ante un gran amigo y sobre todo un gran MAESTRO.

¡ gracias AMIGO!

Bibliografía

ICME13 (2016). *Conference Agenda*, 26 de julio de 2016. Obtenido de icme13.org: https://www.conftool.pro/icme13/index.php?page=browseSessions

La Tercera (2016). *El 40% de los docentes nuevos dejó de ejercer en una década*, 1 de 6 de 2016. Obtenido de http://www.latercera.com: http://www.latercera.com/noticia/nacional/2016/07/680-687209-9-el-40-de-los-docentes-nuevos-dejo-de-ejercer-en-una-decada.shtml

Ministerio de Educación de Colombia (2014). *Estadísticas de Educación superior*, 30 de 11 de 2016. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/: http://www.mineducacion.gov.co/sistemasdeinformacion/1735/articles-212350_Estadisticas_de_Educacion_Superior_.pdf

UNESCO (2015). Declaración de Incheon, 22 de 5 de 2016. Obtenido de http://es.unesco.org/: http://es.unesco.org/world-education-forum-2015/about-forum/declaracion-de-incheon

UNESCO IESALC (2005). Informe sobre la Educación Superior en América Latina y el Caribe. Caracas: IESALC.

Bruno D’Amore
70 aniversario, Octubre 2016

Salvador Llinares
Universidad de Alicante, España

Abstract. *In my greetings I underline Bruno D’Amore’s contribution to mathematics education and his multifaceted personality, by his broad knowledge and by his ability to make friends and create opportunity for different people to meet each other.*

Hace años conocí personalmente a Bruno a través de Martha Fandiño.
La labor de Bruno en el ámbito de la didáctica de la matemática tiene dos facetas importantes que me gusta destacar.
Por una parte, su amplia formación psicológica, filosófica, matemática, artística y en el ámbito de la didáctica de la matemática le permite generar perspectivas sobre diferentes aspectos que podrían parecer insospechados antes de que Bruno los muestra. Los conocimientos de Bruno sobre arte, filosofía, epistemología, semiótica, matemáticas, historia, didáctica … y la manera en la que es capaz de hablar sobre los fenómenos educativos hacen que uno piense que está ante una persona que se ha equivocado de época. Posiblemente el Renacimiento seria el contexto histórico en el que daría coherencia a la existencia de Bruno considerando la dimensión de lo que conoce. Pero yo agradezco que haya tardado tanto en nacer y que al existir en esta época yo haya podido coincidir con él.
Por otra parte, su capacidad para relacionar a personas le da un valor añadido. No solo ha generado grupos de investigación, y organizado eventos en los que los maestros de diferentes niveles pueden compartir experiencias, sino también genera oportunidades para permitir que diferentes personas puedan encontrarse y compartir. Yo tengo que reconocer que muchos de los que ahora llamo amigos a lo largo del ámbito de la didáctica de la matemática en todo el mundo tienen como vinculo a Bruno D’Amore.

Feliz cumpleaños, y que sigas produciendo conocimiento en el ámbito de la educación matemática (praxis, investigación) y generando amigos a lo largo del mundo.

La influencia de Bruno D’Amore en la resignificación de nuestra práctica didáctica

Álvarez Cipamocha Andrés Fabián, Berdugo Cely Edgar Rolando, Calderón Muñoz Rafael, Camargo Moreno Lorena Patricia, Daza Pirateque Jenny Carolina, Fúneme Mateus Cristian Camilo, Galán García Milton Julian, Jiménez Parra Julieta, Limas Berrio Leidy Johana, Orozco Pinzón Jeferson Alexander, Peña Garzón Laura Givelly, Ramirez Parada Freddy Alveiro, Rangel Martínez Mayra Yolanda, Reyes Quemba Aura Milena, Sanabria Cachope Ana Delia

Maestría en Educación Matemática
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Tunja

Abstract. *Our experience of students in two master courses under the guidance of Bruno D'Amore.*

A lo largo de la formación inicial de profesores de matemáticas, se pasa por asignaturas de conceptualización y apropiación matemática y pedagógica que parecen ser suficientes y necesarias, sin embargo quienes han hecho parte de un proceso de pregrado y han desarrollado su práctica profesional, estarán de acuerdo que no es así, pues quedan ciertas concepciones por analizar e incluso por apropiar. Por lo general se puede considerar que el docente al afrontar esa situación, cae en una etapa donde comparte, retoma, y practica la postura de los profesores, que en su momento eran sus maestros en algún nivel de educación básica secundaria (D’Amore, 2006).

Considerando la preparación docente, si se hace una retrospectiva y se llega a focalizar toda la atención en cómo y cuál ha sido la formación en didáctica y didáctica de la matemática, se podrá vislumbrar que ninguna de las dos es un término más, palabras que solamente se escriben; por el contrario, cómo se discute ampliamente en el libro de D’Amore (2006), es una concepción trabajada e interpretada por muchos años, que hoy en día sigue abierta a discusión y en ningún caso es un “recetario” para que los docentes centren su trabajo en cómo mostrar un contenido, en particular uno matemático.

Establecer un concepto de Didáctica es bastante complejo, toda vez que la manera de presentar el conocimiento puede ser diferente, según quien lo presenta (docente) y a quien se dirige (estudiante). Sin embargo es posible diseñar, encontrar y formular estrategias de enseñanza que sean propias del ámbito cultural y social de quienes son el centro de nuestra práctica pedagógica. De otro lado cada estrategia puede ser tan particular como la manera de aprender de cada estudiante. El reto es, entonces, encontrar métodos que en lo posible satisfagan la mayoría de las necesidades de los alumnos en conjunto.

A diario en nuestra labor es común encontrar profesores de matemáticas que no cuentan con la formación pedagógica y didáctica para enseñar con éxito a sus estudiantes, lo anterior nos hace reflexionar sobre la importancia de adquirir una formación permanente que aporte a una mejora progresiva de las prácticas pedagógicas pues esto conlleva al alumno a suscitar comportamientos que le permita manifestar su conocimiento así como ser autónomo de su proceso.

Gracias a lo enseñado por el Doctor Bruno D'Amore en las clases de la maestría en Educación Matemática, podemos no sólo reflexionar sobre las dificultades que se presentan en la docencia, sino también abrimos nuestras mentes en búsqueda de métodos y estrategias concretas que faciliten los procesos de enseñanza y de aprendizaje, transformando nuestra labor pedagógica notablemente.

Si bien la didáctica constituye una herramienta fundamental, en el ejercicio docente, propiciando ambientes efectivos de aprendizaje, no se puede olvidar la principal fuente de inspiración, que fue la vía conducente, para muchos maestros, a un enfoque matemático y un desempeño en el área, siguiendo el amor por los números, algoritmos y problemas que encaminaba a entusiastas a desenvolverse en el difícil oficio de docentes de matemáticas, pero sin imaginar las situaciones críticas de la educación que en ocasiones lo apartaría de tan notable inspiración, el formado maestro fue perdiendo la esencia de matemática, sólo entonces al retomar un ejemplo de cultura y amplio conocimiento impartido de manos de un maestro tan respetado, impulsa y despierta de nuevo el deseo de indagar, conocer, aprender y dominar temas matemáticos de amplio calibre, que a pesar de su aparente simplicidad esconden intrincadas definiciones, pues así retomar un enfoque epistemológico y las raíces que entusiasmaron a los grandes de la matemática puede llegar a resucitar el espíritu olvidado.

Orientar una de las áreas fundamentales del saber, la matemática, no es tarea fácil. En nuestra cotidianidad como docentes, a veces nos olvidamos de implementar una didáctica diferente y eficaz; convirtiendo el proceso de enseñanza y de aprendizaje en algo meramente rutinario, algo repetitivo.

Cuando nos encontramos en el camino con una gran persona como el ilustre doctor Bruno D'Amore, que nos emociona, nos intriga, nos enseña cosas, que sólo algunos pocos como él saben, que nos logra mantener atentos de tal manera, que nos sumergimos en ese mundo llamado didáctica, a través de la historia y de la epistemología de la matemática, tanto que únicamente queremos seguir aprendiendo y descubriendo cosas nuevas, es entonces, cuando reaccionamos y empezamos a cambiar el horizonte y nos damos cuenta que hemos olvidado algo esencial en nuestra labor.

Día a día nos enfrentamos a diversas situaciones, las cuales debemos afrontar de la manera más acertada, buscando siempre el beneficio de nuestros educandos; por lo que es importante implementar la buena e interesante didáctica de hoy, la vanguardista, la actual, en el lugar de la de antaño, en ese entorno inmediato donde vivimos gran parte del día, la mayor parte de la semana, el aula de clase.

Todos los días se aprende y en el salón de clases es evidente, más aún cuando se tiene una relación de intercambio de conocimientos entre docente y estudiantes que depende de la forma en que orientamos las clases y la didáctica que aplicamos, fomentando que los estudiantes sientan el gusto por aprender matemáticas y generando un espacio de aventura, indagación, cuestionamientos y motivación por aprender, con el objetivo de brindar una matemática bien estructurada y significativa para la vida, el Doctor Bruno tiene la magia de vislumbrar con anécdotas que tienen un gran valor para recrear la historia de la matemática, la vida de grandes matemáticos que siguen vivos hasta el día de hoy por los aportes en el área, y también por la especialidad de enseñar de una forma profunda pero a la vez sencilla los saberes más complejos y fáciles de la matemática, que luego serán enseñados por nosotros y para los cuales está presente lo aprendido por el doctor Bruno, buscando despertar el gusto por la matemática en nuestros estudiantes.

El contacto con este ilustre doctor ha tenido diferentes tipos de implicaciones en el desarrollo de nuestro trabajo como docentes de matemáticas; en primer lugar, se ha podido captar un enriquecimiento teórico, donde el lenguaje matemático y conocimiento epistemológico ayuda a fortalecer la labor en el aula y ver la importancia de la didáctica; pues de esta depende en gran medida que los estudiantes le tomen cariño a la ciencia que se enseña y en segundo lugar, nos ha transportado con su conocimiento y estudios sobre la historia y epistemología de la matemática, a reconocer obstáculos que se presentan en la enseñanza de esta ciencia, que no dependen únicamente del ejercicio docente, sino de la forma como se conciben algunos argumentos matemáticos.

Bibliografía

D’Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.

L’importanza del linguaggio nell’acquisizione dei concetti astratti

Maurizio Matteuzzi
Dipartimento di Filosofia e Comunicazione
Università di Bologna

Sunto. *Si analizza il caso dell'insegnamento di un oggetto matematico sconosciuto al discente, e del contributo che il linguaggio può dare nella circostanza. Si mostra come informazioni sia sintattiche che semantiche, ancorché di natura non matematica, possano fornire un valido supporto all'apprendimento.*

Abstract. *In this paper we face the case of teachers introducing a new mathematical object, quite unknown to the learner, and the contribution the language can give in that circumstance. We show how syntactic and semantic information, though not of mathematical nature, can provide a valuable learning support.*

Recenti studi nell’ambito delle scienze cognitive hanno dimostrato, partendo da un approccio squisitamente psicologico, come il linguaggio giochi un ruolo fondamentale nell’acquisizione di concetti astratti (Granito, Scorolli, & Borghi, 2015). Più precisamente, entro questi studi si chiarisce, anche per via sperimentale, come il riferimento ad oggetti *concreti* induca l’attivazione della parte del cervello che governa gli arti, quello a concetti *astratti*, viceversa, della parte del cervello che governa il linguaggio. Così, se si parla di questa tavola, ecco che il sistema nervoso mette in preallarme i miei arti, le mie mani, mentre se si parla della bellezza si attiva l’apparato della mia bocca.
La cosa pare molto interessante sul piano sia filosofico che pedagogico. In prima istanza, un filosofo sentirebbe la necessità di aprire una istruttoria sulla dicotomia *astratto/concreto*, termini che, in un contesto scientifico, necessitano di opportune chiarificazioni. Perché “concreto” pare in quest’ambito riferirsi non tanto o non solo agli oggetti singolari, ad esempio, a questo tavolo, ma altrettanto bene al “tavolo”, ossia alla classe dei tavoli, o a qualsiasi tavolo. Non si vuole qui riprendere una volta di più l’eterna “polemica sugli universali”; e tuttavia la caratteristica riscontrata non è di poco conto: il ferro della chimica è un universale, ha un peso atomico, una valenza, un peso specifico ecc., ha tanti predicati; ma non ha un peso non specifico, non ha un colore, non ha una locazione spazio-temporale. È, insomma, qualcosa che “non esiste”, nel senso del Dasein, dell’esserci, del darsi nel mondo empirico. Astratto o concreto? Aristotele direbbe che qui si tratta di sostanze sì, ma sostanze “seconde”, come “uomo” o “animale”. E tuttavia, stando agli esempi che si trovano in letteratura, in questo specifico

caso, ugualmente, si attiva il senso del tatto, e non quello dell'udito: per il nostro cervello qui si tratta di *universali* ma *concreti*.
Ponendo per il momento da parte questo aspetto, indubbiamente rilevante sul piano semantico, possiamo comunque procedere nella nostra analisi assumendo che il problema non si pone per gli oggetti matematici, che non corrono certo il rischio della "concretezza", comunque la si intenda: la matematica è prima di tutto astrazione. Dunque, nell'apprendimento matematico il linguaggio gioca un ruolo primario, essendo esclusa la *ostensio ad oculos*, se non in senso metaforico (la "figura" in geometria, ad esempio). Ma come è possibile tirar fuori dal linguaggio qualcosa che ci è a priori ignoto, e che quindi non può essere porto come *denotatum* di una qualsiasi espressione linguistica?

Il maestro parla all'allievo

Per comprendere in modo approfondito la complessa relazione che avviene quando il maestro "insegna" qualcosa di nuovo al discente, bisogna prima di tutto liberarsi del così detto "modello shannoniano", paradigma di riferimento dei semiologi. Tale modello viene dalla telefonia, dalla trasmissione dati, ed è notevolmente semplificativo del processo che ci interessa, e che D'Amore ha studiato per mezzo secolo. Il modello di Shannon, prima di tutto, è simmetrico, e questo lo porta lontano dal caso studiato: abbiamo due punti A e B, un canale, un codice, un messaggio: è il mondo "come in uno specchio", assioma di base della teoria della trasmissione dati, il mondo diviso in due metà speculari.
Analizziamo meglio il fenomeno della comunicazione maestro/allievo. Per prima cosa, emerge una prima fondamentale informazione, che viene data al discente: l'atto stesso si dichiara come "volontà di parlare". Il maestro mi guarda negli occhi, e mi dice "Ci sono infinite soluzioni della formula φ". Ecco una prima informazione: il maestro mi guarda negli occhi, ed emette dei suoni rivolti a me. Ciò significa che sta creando un "atto significante", o "donatore di senso", per usare la terminologia husserliana. È il primo passo verso la comprensione. L'effetto concreto è che il discente si pone in un atteggiamento nuovo, e cioè si predispone a ricercare in sé l'"atto riempiente". Grossolanamente, potremmo dire, il maestro porge uno stampino, una forma, e ora il discente deve cercare entro la sua *Erlebnis*, il suo vissuto, la sua memoria a lungo termine, qualche cosa che possa incastrarsi esattamente in quella forma. Si scatena pertanto nel discente un processo introspettivo. Quest'ultimo è a sua volta un evento assai complesso, fatto di molte attività, diverse delle quali ci sono ancora ignote, quanto meno nei dettagli precisi: il recupero di nozioni dalla memoria di massa, ad esempio, l'attivazione di processi neuronali, a creare collegamenti, l'attivazione di parti selezionate del cervello, la modifica delle porte chimiche, la variazione di una serie di parametri anche sul piano fisiologico, come il tasso di adrenalina, e chissà quanto altro. Il processo di "comprensione" è iniziato.

Il secondo momento è di natura squisitamente linguistica. La sintassi è fortemente informativa. Ed essa si intesse sempre di più con la semantica, fino, al momento conclusivo, con il fondersi con essa. Prendiamo un esempio né matematico né formale, per cominciare dal semplice verso il complesso. Abbiamo tre amici, che chiameremo Alberto, Bruno e Carlo. Bene, B dice a C: "Ieri sera, a cena, il SHUSHI non mi è piaciuto". Alberto non sa che cosa è il SHUSHI. E tuttavia la sua comprensione compie qualche passo avanti. Data la sintassi dell'enunciato dato, il SHUSHI, che è soggetto, deve essere quel che Chomsky chiama un "sintagma nominale", semplificando un po', un qualche oggetto dal significato autosufficiente, in sé conchiuso. La semantica viene poi in soccorso: esso, qualsiasi cosa sia, è stato fruito "a cena". Dunque, il SHUSHI è un nome, e denota qualcosa di fruibile a cena, ossia che si mangia o che si beve. Ma ecco che C replica: "Sì, neanche a me, il riso era scotto". A questo punto la comprensione di Alberto compie dei passi avanti. Primo, il SHUSHI non è una bevanda, ma un alimento. Secondo, esso è composto, in tutto o in parte, di riso. Ma B aggiunge: "il pesce però era buono; a me piace il pesce crudo". Ecco che il processo si compie felicemente. Alberto può dire che "Il SHUSHI è un alimento composto di riso e di pesce crudo". L'atto significante, nella forma dialogica qui proposta per ragioni di analisi, è in questo caso sottinteso, entro il soggetto: Alberto si è chiesto: "Ma cosa sarà mai il SHUSHI?". L'atto riempiente è stato conseguito, attraverso una stretta interazione tra sintassi e semantica. Il filosofo non può non cogliere l'eco del processo diairetico platonico, quello magistralmente esemplificato nella definizione del pescatore nel Sofista.
Nel caso che ci interessa, quello della comprensione dell'insegnamento matematico, dobbiamo ora aggiungere un terzo momento, quello più specifico e caratterizzante, e cioè la specializzazione della semantica ad una ontologia regionale specifica, quella delle proprietà formali. E proviamo allora a passare dal SHUSHI agli oggetti matematici. Qui farò ricorso ad un dialogo reale e non immaginario, anche se purtroppo in modo difettivo, perché non ricordo ahimè tutti i particolari. Ma ritengo che quel tanto che ricordo sia sufficiente a chiarire il mio pensiero, cioè la mia analisi della comprensione nel processo di apprendimento. Mi riferisco dunque ad un fatto vero, e accaduto proprio in quest'aula, più precisamente nella prima fila della parte sinistra di quest'aula Pincherle. Era il 1971, e Bruno D'Amore ricopriva il ruolo di "borsista ministeriale", che corrisponde più o meno a quello attuale di "assegnista". Teneva esami di geometria, di cui fu poi per un certo periodo successivo assistente, mentre Mario Villa, titolare di quella cattedra, presiedeva la commissione d'esame. Data la numerosità degli studenti, era un esame obbligatorio del primo anno anche di ingegneria, vi erano più sottocommissioni che in una prima fase agivano contemporaneamente. Io ero allora neolaureato in filosofia, interessato di cose matematiche, e investivo parecchio tempo ad assistere agli esami, vuoi per apprendere, vuoi per

mettermi alla prova (la scelta tra matematica e filosofia, al momento di iscrivermi all'università, era stata alquanto sofferta). Avviene allora che Bruno scrive qualche formula, che purtroppo non ricordo affatto. Infine pone la domanda: "Dunque queste rette R1 ed R2 come sono fra di loro?". Lo studente indugia, tentenna, rinuncia. Tornerà un'altra volta. Appena se ne va io dico a Bruno: "Sono parallele". E Bruno. "Sì, bravo!". Allora confesso: dunque, due rette possono essere tante cose, ma "fra di loro" possono essere solo due cose, parallele o perpendicolari. Perché nessuno direbbe, ad esempio che sono convergenti "fra di loro". Una prima scrematura dell'atto riempiente è stata fatta. Ma qui insorge un altro ragionamento linguistico, un po' più sottile. Aristotele ci ha insegnato che il linguaggio ordinario, e dunque quel che chiamiamo la nostra ragione discorsiva, procede per sostanza e accidente. Non importa ora se abbia ragione Locke a espungere il concetto di sostanza dal rigore filosofico, sta di fatto che noi "parliamo così". Farò il solito esempio di Husserl: nella macchia di colore, colore ed estensione coincidono, e tuttavia noi assumiamo la macchia come fondante e il colore come fondato. Noi diciamo "la macchia DI colore", e non possiamo dire "la macchia DEL colore"; noi diciamo "il colore DELLA macchia, e non possiamo dire "il colore DI macchia". Eppure, fisicamente, colore ed estensione coincidono, non posso estendere la macchia senza estendere sia l'una che l'altro.
Torniamo al nostro problema. Due rette parallele sono linguisticamente della stessa dignità. Viceversa, quanto meno nella stragrande maggioranza dei casi, noi diciamo che la retta R2 è perpendicolare alla retta R1, da cui eravamo partiti. Propendiamo ad assumere il dato di partenza come sostanziale, e quanto abbia carattere aggiuntivo come accidentale, in tanto in quanto il primo *existit in se et per se*, per dirla con le parole di Tommaso, non ha bisogno d'altro per esistere, mentre ciò che vi costruisco sopra potrebbe non essere, ha bisogno del primo per esistere. È l'*ousia* aristotelica, Bruno è sostanza, settantenne è accidente, qualità: Bruno può andare in giro per questo mondo da solo, non ha bisogno d'altro per esistere, mentre l'essere settantenne non si dà senza qualcuno, Bruno ad esempio, non può girare per questo mondo. Niente è bianco senza essere anche qualcos'altro. In conclusione, la domanda sarebbe stata: "Com'è la retta R2 rispetto ad R1?". Quel "fra di loro" porta a una risposta quasi obbligata: R1 ed R2 sono parallele.
Quando ebbi finito questo discorso, ricordo bene, Bruno mi disse: "Trenta in psicologia, ma in geometria devi tornare".

Riferimenti bibliografici

Granito, C., Scorolli, C., & Borghi, A. M. (2015). Naming a Lego World. The Role of Language in the Acquisition of Abstract Concepts. *PLoS ONE*, *10*(1), e0114615. doi.org/10.1371/journal.pone.0114615.

Il tempo non è un problema di matematica

Ivo Mattozzi
Docente a contratto della Libera Università di Bolzano
Presidente di "Clio '92" – Associazione di insegnanti e ricercatori in didattica della storia

Sunto. *L'articolo espone un ragionamento su tre questioni cruciali della educazione temporale e della didattica della matematica applicata ad essa e alla formazione storica: 1. La inesistenza del tempo e la irrilevanza della matematica nella costruzione del senso del tempo e della concezione del tempo. 2. La non coincidenza degli strumenti di misura con il tempo. 3. La importanza della didattica della matematica nella comprensione del tempo misurato.*

Abstract. *The article argues on three crucial issues of temporal education and the teaching of applied mathematics to it and to the historical formation: 1. The non-existence of time and the irrelevance of mathematics in the construction of the sense of time and in the conception of the time. 2. The non-coincidence of the measuring instruments with time. 3. The importance of mathematics education in learning the measured time.*

1. E se il tempo … Una introduzione

Nel 1990 ho dovuto dare risposta al problema di come delineare un curricolo di educazione temporale. Mi sono azzardato, allora, a sostenere che il tempo non esiste. Ho voluto dimostrare agli insegnanti che è una costruzione della nostra mente che elabora operazioni cognitive per organizzare sequenze e concomitanze di fatti in modo da poter dare loro senso e da poterle correlare con altre sequenze ed altre concomitanze di altri fatti. La conclusione era che tale concezione ci permette di comprendere che anche i bambini elaborano organizzazioni temporali e che la loro mente può essere educata sempre meglio all'interpretazione dei fatti vissuti quotidianamente o dei fatti storici a condizione di esercitarli nell'applicazione degli operatori cognitivi temporali.[1]
Ho voluto combattere contro due misconcezioni che ostacolano il pensiero degli insegnanti impegnati a educare i loro allievi al tempo e a formare il loro pensiero storico. Gli ostacoli alla adeguata impostazione di un curricolo continuativo di formazione delle abilità cognitive temporali li individuavo così:
1. L'abitudine di pensiero che porta a dare al tempo una esistenza propria, ad attribuirgli capacità di agire e, dunque, a pensarlo come ente capace di produrre effetti. Infatti sia nei miti, sia nelle rappresentazioni artistiche come

[1] Riprendo ampiamente Mattozzi (1990) e lo aggiorno.

quelle che raffigurano il tempo come un vecchione con una falce … sia nelle espressioni del senso comune come quelle che attribuiscono al tempo un grande potere di plasmare cose e persone e di modificare situazioni … noi manifestiamo l'idea che il tempo abbia una esistenza indipendente dai fenomeni reali e lo rendiamo capace di molti misfatti o miracoli.
2. La riduzione del tempo al sistema di misura che serve a determinare le posizioni correlative dei fenomeni, delle loro durate e degli intervalli che li separano. Esso trascrive la regolarità ciclica di fenomeni del sistema solare (rotazione terrestre, lunazioni, rivoluzione terrestre) in un sistema di riferimento adatto ad ordinare gli accadimenti sublunari. Ma quando pensiamo il tempo come una grandezza assoluta misurabile e lo identifichiamo col sistema cronologico noi dissociamo il tempo dagli accadimenti, dai mutamenti, dalle permanenze.

Nell'uno e nell'altro modo di pensare il tempo, si cade nell'errore secondo il quale la realtà si compone di elementi ed eventi che si dispongono entro un "ambiente" reale costituito dal tempo o entro un flusso di tempo dissociato da essi. Infatti, abbiamo coniato la metafora del "fiume del tempo" come appropriata per dire che i fatti della vita e della storia fluttuano sulla corrente del tempo. In entrambi i casi pensiamo il tempo come un'entità antecedente ai fatti e "facciamo del tempo un termine indipendente di conoscenza" il che "equivale allo sforzo di trovare consistenza in un'ombra" (Whitehead, 1975, p. 62).

La conseguenza di questo modo di pensare è che occorrerebbe insegnare il tempo in quanto oggetto o materia di studio e che basti apprendere il sistema di misura cronologico per sapere pensare temporalmente.

Ma poiché l'immaginario "ambiente" o "flusso temporale" sono soltanto pensabili, non sono esperibili, non hanno concretezza, una tale concezione del tempo è la premessa per affermare che il tempo non è abbordabile per i bambini, che esso è un'acquisizione di uno stadio molto avanzato di sviluppo cognitivo.

Questo è un modo di pensare che porta solo alla resa. Esclude che i bambini abbiano esperienze delle organizzazioni temporali dei fatti della vita quotidiana.

Ma la rinuncia è inaccettabile poiché ormai il possesso di competenze temporali è presupposto in ogni disciplina insegnata e ciò impone il compito didattico di perseguire l'educazione al pensiero temporale.

Il rimedio contro la tentazione di resa è quello di collocare il tempo sulla sua appropriata base di concretezza. A questa condizione si può pensare educabile il senso del tempo anche nella prima scuola.

Mi è sembrato questo un bel tema da riprendere per un articolo scritto in omaggio ad un amico che è specialista in didattica della matematica. E accetto una nuova sfida, quella di dimostrare che il tempo non è una questione di matematico.

Riprendo dunque la dimostrazione dell'inesistenza del tempo. Poi affronterò il rapporto tra tempo e matematica.

2. L'inesistenza del tempo

Dopo 22 anni, inopinatamente, mi sono sentito dare man forte da titoli quali "Il tempo? Ora sappiamo che non esiste";[2] "E se il tempo non esistesse?";[3] "Il tempo è un'illusione, per quanto tenace".[4]
Altri titoli rivelano, anche, l'estensore del certificato di inesistenza del tempo: "Carlo Rovelli: Il tempo? Non esiste (forse)";[5] "Rovelli: Il tempo non esiste?";[6] "Il tempo non esiste" (Carlo Rovelli, *Il neurone proteso*).[7]
Essi sono usciti tra il 2012 e il 2014 in relazione ad una relazione che il fisico Carlo Rovelli ha svolto al Festival delle scienze di Roma.[8] Il fisico che sa divulgare le conoscenze fisiche, ha svolto un lezione per dimostrare la inesistenza del tempo dal punto di vista della fisica quantistica.[9]
Dopo aver evocato con una linea del tempo la rappresentazione e la concezione del flusso del tempo lineare che fa parte del modo di pensare di ognuno:

> Talmente tanto che possiamo facilmente immaginare un mondo senza degli oggetti, senza le cose, addirittura senza lo spazio, se ci pensiamo sono i nostri pensieri, ma è molto difficile pensarlo senza il tempo, perché la nostra immediata, esperienza del mondo, è il tempo che passa. Per poter pensare il mondo, dobbiamo pensare che i pensieri avvengono nel tempo, uno dopo l'altro. Per cui il tempo è la nostra casa ed è organizzato in questa lunga linea.

Poi passa a dimostrare che tale concezione è sbagliata:

> Bene: questa descrizione del tempo che ho appena dato, non è giusta. È sbagliata. Non è sbagliata per qualche considerazione filosofica sottile o per complicate elaborazioni teoriche. È proprio sbagliata, punto. Sbagliata come se io dicessi:

---

[2] l'Espresso: www.espresso.repubblica.it/visioni/.../10/.../il-tempo-ora-sappiamo-che-non-esiste-l.18509
[3] Il Sole 24 Ore: www.ilsole24ore.com/art/cultura/2012-01-14/tempo-esistesse-175658.shtml?uuid
[4] www.unipd.rt/ilbo/content/il-tempo-e-un'illusione-quanto-tenace, 07 ott 2014.
[5] Succedeoggi: www.succedeoggi.it/2015/02/forse-non-esiste/
[6] Rai Filosofia: www.filosofia.rai.it/articoli/rovelli-il-tempo-non-esiste/14059/default.aspx
[7] https://neuroneproteso.wordpress.com/2012/04/07/il-tempo-non-esiste-carlo-rovelli/ 07 apr 2012 – Trascrizione dell'audio della lezione svolta da C. Rovelli. Le mie citazioni sono estratte da questa trascrizione. Sul web YouTube mette a disposizione il video di lezioni esposte da Rovelli in altre occasioni sullo stesso tema.
[8] Settima edizione del Festival delle Scienze, Roma, dal 19 al 22 gennaio 2012.
[9] Carlo Rovelli è l'autore del libro *Sette brevi lezioni di fisica* (Rovelli, 2014a), accolto talmente bene dai lettori che è arrivato alla ventunesima edizione. Altro suo libro è *La realtà non è come ci appare. La struttura elementare delle cose* (Rovelli, 2014b). Già Einstein aveva asserito che il tempo sia una illusione (Hack, Battaglia, & Buccheri, 2005, p. xxi). L'introduzione e il saggio di Hack et al. (2005) contengono altri riferimenti alle teorie che negano l'esistenza del tempo.

> “La Terra su cui siamo poggiati è ferma”. È una immediata percezione che abbiamo dalla realtà. Molto semplice, molto diretta, molto immediata: la Terra è ferma. Sappiamo che non è ferma, che si muove.

Gli argomenti della sua dimostrazione sono i seguenti:

> Ora, è un fatto, misurabile, anche se piccolo, che se io prendo un altro orologio e lo metto un metro più in basso, aspetto mezz’ora e poi lo guardo, non segna le cinque e mezza. Segna le cinque e mezza meno qualche cosa. Il tempo, è un fatto misurabile, non passa alla stessa velocità un po’ più in alto o un po’ più in basso. La differenza è piccola, dell’ordine di un milionesimo di miliardesimo di secondo, però è misurabile. Oggi abbiamo orologi molto più precisi di questo mio cipollone meccanico. Orologi atomici, orologi al cesio … orologi estremamente precisi, e si misura con relativa facilità, in un laboratorio di fisica, che se io ne prendo due uguali, ne metto uno più alto ed un più basso, aspetto un po’, li guardo e quello più alto è andato più avanti. Quello più basso è andato più indietro. Quest’effetto è vero, reale e misurabile, ed è tanto importante che nei GPS che abbiamo nelle automobili, che funzionano con degli orologi precisi che stanno sui satelliti, è necessario tenere quest’effetto da conto, altrimenti il GPS non funzionerebbe, perché lassù dove ci sono i satelliti con i loro orologi, il tempo corre più veloce. Il tempo va più lento quando mi avvicino alla Terra.

La conclusione è tagliente:

> Però questo ci dice, che quest’idea che il tempo sia una linea, che scorre uniforme, e tutto sta ordinato lungo questo tempo, e qui è una certa ora, è sbagliata. In qualche maniera un orologio che si abbassa, scende, a un certo momento, che segue un altro percorso, più in basso, e poi si riunisce a quest’orologio qui, misura un tempo diverso. Questo vuol dire che l’immagine del singolo tempo che passa, non va bene. È proprio sbagliata, non c’entra niente con la realtà. È una descrizione della realtà che vale sono entro un certo livello di approssimazione molto imprecisa. Ogni percorso nello spazio, si porta il suo tempo. Non c’è un tempo, ci sono tanti tempi.

Se ci badate, è uno strano modo di argomentare, quello di Carlo Rovelli. Deve dimostrare che il tempo non esiste, ma non fa altro che rendere il tempo soggetto delle sue proposizioni. Addirittura alla fine moltiplica il soggetto: “ci sono tanti tempi”. Ma quel che è meno accettabile è che nelle sue proposizioni tempo e orologi coincidono. Il fisico parla dei comportamenti degli orologi a diversa altezza o a diversa velocità come se essi fossero il tempo. Alla fine, però, – dopo aver ragionato sullo spaziotempo einsteiniano e sulla fisica quantistica e sulla rinuncia dei fisici a prendere in considerazione la variabile tempo – riesce a fare a meno di tale coincidenza grazie a Newton:

> La chiarezza su questo punto, la si trova nel libro di Newton, che per primo ha messo tutto in ordine. E Newton dice, in maniera chiarissima: “Vedete, il tempo, noi, mica lo vediamo. Non lo misuriamo. Noi misuriamo posizioni di lancette di orologio, posizione del sole nel cielo, posizione del braccio che si alza, si abbassa … posizione di un pendolo, l’angolo. Tutte queste variabili cambiano e

> quando una cambia, l'altra cambia. Per mettere ordine e descrivere tutte queste variabili, è comodo introdurre una cosa che chiamiamo la variabile tempo e riferire tutto al tempo." […]
> Quindi, quando noi osserviamo il mondo, vediamo solo cose, posizioni di oggetti, valori di variabili, posizioni del braccio, posizioni di lancette, posizione del sole, eccetera, come cambiano le une rispetto alle altre. Ed è tutto. Il tempo lo aggiungiamo noi. Allora, è chiaro che in linea di principio io posso fare a meno di mettere il tempo e scrivere delle equazioni che ci dicono solo come cambiano le cose, una rispetto all'altra, senza il tempo. Quindi, riassumendo. È possibile pensare al mondo senza tempo semplicemente descrivendo quello che vediamo, senza parlare di tempo, […] se rinunciamo al tempo, cioè il tempo non è più né questa linea che scorre, né la tela, resta una descrizione del mondo in cui le cose avvengono, ma non avvengono nel tempo. In cui c'è il cambiamento relativo delle cose, le une rispetto alle altre, ma non c'è il cambiamento nel tempo. Quindi non c'è più il tempo che scorre.

E alla domanda: "perché noi percepiamo il tempo?" risponde così:

> Noi non vediamo il mondo nella sua complessità, lo vediamo molto semplificato. È solo in questa semplificazione, in questa visione approssimativa statistica, che nasce l'ordine dello spaziotempo e, in particolare, nasce l'ordine del tempo lineare. Io credo che questa nascita riguardi, non tanto il mondo in sé, ma il modo in cui noi vediamo il mondo, il modo in cui noi organizziamo il mondo. Questo vuol dire, quindi, che non è un unico Shiva che danza e che tiene su il mondo, ma siamo noi, nella nostra percezione del mondo che creiamo il tempo che passa.

Ho pensato: "Allora mi trovo in ottima compagnia. Posso di nuovo proporre il mio punto di vista storico." Infatti, mi pare che né Newton né Rovelli diano conto di come noi "creiamo" il tempo e, invece, forse, la consuetudine di analizzare e interpretare fatti storici mette in condizione di chiarire come la mente costruisce l'idea di tempo e lo utilizza.

Provate ad immaginare che in questo preciso istante nel quale state leggendo tutto l'universo, quello noto e quello ignoto, si blocchi nello stato attuale. S'immagini che ciascuno di voi s'impietrisca nella posizione di lettura, gli occhi bloccati sulle parole che ora stanno scorrendo, gli orecchi udenti l'ultimo suono percepito; che ciascun vivente si immobilizzi nel gesto che sta compiendo; che il pensiero attuale e la sensazione attuale di ciascun vivente non siano sostituiti da pensieri e sensazioni diverse; che la memoria restituisca un unico ricordo, sempre il medesimo; che ciascuna stella, e ciascun pianeta si immobilizzino nelle rispettive posizioni; che ciascuna cellula di ciascuna creatura smetta di modificarsi …

Si immagini una quiete perfetta, un'assoluta assenza di moto, di eventi, di divenire: tutto perfettamente statico.

Ora provate ad immaginare un osservatore esterno, esente anche lui da mutamenti. Ma a lui concedete il potere di tenere sott'occhio un universo così immobile, così costante nel suo stato di assenza di movimenti e di eventi, di rifletterlo nei suoi occhi e nel suo pensiero, nella sua assoluta permanenza.

Il nostro immaginario osservatore potrebbe avere l'idea del tempo, potrebbe avere elementi di riferimento per misurare il tempo, potrebbe avere la sensazione dello scorrere del tempo? No, l'assenza di mutamenti lo priverebbe della esigenza e della possibilità di avere percezioni di successioni, di durate, di periodi, di cicli, di congiunture …
Nonostante l'assoluta compresenza degli elementi percepiti non potrebbe concepire neanche l'idea della */contemporaneità/,* perché essa è correlativa a quella di */successione/.*[10]
Non avrebbe una realtà che imponesse la costruzione di tali operatori e la loro concettualizzazione.
Il tempo per lui sarebbe annullato, anzi non sarebbe concepibile.
Ma allora, come si formano le operazioni mentali che raggruppiamo con il concetto di "tempo"? Per rispondere dobbiamo immaginare che si metta in movimento quell'universo statico che ho evocato.
Ora immaginiamo che il monotono spettacolo cominci a modificarsi magari in pochissimi suoi elementi, ad esempio che il sistema solare si metta in movimento, ciascun suo elemento astrale seguendo le traiettorie conformi alle leggi codificate dagli astronomi. E immaginiamo che il nostro fantastico spettatore sia dotato della facoltà di osservare i mutamenti delle posizioni relative dei corpi celesti e di tenere a mente le posizioni differenti e di poterle confrontare tra loro e con la posizione attuale. Allora egli avrebbe la possibilità di cominciare a costruire il senso della */successione/* e della */durata/.* Il primo deriverebbe dalla concettualizzazione della opposizione tra i mutamenti della configurazione del sistema e la mancanza di mutamenti nel resto dell'universo osservato. Se poi lo spettatore notasse che la serie dei mutamenti non è infinita ma disposta a ripetersi regolarmente dopo aver raggiunto un certo stato, egli avrebbe la possibilità di concettualizzare come */periodo/* la sequenza dei mutamenti e di appoggiare a tale concettualizzazione sia la previsione dei movimenti che devono tornare a verificarsi sia la possibilità di avere nella successione dei periodi il termine di riferimento per calcolare le durate. I concetti che compongono la categoria /*tempo/* originerebbero tutti dalla osservazione dei mutamenti e delle loro caratteristiche. Ciò che accadrebbe all'immaginario osservatore, accade a maggior ragione a noi che siamo alle prese con serie innumerevoli di mutamenti. L'esperienza e la nozione di mutamento precedono la costruzione della nozione di tempo. Attraverso la presa di coscienza del mutamento, mediante l'esperienza delle modificazioni che si verificano in alcuni aspetti della realtà mentre altri aspetti di essa rimangono i medesimi, possiamo concepire la nozione di */successione/* che è costitutiva, prima di ogni altra,

[10] Con le parole tra // ho inteso indicare non i concetti ma gli *operatori cognitivi* che ci permettono di configurare i rapporti temporali tra i fatti.

della concettualizzazione temporale della realtà.[11] Sopprimendo il mutamento, si sopprime anche l'idea della successione e, dunque, si sopprime il tempo.[11]
Dunque, se non ha una esistenza propria allora il tempo non può essere misurato, contato, segmentato. Non è un oggetto a cui possa applicarsi la matematica. A questo punto, potrei farla finita con il mio contributo. Ma se il tempo non esiste, che cosa è ciò che chiamiamo tempo?
Sforziamoci di non pensare il tempo come una forma innata che si manifesta solo ad un certo stadio di sviluppo cognitivo né come ad un'astrazione che matura soltanto quando il pensiero è pronto a farla germinare.
Occorre pensare al tempo non come a un ente reale, anche se astratto, ma come a una costruzione mentale progressiva, frutto di un apprendimento che gli uomini effettuano sulla base della esperienza e dell'osservazione dei mutamenti e grazie alla traccia che conservano di essi nella memoria.[10] Il tempo in tanto è concepibile in quanto la memoria ci consente di registrare e disporre in serie i mutamenti delle cose, dei corpi, dei sentimenti, dei pensieri, delle istituzioni, delle loro relazioni reciproche …
Se ad ogni istante noi percepissimo soltanto ciò che in quell'istante accade o si presenta, senza conservare la minima traccia degli accadimenti o delle situazioni precedenti, noi vivremmo costantemente e continuamente "al presente", senza avere bisogno però, di costruire l'operatore ed il concetto di /*presente*/ a causa della impossibilità di stabilire un'opposizione tra l'istante o la durata che viviamo e gli istanti e le durate vissuti o da vivere …
Senza la percezione dei mutamenti non potremmo concepire neanche l'operatore e il concetto di */futuro/* perché verrebbe meno la base sulla quale riusciamo a fare previsioni di mutamenti e di persistenze. Insomma, senza la memoria della diversità degli stati delle cose la nostra esistenza si configurerebbe come un passaggio da una situazione all'altra in cui ogni situazione non potrebbe essere concatenata con la precedente e con la seguente.
Non c'è un soggetto, un ente "tempo" che ha fatto accadere i fatti, ma è la nostra mente che pensa i fatti accaduti, se li rappresenta dando loro una organizzazione che chiamiamo temporale.
Perciò, possiamo affermare che la costruzione della nozione di tempo è avvenuta ed avviene a prescindere dalla matematica.

3. La costruzione della nozione di tempo non è matematica

Nelle nostre esistenze noi costatiamo una pervasiva presenza di strumenti che consideriamo scandire il tempo e di mezzi di comunicazione che ci segnalano il punto del tempo nel quale ci troviamo nel nostro fuso orario: calendari, orologi di tutti i tipi meccanici e digitali, ad altissima precisione come quelli al

[11] Altri argomenti a sostegno di questo ragionamento potrei trarre da Hack et al. (2005, pp. 20–35).

cesio e segnali orari di radio, televisione, computer, cellulari. La vita sociale, economica, tecnologica, religiosa, la civiltà materiale in ciascun paese e in tutto il mondo è strutturata e scandita da tali strumenti. L'inevitabilità e l'utilità della loro funzione e del loro uso ci fanno pensare che gli strumenti di misura siano inscindibili dall'oggetto che appaiono misurare, cioè il tempo. Con due conseguenze: 1. che finiamo per considerare i movimenti delle lancette dell'orologio come fossero i movimenti stessi del tempo (come nella lezione di Rovelli); 2. che per l'educazione temporale siano prioritari l'apprendimento della lettura e la comprensione di tali strumenti e che per questo l'educazione temporale non possa prescindere sin dall'inizio dalla lettura e comprensione degli strumenti di misura, il che richiede la formazione di concetti e la soluzione di problemi matematici come prioritari rispetto all'educazione alla temporalità.

Ma essi non sono all'origine della nozione di tempo; anzi, sono una conseguenza della sua costruzione e potrebbero essere aboliti senza che la nostra mente perda la cognizione del tempo. Inoltre, possiamo assumere la visione di antropologi e di filosofi che propongono argomenti per affermare: "*Non vi è nulla di matematico nell'esperienza immediata, reale del tempo*" (Leach, 1973; Cassirer, 1968; Hallpike, 1984).

L'umanità ha passato la maggior parte della sua esistenza senza strumenti di misura, senza calendari, senza clessidra, senza orologi ad acqua, senza meridiane, senza orologi meccanici. Eppure non era una umanità priva di senso del tempo o di un pensiero temporale. Ha svolto le sue attività e ha risolto problemi esistenziali e culturali coordinando le azioni individuali e le attività sociali con i fatti che si svolgevano negli ambienti nei quali si trovava a vivere ed ha elaborato una nozione di tempo senza bisogno di strumenti di misura. Se sfogliamo pagine che hanno per argomento il tempo troviamo innumerevoli conferme alla non dipendenza della temporalità dagli strumenti di misura.

Così in un libro dedicato alla invenzione dell'agricoltura, l'archeologo Jean Guilaine scrive:

> Altro tema: la costruzione del tempo. Delle attività stagionali ritmano già la scansione del tempo presso i cacciatori e raccoglitori [dunque, lungo tutto il processo di ominazione e di vita nel paleolitico]. Con l'avvento dell'agricoltura, la nozione di ciclo annuale assume tanto più peso quanto più l'acquisizione del cibo, dipendente ormai dalla concatenazione semina / germinazione / raccolto / consumo, accentua la nozione di periodicità e costringe, con la costituzione di riserve, a delle previsioni a medio e lungo termine. Parallelamente a questo tempo "economico" si elabora un tempo "sociale" quello delle età della vita, scandito da salti, mutamenti, riti di passaggio. […] Tempo del lavoro dell'artigiano che deve produrre il capolavoro tecnico che deve servire alla valorizzazione dei personaggi influenti. Tempo della memoria, infine, quello della perennità del gruppo e di cui le tombe megalitiche, […] costituiscono le testimonianze più singolari. (Guilaine, 2015, "Du chasseur à l'agriculteur, conscience et notions de temps", p. 3)

Quello che si inferisce o che si sa per i gruppi umani del paleolitico, gli antropologi riconoscono per i gruppi sociali che essi hanno osservato e studiato nel XX secolo. “Secondo Edmund Leach, il tempo per così dire “non esiste” prima dell’introduzione delle feste e degli avvenimenti sociali: in altre parole il tempo viene creato suddividendo la vita della comunità in intervalli rappresentati dai sistemi di classificazione generazionale come le classi di età, ma anche dai matrimoni, dalle cerimonie in genere, le guerre e le razzie” (Drusini, 1999, p. 13).[12]
Anche dopo che sono stati inventati calendari e orologi, dal tardo medioevo e per gran parte dell’età moderna l’umanità ha vissuto “nel mondo del pressappoco” (Koyré, 2000). La letteratura specializzata sul tempo offre un abbondante antologia di casi che dimostrano che le società umane non sentivano bisogno di precisione cronologica. Ecco qualche esempio. Alla fine del XIV secolo (circa 1393) Le Ménagier de Paris scriveva ricette e raccomandava alla cuoca di far bollire qualcosa per il tempo necessario a recitare un Paternoster o un Miserere (Power, 1966, p. 132). Dunque, il tempo di riferimento della durata di un fenomeno era quello della durata di un’azione o di un altro fenomeno. Oppure, bastava stimare il tempo diurno secondo le apparenze del sole: “Circa al sorgere del sole”, oppure “circa dopo il tramonto” erano le annotazioni più frequenti di Gilles de Gouberville, gentiluomo di Normandia, nel suo diario. E quale era la sveglia dopo il riposo notturno? (Febvre, 1947, pp. 399–400). Era il canto del gallo. Ancora nel 1564 soldati che partivano per la guerra portavano con loro un gallo che di notte serviva da orologio (Febvre, 1947, p. 398).

> Le persone non erano ancora state costrette alla precisione dalle dure discipline degli orari che noi conosciamo: orario civile, orario religioso, orario scolastico, orario militare, orario di fabbrica, orario ferroviario. La costrizione è stata tanta che, alla fine, tutti hanno dovuto procurarsi un orologio. Ma riflettiamo che ancora nel 1867, anno dell’Esposizione universale, c’erano in Francia solo 4 milioni di orologi e 25 milioni nel mondo intero: veramente pochi … (Febvre, 1947, pp. 401–402)

Dunque, sono le attività umane che producono il bisogno di tempo e il pensiero del tempo. Ma il termine “tempo” non designa altro che i flussi dei fatti e le correlazioni tra loro che la mente umana rappresenta man mano che avvengono o ricorda una volta che sono avvenuti o ricostruisce grazie alle tracce che i fatti hanno lasciato.
Perché sto sottolineando questo? Perché bisogna farla finita con l’idea che il tempo sia solo il tempo misurato o che gli strumenti di misura del tempo siano

[12] Si veda anche Brelich (2015), che cerca di ricostruire i “primi germi del pensiero calendariale” individuandone i principi fondativi. E mette in evidenza che la periodicità delle feste si ritrova pure presso popoli che mancano di precisi sistemi di computo del tempo.

in rapporto con un oggetto che chiamiamo tempo, come il metro è in rapporto con la stoffa che il sarto deve tagliare o su cui deve segnare i punti delle asole.
Anche tutti gli elementi della cronometria e del sistema di misura delle durate dei fenomeni sono fondati su sequenze di mutamenti: il calendario è basato sui mutamenti delle posizioni apparenti del Sole e della Luna rispetto alla Terra (mutamenti che sono successivi, periodici, ciclici, prevedibili nelle loro ripetizioni), la misura del tempo quotidiano e delle sue frazioni è fondata sui movimenti e, dunque, sui mutamenti regolari, periodici, ciclici di una lancetta fatta girare dalla macchina chiamata orologio o sui mutamenti di un pendolo che, oscillando regolarmente, dà la possibilità di misurare col numero delle oscillazioni l'estensione di altri mutamenti o di fenomeni persistenti tra un mutamento e l'altro. Ed essi sono stati elaborati per rispondere alla necessità di previsione di attività da svolgere ciclicamente come quelle agricole e al bisogno di coordinare le attività sociali sia festive che laiche. Ad esempio, è la invenzione dell'agricoltura che ha prodotto le condizioni per l'invenzione del calendario annuale.

> Così, l'Egitto dell'Antico Impero ci mostra già un'articolazione sofisticata del tempo annuale: la rivoluzione del sole in 365 giorni e un quarto e la sua divisione in periodi di 30 giorni ai quali si aggiungevano 5 giorni "epagomeni" [supplementari], sono frequentemente considerati come l'origine del nostro calendario. Le stagioni comportano 3 periodi di 120 giorni stabiliti in rapporto con le piene del Nilo: inondazione, vegetazione, raccolto. L'inizio dell'anno coincideva con l'inizio dell'inondazione, il giorno nel quale la stella del Cane (Sothis) appariva all'orizzonte (il 19 luglio). La divisione in ore era già adottata, anche se la lunghezza delle 12 ore del giorno e delle 12 ore della notte variava secondo le stagioni, in rapporto della durata del tempo diurno o notturno. Infine, ad un'altra scala, una costruzione del tempo storico è già iniziata. (Guilaine, 2015, p. 3)

La sequenza dei mutamenti degli aspetti del Sole, ciclici e perciò prevedibili, sono stati assunti come riferimenti da mettere in correlazione con flussi di altri fatti non regolari. Dunque, anche la invenzione degli strumenti di misura è la rivelazione di come agisce la nostra mente nella costruzione dell'idea del tempo.
La base "concreta", esperibile della costruzione degli operatori temporali è data dall'osservazione e registrazione dei mutamenti serializzabili. Ma c'è un'altra condizione per l'insorgere dei molteplici operatori temporali. Noi non abbiamo esperienza di una sola serie di mutamenti. I mutamenti che ci capita di mettere in serie sono innumerevoli e tra le diverse serie ci sono relazioni che troviamo significative.
Inoltre i mutamenti non sono né istantanei né totali: tra un mutamento e l'altro si interpongono permanenze, continuità, assenze di mutamento. Infine, i mutamenti riguardano certi aspetti della realtà, mentre altri aspetti di essa si

conservano immutati, in modo tale da farci riconoscere che la realtà stessa è persistente.
La persistenza degli aspetti della realtà che è notabile sia tra due mutamenti sia mentre i mutamenti sono in atto, è all'origine dell'operatore */durata/.*
Durata è, però, un termine ambiguo perché nel nostro linguaggio indica sia una persistenza sia l'estensione misurabile di un mutamento o di un aggregato di mutamenti o di una persistenza o di aggregati di mutamenti e permanenze. Anzi è con questo secondo significato che il concetto di durata si trova impiegato più frequentemente negli studi di psicologia. Esso indica l'estensione di tempo in cui i fenomeni si svolgono. Usando il termine con questa seconda accezione possiamo applicano anche ai mutamenti: anch'essi hanno una durata misurabile in quanto non sono mai istantanei.
Nell'uso storiografico, invece, prevale il primo significato: durata come fenomeno persistente in opposizione a mutamento.
La combinazione di mutamenti e permanenze non è identica per ogni aspetto della realtà. A seconda degli aspetti che prendiamo in considerazione essi sono variamente combinabili in modo da dar luogo a una molteplicità di serie diversamente articolate, sicché ai mutamenti di una serie possono corrispondere permanenze in un altra.
Il fatto che non sia tutta la realtà a cambiare istantaneamente e che, al contrario, ci siano mutamenti che avvengono mentre si prolungano permanenze oppure che si verifichino mutamenti in una serie mentre ne avvengono altri in serie diverse è all'origine degli operatori /*contemporaneità/* e /*periodo/.*
In una sola serie o in serie parallele il pensiero può eseguire tagli in modo che combinazioni diverse di mutamenti e di permanenze si trovino a costituire una estensione alla quale appartengono tutti i mutamenti e le permanenze compresi tra i due estremi: da ciò possiamo astrarre il concetto di periodo e di contemporaneità.

4. Tuttavia la didattica della matematica c'entra con l'educazione temporale

Ho voluto dimostrare che il tempo è stato pensato senza bisogno di matematica e che "nel mondo del pressappoco" si poteva vivere senza strumenti di misura precisi per strutturare le configurazioni temporali necessarie alla vita quotidiana o alla rievocazione del passato. Per organizzare i fatti temporalmente non c'è bisogno di matematica.
Eppure noi applichiamo ai fatti delle etichette che sono numeri che ci consentono di collocarli con precisione l'uno rispetto all'altro nell'organizzazione che diamo loro. E questi numeri che chiamiamo datazioni (con uno dei termini del lessico coniato in relazione all'organizzazione temporale) ci consentono di applicare misure e calcoli, dunque ci obbligano a fare i conti per dare più affidabilità a quella organizzazione.

> Tutta la nostra vita moderna è come impregnata di matematica. Gli atti quotidiani e le costruzioni degli uomini ne portano il segno, e non c'è nulla, fino alle nostre gioie artistiche e alla nostra vita morale che non ne subisca l'influsso.

Queste condivisibili osservazioni del matematico Paul Montel valgono ormai anche quando usiamo gli strumenti di misura del tempo per coordinare attività, per ordinare fatti in successione, per calcolare durate e periodi, per ricostruire storie, per evitare gli anacronismi che destituiscono di fondamento le rappresentazioni che ne fanno gli storici (Febvre, 1947, p. 398). L'ordine temporale diventa più rigoroso quando si assoggetta alle datazioni, cioè ai segni numerici che sono i risultati dell'applicazione di strumenti di misura basati sulle successioni di fenomeni ciclici regolari (lunazioni e cicli delle posizioni apparenti del Sole). Gli strumenti di misura ci permettono di essere precisi nel rilevare successioni e contemporaneità, nel quantificare non arbitrariamente durate, nel segmentare serie di fatti successivi o contemporanei in periodi. Così possiamo rendere le conoscenze intelligenti, significative, affidabili.

Perciò la didattica della matematica può dare la soluzione dei problemi che gli alunni incontrano quando devono capire come funzionano gli strumenti di misura applicati alle linee e ai grafici temporali che usiamo per rappresentare la storia umana o quella geologica della Terra o quella dell'universo. Gli anni e i secoli e i millenni in regressione a partire da un evento considerato fondante del calcolo dei tempi (ad esempio, avanti la nascita di Cristo, avanti l'Egira), la differenza tra uso dei numeri cardinali e ordinali nel conteggio dei secoli (ad es. nel 1492 = alla fine del '400 o alla fine del secolo XV), la necessità di usare le potenze per indicare le grandi quantità degli anni della storia geologica della Terra e degli anni luce della formazione dell'universo, possono essere compresi solo grazie alla combinazione della educazione temporale, sganciata dalla cronometria (Mattozzi, 2009), e della didattica della matematica.

Riferimenti bibliografici

Brelich, A. (2015). *Introduzione allo studio dei calendari festivi* (prima ed. 1955). Roma: Editori Riuniti University Press.

Cassirer, E. (1968). *Saggio sull'uomo. Introduzione a una filosofia della cultura.* Roma: Armando.

Drusini, A. G. (1999), *Il tempo misurato e il tempo vissuto.* In E. Berti (Ed.), *Le dimensioni del tempo nel bambino, nella società, nella memoria*, Atti delle Giornate di Studio per insegnanti, educatori, genitori, Bassano del Grappa, 10–11 settembre 1999.

Febvre, L. (1947). *Le probleme de l'incroyance au XVIe siecle: La religion de Rabelais*. Paris: A. Michel.

Guilaine, J. (2015). *La Seconde Naissance de l'Homme. Le Néolithique.* Paris: Odile Jacob.

Hack, M., Battaglia, P., & Buccheri, R. (Eds.) (2005). *L'idea del tempo*. Introduzione di Battaglia e Buccheri. Torino: Utet.
Hallpike, C. (1984). *I fondamenti del pensiero primitive.* Roma: Editori Riuniti.
Koyré, A. (2000). *Dal mondo del pressappoco all'universo della precision.* Torino: Einaudi.
Leach, E. R. (1973). *Nuove vie dell'antropologia.* Milano: Il Saggiatore.
Mattozzi, I. (1990). *Storia: L´educazione temporale nella scuola elementare.* Progetto di aggiornamento a distanza. Milano: IRRSAE Lombardia.
Mattozzi, I. (2009). *Raccontare il tempo.* In D'Amore B. & Sbaragli S. (Eds.), *Pratiche matematiche e didattiche in aula.* Atti del Convegno Nazionale *Incontri con la matematica n. 23*. Castel San Pietro Terme, 6–7–8 novembre 2009. Bologna: Pitagora.
Power, E. (1966). *Vita nel Medioevo.* Torino: Einaudi.
Rovelli, C. (2014a). *Sette brevi lezioni di fisica*. Milano: Adelphi.
Rovelli, C. (2014b). *La realtà non è come ci appare. La struttura elementare delle cose.* Milano: Raffaello Cortina.
Whitehead, A. N. (1975). Il *concetto della natura.* Torino: Einaudi.

Un buen día a Macondo

Piergiorgio Odifreddi
ex Università di Torino

Sunto. *Si narra di un soggiorno in Colombia e soprattutto della visita a Macondo.*

Abstract. *It tells of a stay in Colombia and especially the visit to Macondo.*

Bruno d'Amore, dapprima collega-amico e poi amico-collega, divide la sua vita (pubblica, perché solo di quella posso parlare con cognizione di causa) in quattro quadranti, determinati dai due assi ortogonali Italia-Colombia e Matematica-Arte.
Contribuire a questo volume in suo onore richiede dunque una scelta del quadrante, e io scelgo quello colombiano-artistico. Certo non perché abbia particolari competenze nei due campi, separatamente o congiuntamente, ma perché è grazie a Bruno e sua moglie Martha che ho potuto trascorrere un periodo indimenticabile in Colombia nel 2015.
Il mio contributo è semplicemente un ricordo della mia visita alla città natale del grande scrittore colombiano Gabriel Garcia Marquez, che ho effettuato durante quel periodo, scoprendo le origini famigliari e sociali del suo grande romanzo *Cent'anni di solitudine,* che ho riletto *in loco*.
Il racconto della mia visita a Macombo-Arcataca mi riporta con la mente alla Colombia e ai giorni passati con Bruno e Martha. Spero sia per loro un ricordo tanto gradito quanto lo è per me, e che non dimentichino … che abbiamo ancora in sospeso una cena in un locale chiamato *Andrés, carne de rés*!
Auguri di buon settantesimo compleanno, Bruno, e un saluto congiunto a te e a Martha.
Santa Marta di Colombia, fondata il 29 luglio 1525, è la più antica città del Sud America. Per la sua invidiabile posizione, affacciata sul mar dei Caraibi e distesa ai piedi della Sierra Nevada, viene chiamata la Perla delle Americhe. Qui gli Spagnoli misero gli occhi sui gioielli degli indios tayrona, alcuni dei quali sono sfuggiti alle loro razzie e si possono ancor oggi ammirare nello straordinario Museo dell'Oro di Bogotà. Da qui partì la folle corsa all'El Dorado, che saccheggiò il semicontinente sudamericano. E qui morì il 17 dicembre 1830 "el libertador" Simon Bolivar, i cui ultimi anni di vita sono stati romanzati da Gabriel García Márquez in *Il generale nel suo labirinto* (1989).
Da Santa Marta un autobus locale, sul quale può capitare di sedere vicino a un gallero che tiene in grembo un paio di galli da combattimento, porta in un paio d'ore ad Aracataca, un paesino che lo scrittore ha reso famoso con il nome di

Macondo. Molti lettori di *Cent'anni di solitudine* (1967) non sanno, infatti, che il mitico luogo descritto nella bibbia del realismo magico sudamericano partecipa della doppia natura di quello stesso movimento letterario.

Cioè, da un lato, è tanto reale da essere addirittura stato invitato come paese ospite alla Fiera del Libro di Bogotà nel 2015. E, dall'altro lato, è tanto immaginario da suscitare un'idea diversa in ciascun lettore del libro di García Márquez.

Ad Aracataca il futuro scrittore nacque nel 1927 e visse la sua infanzia nella casa dei nonni materni, che nel 2010 è stata restaurata ed è diventata un museo. Visitarla significa entrare nel mondo dei Buendía, e conoscere o riconoscere il teatro della saga che copre sei generazioni della famiglia. La prima delle quali è appunto quella dei nonni, che al piccolo Gabriel comunicarono le due opposte visioni della vita che il romanzo fonde insieme.

Il realismo glielo insegnò il nonno, il colonnello Nicolas Márquez, che il nipote descriver`a come "il mio cordone ombelicale con la storia e la realtà". La vita del colonnello fu così complessa e movimentata, che lo scrittore dovette spalmarne gli eventi su più di un personaggio di *Cent'anni di solitudine*. Fu il nonno che, come il patriarca José Arcadio Buendía, da giovane assassinò un uomo in duello, peregrinò in un lungo Esodo e trovò nel 1910 la Terra Promessa in Aracataca, dove farà conoscere al nipote il circo e il ghiaccio. E fu lui che, come il colonnello Aureliano Buendía, combatté con i liberali che persero la Guerra dei Mille Giorni del 1899–1902, e violò ostinatamente il silenzio imposto dal regime sul massacro degli scioperanti nelle piantagioni di banane avvenuto nel 1928.

Il magico lo inculcò invece a García Márquez la nonna, l'affabulatrice Tranquilina Iguarán, che affascinava e terrorizzava i bambini di casa con storie di morti viventi e altre superstizioni religiose e profane. Il mito fondatore di *Cent'anni di solitudine* ricorda che nel 1965 lo scrittore stava guidando con la famiglia per andare in vacanza ad Acapulco, capì improvvisamente come avrebbe dovuto raccontare il romanzo, fece un'inversione a U e tornò a casa a Città del Messico per scriverlo. La mossa vincente fu la scelta di raccontare l'improbabile e il fantastico come se fossero verosimili e reali, alla maniera appunto di sua nonna.

Fu lei a ispirare direttamente il personaggio di Ursula Iguarán, moglie del patriarca e madre del colonnello. Come lei divenne cieca da vecchia, e proprio per questo non poté più accudire i bambini dopo la morte del marito nel 1937. I nipoti lasciarono dunque la casa dei nonni, ma Gabriel non la scordò mai: non a caso, il suo primo progetto letterario fu un romanzo fiume intitolato *La casa*, che vent'anni dopo si tramutò nel suo capolavoro.

Il suo primo libro pubblicato fu invece *Foglie morte* (1955), i cui tre personaggi sono modellati su lui stesso, la madre e il nonno. La storia è già ambientata a Macondo: il vero nome di un'azienda nei dintorni di Aracataca, che aveva un ufficio e un'insegna proprio di fronte alla casa dove il piccolo

Gabriel viveva. Nel romanzo compaiono già il colonnello Buendía, la guerra dei Mille Giorni e la Compagnia Bananera. E un lungo stralcio, pubblicato autonomamente come il *Monologo di Isabel mentre vede piovere su Macondo* (1955), ricorda un vero diluvio del 1932 e anticipa i quattro anni di pioggia che distruggeranno il paese in Cent'anni di solitudine.

All'entrata della mitica casa di Aracataca il visitatore è accolto da uno sciame di enormi farfalle gialle di legno deposte sulle siepi. Era la nonna a dire di vederle volteggiare ogni volta che veniva l'elettricista ad aggiustare le lampadine nella casa. E il nipote le fece volteggiare nel suo romanzo attorno a Mauricio Babilonia, il meccanico di cui si innamora Meme, la prima esponente della quinta generazione dei Buendía.

Oltre le siepi della casa si stende il lungo corridoio, fiancheggiato dal giardino delle begonie. Margot, la sorellina allevata con Gabriel dai nonni, ne mangiava di nascosto la terra per evidenti problemi di disadattamento. Fu poi curata e crebbe normalmente, ma nel mondo immaginario di Macondo divenne l'orfana Rebeca, accolta nella casa dei Buendía come una figlia, allevata con la seconda generazione, e in seguito espulsa dalla casa con il fratello adottivo José Arcadio per la loro relazione quasi incestuosa.

Il motivo per cui Gabriel e Margot furono allevati dai nonni è che, poco dopo la nascita del primo, suo padre Gabriel Eligio García si trasferì a Barranquilla come farmacista, dopo essere stato telegrafista ad Aracataca, nell'ufficio che ancor oggi si può visitare dietro la chiesa. Il suo matrimonio con Luisa Márquez era stato avversato dal colonnello, che non vedeva di buon occhio il pretendente per molte ragioni: era figlio di una donna sedotta e abbandonata a quattordici anni, apparteneva al partito conservatore, non nascondeva la sua natura di cascamorto e aveva già tre figli illegittimi.

La ragazza fu allontanata dagli occhi del pretendente, con la speranza che si allontanasse anche dal suo cuore, ma egli continuò imperterrito a cantarle serenate, scriverle poesie e inviarle telegrammi, e dopo un anno il futuro suocero capitolò. L'epico corteggiamento dei suoi genitori venne dapprima echeggiato da García Márquez in *Cent'anni di solitudine*, nella relazione tra Aureliano Secundo, della quarta generazione dei Buendía, e la nobile Fernanda del Carpio. E fu poi dilatato nel mezzo secolo di struggimento dei protagonisti di *L'amore al tempo del colera* (1985), per scrivere il quale il figlio si fece a lungo raccontare dal padre e dalla madre, separatamente, l'infiorita storia del loro fidanzamento.

Ogni angolo della grande casa ricorda qualche episodio del capolavoro di García Márquez. Ci sono il laboratorio del nonno colonnello, con i pesciolini d'oro che egli modellava. La cucina della nonna, con le caramelle a forma di animaletti che ella preparava. La grande sala da pranzo all'aperto sotto il portico, dove si riuniva la famiglia. Il maestoso albero con le enormi radici, che fornì riparo al vecchio patriarca negli anni della sua demenza senile. La

casetta dei servi, nella quale lo zingaro Melquiades compose le sue pergamene.
Ma anche altri luoghi di Aracataca rimandano a *Cent'anni di solitudine*. Ad esempio, la biblioteca comunale dedicata a Remedios la Bella, della quarta generazione. Il monumento a lei dedicato, nel luogo della sua supposta ascensione al cielo. La stazione ferroviaria, con il treno che trasportò i cadaveri degli scioperanti. E la tomba di Melquiades, ultima fittizia aggiunta al paese reale da parte di un immaginario discendente dei Buendía che veramente vive nel paese.
Ed è proprio il profetico e poetico zingaro a costituire nel romanzo l'alter ego interno dello scrittore esterno. È lui che nella finzione scrive profeticamente e in codice tutta la storia dei Buendía, che solo cent'anni dopo l'ultimo esponente sopravvissuto della famiglia, Aureliano Buendía, riuscirà a decifrare. Troppo tardi, però, perché nel frattempo le formiche si sono mangiate il cadavere del suo unico bambino e il Diluvio Universale ha distrutto Macondo, in un'Apocalisse che fa da contraltare al mito iniziale della sua Genesi.

Refletindo sobre a inclusão das tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática

Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil
Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil

Resumo. *Este artigo discute a incorporação das tecnologias digitais na formação de professores de Matemática no Brasil. Apresentando exemplos de ações que podem ser inseridas em cursos de Licenciatura em Matemática.*

Abstract. *This article discusses the inclusion of digital technologies in initial formation of match teachers in Brazil, and features examples of actions that can be introduced in Mathematics graduation courses.*

1. Introdução

As Tecnologias têm alterado o modo de interação e de pensamento do ser humano em relação ao mundo que o rodeia. Neste período de informatização tecnológica, no qual as atividades têm migrado para o formato digital, a Educação, e a Educação Matemática, também necessitam adequar-se a essa realidade.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996) a Educação no Brasil tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. Desse modo, a Educação e a inserção na sociedade digital implicam em uma adequação da sala de aula à realidade tecnológica, cujo uso da tecnologia pelos docentes é condição necessária para essa adequação.

Embora o Ministério da Educação (Brasil, 2013) considere importante a utilização de tecnologias de qualidade objetivando a melhoria da Educação, o mesmo adverte que o uso de recursos tecnológicos, de forma isolada e desalinhada com a proposta pedagógica da escola, não garante a qualidade da Educação. Ao utilizar as tecnologias para proporcionar condições favoráveis à aprendizagem, o professor deve, antes de tudo, definir o objetivo instrucional desejado para então organizar as ações e recursos para atingir seus objetivos. E, para isto, é fundamental conhecer as possibilidades que as tecnologias oferecem e quais tecnologias são adequadas aos estudantes, ao conteúdo a ser desenvolvido e ao nível de ensino a que se destina.

Nesse sentido esse artigo apresenta uma discussão sobre a importância de incluir, nos cursos de formação inicial de professores, ações que os oportunizem utilizarem as tecnologias em seu planejamento didático. Torna-se fundamental que os professores evidenciem as mudanças no processo de ensino e aprendizagem da Matemática quando se utilizam tecnologias digitais, apontando possibilidades que estes recursos oferecem para a Educação Básica.[1]

2. Formação de professores no Brasil

A responsabilidade em formar professores de Matemática, no Brasil, está a cargo das Universidades, em cursos de Licenciatura. Tais cursos habilitam professores para lecionarem na Educação Básica, na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e a desenvolverem pesquisas na área de Educação Matemática, podendo atuar no ensino superior na formação de professores. Os cursos de Matemática Bacharelado habilitam profissionais para lecionarem no ensino superior e a realizarem pesquisas em Matemática pura.

Importante salientar que os profissionais formados em cursos de Licenciatura em Matemática possuem habilitação para lecionarem nas séries finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º, 9º anos), com estudantes de 10 a 13 anos, Ensino Médio, com estudantes de 14 a 16 anos, na EJA e no ensino superior na área de Educação Matemática.

Os cursos de Licenciatura possuem 3200 horas, distribuídas em 2200 horas para os conteúdos curriculares de natureza científico-cultural, 400 horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso, 400 horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso e 200 horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais. A duração da carga horária deve ser integralizada no mínimo em 4 anos, obedecendo os 200 (duzentos) dias letivos.

Os conteúdos curriculares são distribuídos, segundo as Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática (MEC/CNE, 2001) com as temáticas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica. A parte comum deve ainda incluir: conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática (MEC/CNE, 2001).

A Prática de Ensino deve ser desenvolvida desde o início do curso e são as ações realizadas para desenvolver as competências necessárias à profissão de professor. Salientando-se que as competências para ser professor incluem: saber analisar livros didáticos, saber utilizar tecnologias digitais, saber usar os recursos didáticos, falar em público com desenvoltura, ter domínio de turma, usar a simbologia e linguagem matemática, ter capacidade de manter bom

[1] Educação Básica, no Brasil, engloba os níveis de Ensino Fundamental (alunos de 5 a 13 anos) e Ensino Médio (alunos de 14 anos a 16 anos).

relacionamento com os alunos e colegas, saber se relacionar com os pais, entre outras.

O Estágio Supervisionado de Ensino deve ser desenvolvido a partir da metade do curso, objetiva que o estudante tenha oportunidade de conhecer a escola, seu futuro ambiente de trabalho, dando aulas em uma turma que possua professor titular e com a orientação de um supervisor da Universidade.

As atividades complementares estão distribuídas em atividades de Iniciação Científica (pesquisas com orientação de um professor da Universidade), monitorias em disciplinas do curso, aulas em projetos nas escolas, participação em cursos complementares, participação em congressos da área de Educação Matemática ou Matemática ou Educação Geral.

Ainda, segundo o MEC/CNE (2001) "Desde o inicio do curso o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando sua utilização para o ensino de Matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática".

Neste sentido faz-se necessário discutir as formas de desenvolver, nos futuros professores de Matemática, durante a sua formação inicial, experiências que desenvolvam a competência para atuarem com tecnologias, associadas a metodologias de ensino.

3. Uso de tecnologias digitais na Educação Básica

A integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação mostra-se irremediavelmente associada à necessidade de reforço da profissionalização docente e de uma (re)organização das dinâmicas escolares (Nóvoa, 2007). Segundo o autor torna-se importante perceber que ações se mostram necessárias para promover a efetiva inclusão das TIC no contexto escolar, mais especificamente, estudos de como se pode promover o desenvolvimento profissional docente para trabalhar, com eficiência e sustentabilidade dessa inclusão no planejamento escolar.

Perrenoud (2000), com base no pensamento de Tardif, salienta que as tecnologias demandam e, ao mesmo tempo, oportunizam uma mudança de paradigma, em relação às aprendizagens e não às tecnologias. Para o autor as TIC contribuem com os trabalhos pedagógicos e didáticos porque permitem criar situações de aprendizagem diversificadas.

Segundo o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) (2014) para uma aprendizagem significativa da Matemática, as ferramentas e a tecnologia devem ser consideradas como características indispensáveis para a sala de aula. Consideram que os Computadores, os *Tablets*, podem ser utilizados para reunir dados, fazer pesquisas na sala de aula e para utilizar aplicações que façam cálculos, simulações, assim como para fomentar a visualização, permitindo que os alunos se envolvam com jogos que exijam habilidades para resolução de problemas. Os Computadores e *Tablets*, telefones inteligentes e calculadoras avançadas, segundo o NCTM, tornam acessíveis uma gama de aplicações que auxiliam aos usuários a explorar Matemática, dando sentido aos conceitos e procedimentos, e a envolvê-los com o raciocínio matemático (2014).

Considera-se, portanto, que as TIC se constituem em importantes recursos que auxiliam o professor em seu trabalho docente, colaborando com mudanças significativas na educação.

Nas tecnologias têm-se os dispositivos dedicados, que são aparatos tecnológicos com uma função específica e destinados a uma única finalidade, como o DVD, e os dispositivos informáticos multifuncionais, como os computadores e afins, que em conjunto com um determinado *software* de aplicação, ou aplicativo, adquire as características e funcionalidades específicas para atender a uma determinada finalidade.

Atualmente, para a escolha de um aplicativo, considera-se importante a verificação da característica de *multiplaforma*, ou seja, que esteja disponível para as diversas plataformas de dispositivos informáticos, como o *Android, iOS* e *Windows Mobile* para dispositivos móveis, e *Windows*, *Linux* e *OS X* para os computadores pessoais, possibilitando o uso do mesmo em diversos ambientes tecnológicos.

Nesse sentido um *software* que se adapta a essas características é o Geogebra. A seguir apresentam-se exemplos do uso de tecnologias, em específico o *software* Geogebra.

4. Exemplos do uso de tecnologias digitais no planejamento escolar na Educação Básica

A Figura 1 apresenta a área de triângulos. Apresenta-se um objeto de aprendizagem, desenvolvido no Geogebra, onde é possível que o estudante visualize a transformação do triângulo em um paralelogramo e que perceba que a medida da área do triângulo é a metade da área do paralelogramo. É possível que o estudante realize as transformações optando por uma das alturas do triângulo em relação a uma das bases. Importante salientar que permite ao estudante observar que dependendo da base escolhida, obtêm-se diferentes alturas, permanecendo a mesma medida da área.

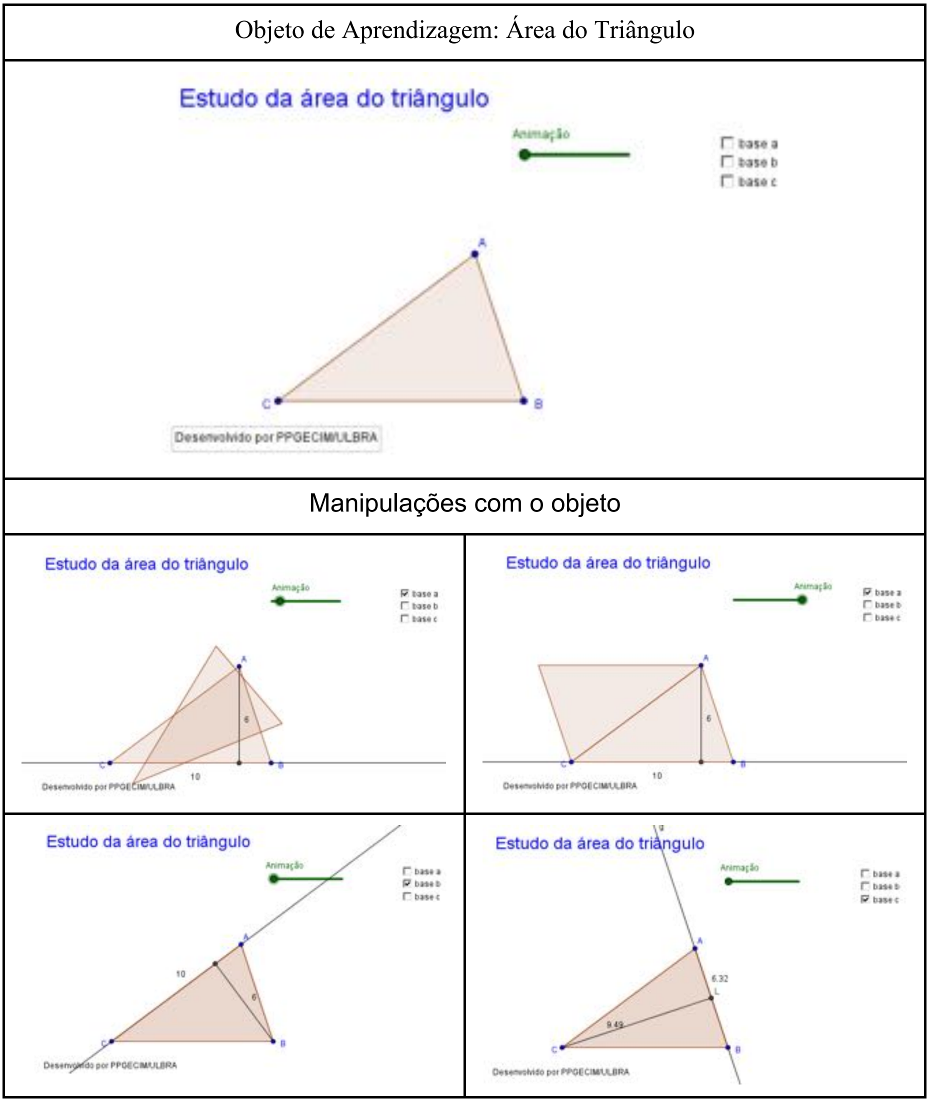


Figura 1. Objeto de Aprendizagem Área do Triângulo.
Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

Outro exemplo, do uso de tecnologias na Educação Básica, é no estudo de funções no Ensino Médio, o professor pode fazer com que os estudantes tracem gráficos, utilizando *software*, por exemplo o *Winplot*, ou o *Geogebra*. O aluno deve perceber os tipos de crescimento e decrescimento, bem como, representar as funções na forma algébrica, geométrica e com linguagem natural. Recomenda-se que os estudantes possam analisar o que acontece quando se altera os parâmetros em uma função, identificando os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando se altera os coeficientes. A Figura 2 apresenta um exemplo com função quadrática.

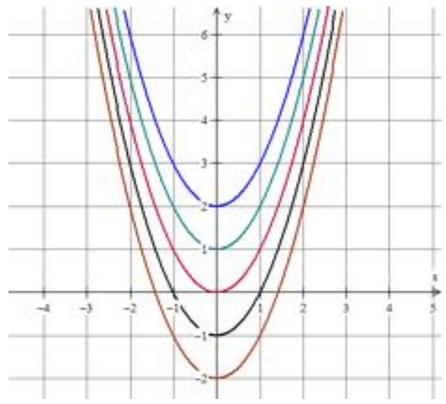
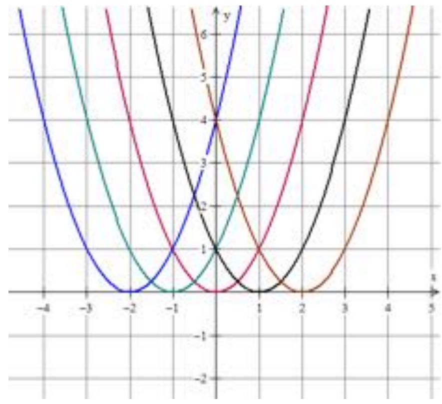
Translação vertical, para $f(x) = x^2$ alterando o parâmetro b.	Translação horizontal $f(x) = (x + b)^2$
	

Figura 2. Translações com função quadrática.
Fonte: Autora.

Para finalizar, ressalta-se que o professor deve estar preparado para inserir esses recursos em sala de aula, mas também não deve ter como objetivo utilizar a tecnologia apenas pelo uso, sem uma intenção clara e bem estruturada. Nesse sentido Barboza Jr (2009, p. 19), ressalta que:

> as tecnologias fornecem vários recursos que podem ser aplicados na educação, porém cada um desses recursos devem ser estudados e analisados pelos professores antes de serem usados em sala de aula, caso contrário, só servirá para informatizar o que era feito no modelo tradicional de educação.

Referências

Barboza Jr., A. T. (2009). *Ambientes Virtuais de Aprendizagem um estudo de caso no Ensino Fundamenta e Médio*. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Brasil (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. doi.org/10.1002/job.

Brasil (2013). *Guia de Tecnologias Educacionais da Educação Integral e Integrada e da Articulação da Escola com seu Território.* Retrieved from http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13018&Itemid=948.

MEC/CNE-Ministério Da Educação, Conselho Nacional De Educação (2001). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Parecer número CNE/CES 1.302/2001.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical sucess for all. Reston: National Council of Teachers of Mathematics*.

Nóvoa, A. (2007). Desafios do Trabalho do Professor no Mundo Contemporâneo. *Palestra de António Nóvoa*, 1–24.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Attività con software di geometria dinamica per l’avvio al sapere teorico

Domingo Paola
Liceo “G. Bruno”, Albenga

Sunto. *Spesso si afferma che l’uso dei software di geometria dinamica e di manipolazione simbolica comporta il rischio di un approccio all’insegnamento-apprendimento meno riflessivo e può ostacolare l’avvio al sapere teorico. In questo articolo presento un esempio di attività con un software di geometria dinamica indirizzata all’avvio al pensiero teorico e alla riflessione critica.*

Abstract. *It is often stated that the use of dynamic geometry software and CAS involves the risk of a less reflective approach to teaching-learning and may hinder the theoretical knowledge. In this article I present an activity with a dynamic geometry software that is strongly addressed to theoretical thinking and critical reflection.*

Nelle varie occasioni di confronto che ho avuto con gli insegnanti durante la mia attività professionale ho spesso avvertito forti perplessità a utilizzare sistematicamente software di geometria dinamica nella prassi didattica. Le obiezioni erano essenzialmente motivate dalla preoccupazione che gli studenti, grazie alle risorse messe a disposizione dai software, consolidassero approcci agli oggetti di studio fondati essenzialmente su metodi poco meditati, del tipo “tentativi ed errori”, con il conseguente indebolimento delle necessarie attività di riflessione, controllo ed esercizio del pensiero critico, fondamentali in ogni percorso didattico che abbia come obiettivo la formazione della persona.
Rischi di questo tipo sono certamente possibili e diventano molto probabili se non c’è, da parte dell’insegnante, una riflessione approfondita sulle modalità di utilizzazione del software in relazione agli obiettivi didattici che si vogliono conseguire. Ciò, però, accade in ogni contesto, anche con le tecnologie più tradizionali. Vediamo due esempi, uno a livello di scuola primaria e uno relativo alla scuola secondaria.
Supponiamo che si desideri far comprendere a un alunno della scuola primaria che una circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno una distanza fissata da un punto detto centro. Se l’insegnante lascerà totalmente liberi gli alunni di effettuare esplorazioni con oggetti rotondi, compassi, mascherine che presentano forme circolari, è probabile che l’eccessiva ricchezza delle esplorazioni sia difficilmente organizzabile e strutturabile da parte degli alunni. Fornire, al termine di queste esplorazioni, la definizione della circonferenza come insieme di tutti e soli i punti che hanno la stessa

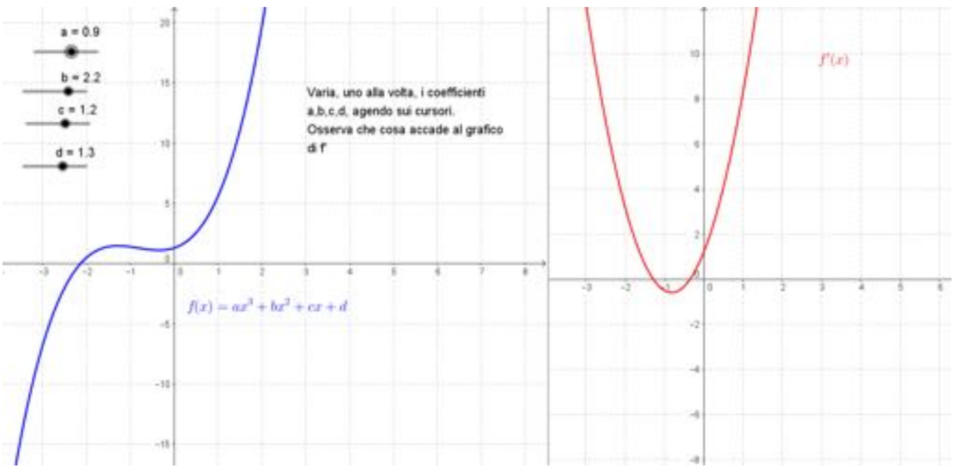
distanza dal centro, difficilmente consentirebbe agli alunni di capire che cosa sia una circonferenza. Infatti gli oggetti rotondi e le mascherine con forme circolari non sono adeguate a evidenziare, durante il tracciamento di circonferenze, il ruolo del centro e del raggio: esse consentono, semmai, di suggerire l'idea di circonferenza come linea a curvatura costante. Invece se l'insegnante organizza l'attività didattica in modo tale che gli alunni siano costretti a limitare le proprie esperienze al tracciamento di linee con il compasso, allora la traccia lasciata dalla punta metallica sul foglio e l'apertura del compasso diventeranno ostensivi formidabili rispettivamente per il centro e per il raggio di una circonferenza (Chassapis, 1999). Dopo diverse circonferenze tracciate sul foglio l'alunno si sarà costruito un significato della circonferenza come insieme di tutti e soli i punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto assegnato, anche se non saprà esprimere con un linguaggio adeguato questa conoscenza. Qui entra in gioco l'insegnante che ha la funzione di prestare le parole, di offrire all'alunno la definizione che ha senso e significato per l'alunno solo se consente di esprimere con un linguaggio appropriato ciò che l'alunno ha già compreso. Naturalmente l'uso di un compasso per tracciare o per confrontare segmenti, per scrivere o, peggio, per punzecchiare il vicino di banco, non potrà giocare alcun ruolo nella formazione del concetto di circonferenza.

Vediamo un secondo esempio, questa volta a livello di scuola secondaria. Supponiamo che l'insegnante abbia come obiettivo quello di avviare gli studenti all'attività dimostrativa in geometria e che decida di utilizzare un software di geometria dinamica per proporre agli studenti problemi di esplorazione e osservazione allo scopo di favorire la produzione di congetture che debbano poi essere dimostrate o confutate.

Se l'insegnante ritiene che l'attività del dimostrare sia in qualche modo legata al convincersi della validità di una congettura, allora l'uso del software di geometria dinamica rischia di giocare contro l'avvio alla dimostrazione. Infatti l'esplorazione condotta con un software di geometria dinamica in genere convince lo studente a sufficienza e sicuramente molto di più di una dimostrazione. Quindi, se l'obiettivo di una dimostrazione è convincere che una congettura sia un teorema, l'uso di un software di geometria dinamica rischia di svolgere un ruolo antagonista all'obiettivo da conseguire. Se invece l'insegnante ritiene che dimostrare significhi spiegare *perché* una congettura è valida e cioè precisare come la proposizione da dimostrare discende dalle ipotesi, dagli assiomi e dai teoremi già dimostrati nella teoria, allora l'attività svolta con un software di geometria dinamica diventa una formidabile occasione di avvio alla geometria; infatti per essere motivato a spiegare *perché* una proprietà è valida lo studente deve innanzitutto convincersi che è valida e ciò può farlo agevolmente utilizzando le risorse messe a disposizione dal software (Paola, 2010).

Questi due esempi introduttivi dovrebbero essere sufficienti a comprendere che una tecnologia, da sola, non produce innovazione o miglioramenti nella didattica. Sono le sue modalità di utilizzazione, coerenti con gli obiettivi da conseguire e con i vincoli del contesto in cui si opera, che possono aiutare a ottenere un successo didattico. Da tutto ciò segue che l'insegnante non può limitarsi a utilizzare o non utilizzare una determinata tecnologia, ma deve studiare quali modalità d'uso sono adeguate a conseguire gli obiettivi che si è prefissato, deve valutare se queste modalità possono essere realizzate nel contesto in cui opera e, infine, deve costruire ambienti di insegnamento-apprendimento fondati su queste modalità d'uso.
Concludo questo mio breve intervento mostrando come l'uso di un software di geometria dinamica, in un contesto di didattica *laboratoriale* (D'Amore, Marazzani, 205; Paola, 2007), possa essere utilizzato per favorire l'avvio al pensiero teorico. Ho scelto come contenuto l'analisi matematica sia per l'importanza che ancora ha nella scuola secondaria di secondo grado sia per mostrare come le risorse mese a disposizione dalle tecnologie potrebbero consentire di anticipare almeno al terzo anno elementi di analisi. In realtà ho realizzato quest'esperienza anche in un secondo anno di liceo scientifico a indirizzo sportivo, con risultati piuttosto interessanti.
Agli studenti è fornito un foglio di lavoro in ambiente di geometria dinamica che:

a) consente di agire su quattro cursori, a, b, c, d che rappresentano i quattro coefficienti di una funzione polinomiale di terzo grado definita da $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
b) presenta sia il grafico della funzione f sia il grafico della sua derivata f' come suggerisce la seguente figura:



Inizialmente gli studenti hanno il compito di variare uno alla volta i valori dei coefficienti a, b, c, d e di osservare come si modificano i grafici di f e della sua derivata, descrivendo attentamente ciò che osservano.

In genere gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi di lavoro, affermano, con un linguaggio non sempre appropriato e del tutto comprensibile, che:

a) il grafico di f' sembra una parabola;
b) modificando il valore di d il grafico di f trasla nella direzione dell'asse y, mentre il grafico di f' non cambia;
c) modificando il valore di c il grafico di f' sembra traslare lungo la direzione dell'asse y, mentre il grafico di f modifica in generale la sua forma;
d) modificando il valore di b il punto di massimo (o di minimo) del grafico di f' sembra descrivere una parabola, mentre il grafico di f modifica in generale la sua forma;
e) modificando il valore di a cambia l'apertura del grafico di f', mentre il grafico di f modifica in generale la sua forma.

In seguito viene chiesto ai gruppi di studenti di cercare di giustificare alcune delle affermazioni prodotte relativamente alla dipendenza del grafico della funzione derivata f' dalla variazione dei coefficienti a, b, c e d.

In genere la maggior parte degli studenti non ha particolari difficoltà a giustificare l'osservazione b): è infatti sufficiente far riferimento alla conoscenza che $f'(x)$ indica, per ogni x, la pendenza della tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x. Infatti se si modifica d, cioè se si trasla il grafico di f lungo la direzione dell'asse y, non si modifica in alcun modo la pendenza della tangente al grafico di f in un suo punto. Ciò implica che, per ogni x, i valori $f'(x)$ non cambiano e quindi il grafico di f' non viene interessato dalla variazione di d.

Per giustificare le altre osservazioni e cioè a), c) e d) è necessario far ricorso alla teoria, cioè alla definizione di derivata e al calcolo simbolico: l'osservazione non aiuta più. È solo il ricorso alla teoria che consente di conseguire l'obiettivo di spiegare *perché* quelle affermazioni sono corrette.

Usiamo quindi il calcolo simbolico per determinare una formula per la funzione f'.

Per definizione abbiamo che:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d - ax^3 - bx^2 - cx - d}{h}
\end{aligned}
$$

Sviluppando i calcoli otteniamo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{ax^3 + 3ax^2h + 3ah^2x + ah^3 + bx^2 + 2bhx + bh^2 + cx + ch + d - ax^3 - bx^2 - cx - d}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3ax^2h + 3ah^2x + ah^3 + 2bhx + bh^2 + ch}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(3ax^2 + 3ahx + ah^2 + 2bx + bh + c\right) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Abbiamo quindi dimostrato che $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Quindi il suo grafico è proprio una parabola, il che giustifica e spiega l'osservazione a).

Naturalmente variare il coefficiente c vuol dire variare il termine noto della funzione quadratica definita da $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ecco perché variando il coefficiente c il grafico di f' trasla lungo la direzione dell'asse y (affermazione c).

Analogamente è chiaro perché variando il coefficiente a della funzione f si osserva che varia l'apertura della parabola: infatti l'apertura della parabola è il triplo di a (giustificazione dell'osservazione e).

Meno immediato è spiegare perché variando il coefficiente b della funzione f il vertice della parabola sembra descrivere esso stesso una parabola. È però possibile determinare le coordinate del vertice V della parabola grafico di f' e poi risolvere il sistema determinando l'equazione cartesiana di V al variare del parametro b considerando a e c costanti:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{3a} \\ y = \dfrac{-b^2 + 3ac}{3a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3ax \\ y = \dfrac{-9a^2x^2 + 3ac}{3a} \end{cases}$$

Quindi il vertice V, al variare di b nei numeri reali, descrive la parabola di equazione $y = -3ax^2 + c$.

In questo caso il calcolo simbolico non solo consente di verificare che le congetture prodotte sono valide, ma, soprattutto consente di capire *perché* le affermazioni degli studenti sono corrette.

Penso sia un'esperienza assai utile e formativa per gli studenti toccare con mano che i linguaggi numerico e grafico, anche se più concreti e familiari di quello simbolico, talvolta non aiutano a capire e che, in questi casi, il linguaggio simbolico serve proprio a capire *perché*, aiutando gli studenti a orientarsi nel labirinto del concreto.

Attività di questo tipo coniugano, percezioni, esperienze e teoria: realizzano in un contesto come quello della matematica la sensata esperienza galileiana, cioè legata agli aspetti percettivi ed empirici, ma guidata dalla teoria. In questo senso, se effettuate con una certa sistematicità, consentono una vera propria *educazione sentimentale* al pensiero teorico.

Bibliografia

Chassapis, D. (1999). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(3), 275–293.

D'Amore, B., & Marazzani, I. (Eds.) (2005). *Laboratorio di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.

Paola, D. (2007). Dal laboratorio alla lezione: descrizione di un esempio. *Innovazione Educativa-Supplemento per l'Emilia Romagna*, 8, 13–20.

Paola, D. (2010). Cabri Géomètre: una risorsa per un insegnamento-apprendimento "sensato" della matematica in *Seminari di geometria dinamica* a cura di Giuseppe Accascina ed Enrico Rogora, Edizioni Nuova Cultura, Roma, 297–326.

Di un paradosso davanti al San Carlino

Carlo Alberto Parmeggiani
Scrittore

A Bruno D'Amore
per i suoi 70 in technicolor

Sunto. *Il breve racconto "Di un paradosso davanti al San Carlino", del tutto opera della fantasia dell'autore e modellato sul genere della finzione letteraria, narra di un ipotetico incontro avvenuto a Roma agli inizi del secolo passato fra uno scrittore e un matematico famosi, vale a dire fra Gilbert Keith Chesterton e Bertrand Russell. Tale incontro, mai avvenuto nella realtà, nella finzione letteraria è narrato da una non mai esistita nobildonna romana, frequentatrice e benefattrice di "artisti, di matematici e poeti", della quale l'autore ne fa giocosamente il verso, fingendo di avere estratto il racconto in oggetto da un altrettanto finto memoriale di tale nobildonna che riporta con le sue parole l'accaduto. Ovvero un incontro che in realtà introduce e finalizza narrativamente un paradosso formulato dallo stesso autore, il Parmeggiani, del quale sono noti, oltreché i suoi interessi letterari pure quelli di carattere matematico. Interessi e lavori orientati all'individuazione delle analogie e delle differenze fra la matematica e la letteratura e quindi delle loro possibili convergenze in un unico sapere che ne contenga e ne espliciti tali somiglianze e differenze nel loro concretizzarsi come arti o discipline apparentemente lontane fra di loro.*

Abstract. *The short story "Di un paradosso davanti al San Carlino", the whole of which is the upshot of the author's imagination, belongs to the literary fiction genre. It recounts the story of a hypothetical encounter which occurred in Rome at the beginning of last century between a famous writer and an equally famous mathematician, i.e., between Gilbert Keith Chesterton and Bertrand Russell. This encounter, which never really took place, in literary fiction is narrated by a Roman noblewoman who never really existed, a frequenter and benefactor of "artists, mathematicians and poets", of whom the author makes playful fun, pretending to have taken the story in question from an equally fake memorial of this noblewoman who recounts what happened in her own words. The meeting in fact introduces and narratively puts an end to a paradox formulated by the author, Parmeggiani himself, whose literary as well as mathematical interests are well known. Interests and works focused on identifying the similarities and differences between mathematics and literature, and hence their possible convergences into a single field of knowledge containing and making explicit such similarities and differences in their taking concrete shape as seemingly distant arts or disciplines.*

1. Premessa

Barbara Datisi Ottoboni Guarnaschelli, nobildonna romana vissuta dal 1871 al 1959, cosmopolita, poliglotta, studiosa di logica, amica e benefattrice di artisti, matematici e poeti, in una bella pagina delle sue memorie pubblicate nel 1941, ristampate e annotate nel 1973 dal nipote Onofrio Guido e intitolate *Vissi d'arte, di logica e poeti*, narra di una vicenda che alcuni studiosi e biografi delle persone in essa citate, ritengono non essersi mai verificata, se non nelle fantasie della nobile signora che vantava amicizie importanti, internazionali e altolocate. La vicenda, il fatto, talvolta contestato e talaltra confermato dalla parentela della Ottoboni Guarnaschelli, nel corso di più anni e fino ai giorni nostri ha tuttavia ingenerato curiosità e ricerche puntigliose da parte di biografi e storici alquanto scrupolosi che a tutt'oggi, nondimeno, non hanno ancora comprovata o del tutto confutata la veridicità delle parole scritte in quelle sue memorie ripubblicate dal nipote.

Il fatto in questione riguarderebbe un incontro avvenuto a Roma nell'agosto del 1907 fra Bertrand Russell, il filosofo e logico inglese, allora ancor giovane assistente al Trinity College di Cambridge, e Gilbert Keith Chesterton, il celebre scrittore e aforista ugualmente inglese, allora ancor giovane e seguito critico letterario e polemista del *Daily News* e prossimo alla pubblicazione di *Ortodossia*, un saggio sullo scontro fra il bene e il male che gli diede notorietà anche oltre confine. Il fatto risalirebbe all'estate di quell'anno già citato, allorquando Chesterton e la consorte Frances Blogg erano ospiti graditi a palazzo Ottoboni Guarnaschelli alla Lungara e Bertrand Russell soggiornava, ancora ai più sconosciuto, in un esclusivo albergo alle spalle di Trinità dei Monti in compagnia di Lady Morrel o forse con tale Constance Malleson, già che la Ottoboni Guarnaschelli nelle sue pagine al riguardo non sa essere precisa, data l'opacità di quel suo frammento di ricordo e il notorio dongiovannismo dell'allora giovane filosofo, matematico e logico inglese.*

Sia come sia, lasciando ad altri il compito di dire l'ultima parola, magari quella vera, sull'incontro dei due famosi e celebrati inglesi, e per non tediare oltremisura il benevolo lettore con fatti marginali che pure era necessario riportare, conviene che tale premessa ceda la parola a un estratto del testo originale delle memorie di Barbara Datisi Ottoboni Guarnaschelli che più sotto viene adesso riportato per quelle pagine di cui ci si è interessati.

* In realtà e grazie alle ricerche in loco, ossia sui registri delle presenze conservati nello scantinato dell'albergo di via Ludovisi, del Professor Ernesto Tagliapietra, biografo degli esponenti di spicco della matematica europea dei primi del Novecento, pare trattarsi di tale signora Eleonora De Marsiliis, pesarese, così almeno pare essersi firmata la signora con cui Bertrand Russell, di cui pure compare la firma dal tratto comprensibile e disteso, pare abbia condiviso in quell'albergo la stanza numero 18.

2. L'estratto

Estate 1907

[…]

In quell'anno romano così particolare accadde pure che GKC,[1] grande poeta e scrittore inglese, gran conferenziere, grande polemista e grande in tutto, persino di statura[2] e nell'altezza di pensiero, da Beaconfield era sceso a Roma con la moglie Frances e mi si presentò una tarda mattinata portandomi i saluti di Tommy Fisher,[3] mio ottimo amico londinese. Dopo averlo accolto nella "Sala dei poeti" e averne apprezzato l'esuberante ma estrema pulizia di modi, mi offrii di essere sua ospite nel suo soggiorno nella Città Eterna che lo vedeva impegnato in colloqui con personalità del Vaticano per dei motivi che mi furono più chiari soltanto una decina di anni dopo, allorché si convertì al cattolicesimo apostolico romano.

Era d'agosto, credo noi fosse ai primi di quel mese. GKC era come preso da un empito di allegria e di fede e smanioso di andare per chiese e oratori e, poiché Frances, soffrendo molto il caldo, preferiva uscir di casa soltanto a sera inoltrata e poiché di pomeriggio molti luoghi sacri erano chiusi, talvolta, dopo la controra, uscivamo lui ed io insieme per qualche scarrozzata sul piccolo landò, tirato da Nerone e condotto da Marino, il nostro diligente uomo di fatica. Scarrozzavamo all'ombra dei palazzi e dei viali alberati, parlando del più come del meno, talvolta dei suoi anni di individualismo esasperato e talaltra delle sue nevrastenie dalle quali pareva essersi salvato con una rinascita alla fede cristiana di cui parlava con estrema gioia.

Fu in una di quelle passeggiate e scendendo giù da via Sistina che a Gilbert venne in mente di fare visita a Bertrand Russell che aveva conosciuto mesi addietro e che sapeva, attraverso il *Daily News* per il quale lavorava, essere a Roma con Lady Morrel o forse la Malleson in vacanza di piacere e alloggiato nell'albergo lì vicino.

[…]

Alla vista gigantesca di GKC, Sir Bertrand ne fu un poco imbrogliato dato che, sebbene non avesse impegni per quella giornata, aveva però un paio di faccende da sbrigare con la signora che lo accompagnava ma che tuttavia avrebbe potuto rimandare, poiché milady era uscita in mattinata, e ancora non era tornata, per delle prove in una sartoria dell'Esquilino. E poi, forse per dirla con una punta di malizia femminile, credo non si aspettasse di rivedere a Roma quel suo conoscente giornalista londinese, del quale forse ebbe il

[1] L'Autrice adotta, qui e in altre parti del suo memoriale, soltanto le iniziali del nome di Chesterton, come lo stesso Gilbert Keith Chesterton amava firmarsi nella corrispondenza e nei suoi numerosi articoli di giornale.

[2] Forse occorre ricordare che Chesterton superava i 190 cm di statura e pesava intorno ai 140 kg.

[3] Ovvero Thomas Fisher Unwin uno dei primi editori di Chesterton che ospitò a Londra la Ottoboni Guarnaschelli da marzo a giugno di quello stesso anno.

sospetto che fosse giunto lì a curiosare sui suoi traffici amorosi per i quali era già noto ancor prima d'essere famoso per i suoi *Principia Mathematica,* di cui alcuni anni dopo lui stesso, Sir Bertrand, mi fece dono di una copia e che io lessi avidamente, apprendendo i fondamenti di ciò che poi sarebbe stata la mia tardiva vocazione.[4]

Nondimeno, dopo essergli stata presentata e sentita la parlata dei romani resa sciocca sulle labbra di GKC che ne voleva imitare la cadenza ma ne sbagliava le parole come ogni forestiero, Russell sorrise alla spiritosa buffoneria dell'amico per il quale pareva avesse dell'affetto e pure stima. E del resto come non poteva non averne per quell'uomo che tre, quattro anni dopo avrebbe scritto i primi *Racconti di Padre Brown* in cui la logica è a dimora come una ramata di rose a capo del cancello di un giardino?![5]

Sir Bertrand dunque gli tese la mano e fu assai cordiale e gentiluomo e nella sua nervosa magrezza gli girò intorno come fosse stato di fronte a un monumento di sei metri, dicendogli e dicendomi di pazientare per un poco, giusto il tempo di scrivere un biglietto per la signora che lo accompagnava e di ultimare e affidare una lettera al *receptionist* dell'albergo perché partisse per Oxford,[6] con la posta della sera.

Usciti dall'albergo e chiacchierando in inglese di ogni cosa finimmo tutti quanti al caffè, credo si chiamasse *Spada*, che allora dava con un posteggio di carrozze sulla facciata del San Carlo alle Quattro Fontane, per ristorarci un poco dal caldo che faceva con dei bicchieri di cedrata e del vino bianco di Frascati che Russell preferì alle limonate. Improvvisamente e dopo aver svuotato d'un fiato il suo bicchiere, GKC si infervorò non poco per quelle ondulazioni, le superfici curve e quei ricavi in movimento di volumi di quella stupenda chiesa a cui s'era di fronte un po' sudati. Quella chiesa che il grande e insuperato Borromini aveva saputo ricavare da uno spazio tanto risicato che i buoni Padri Trinitari gli avevano concesso per fargli far qualcosa e non farlo così morir di inedia e anche di fame, quando invece il Gian Lorenzo, il partenopeo[7] Bernini, se la spassava alla corte dei Papi, disponendo di spazi sconfinati e andava a dire in giro peste e corna dell'infelice svizzero italiano.

---

[4] Nel 1911 dopo la pubblicazione di una sua silloge poetica intitolata *Calicanto*, la Ottoboni Guarnaschelli, benché priva di studi propedeutici appropriati, si dedicò fino alla fine dei suoi giorni allo studio della Logica proposizionale e delle Regole di inferenza, per cui venne pure apprezzata negli ambienti accademici romani e in ciò forse suggestionata anche dal suo stesso nome, dato che "barbara" e "datisi" sono termini che nella filosofia Scolastica indicano due dei diciannove modi del sillogismo aristotelico, ovvero di "prima e di terza figura".

[5] "ramata di rose a capo di un cancello": in tale locuzione la Ottoboni Guarnaschelli richiama al verso dell'incipit di una sua lirica intitolata *Del mio giardino nessuno coglie i fiori*, inserita nella seconda edizione della raccolta *Calicanto*.

[6] Lettera che si sa essere stata indirizzata al filosofo North Whitehead con il quale aveva da non molto iniziato un'operosa e proficua collaborazione.

[7] Di partenopeo Bernini oltre alla nascita aveva l'origine materna, mentre l'origine paterna che gli diede il nome era toscana, di Sesto Fiorentino.

In un momento di evidente ispirazione GKC disse che la fede riesce sempre a fare grandi cose e che ciò lo si poteva constatare da quei bei giochi d'ombra che l'ora meridiana ritagliava fra le nicchie del frontone.
Tirando una boccata di fumo dalla pipa, Sir Bertrand ribatté che quella meraviglia era forse dovuta soltanto al talento e alla bravura di un esperto muratore o scalpellino e lo disse forse più per fare una battuta e tagliar corto su di una questione così grande che lì per lì non se la sentiva di trattare, avendo forse per la testa altri pensieri.
GKC volle ribadire che il talento e la bravura li concede a noi Nostro Signore e sono certa che lo disse per potere continuare a parlare della presenza del divino anche nella mani di un esperto muratore o carpentiere.
Sir Bertrand finse di non aver sentito e per tagliar via sul nascere il germoglio di una discussione sulla quale proprio non voleva o non aveva un granché da dire, chiese a GKC di dirgli come gli andassero le cose, a lui e certi loro comuni amici che non vedeva da parecchi mesi.
Dei comuni amici GKC sapeva molto poco, dato che da quando s'era messo a frequentare un certo padre O'Connor[8] aveva perso di vista molte conoscenze e smesso certe frequentazioni, fra cui G.B. Shaw,[9] Maisie Windermere, Clive Morrison[10] e altri ancora. Sapeva solamente alcune notiziole di personaggi che a me dicevano ben poco e che tenevano conferenze socialiste e libertarie in una *mansion*, in una dimora di Twickenham, un quartiere londinese. Conferenze e riunioni alle quali GKC non era più interessato, sebbene ne riconoscesse l'importanza e il valore dei personaggi che di volta in volta prendevano la parola in quell'assise. A lui, GKC, non gli interessava più partecipare a quelle riunioni. Lui, diceva, stava cercando una altra via d'uscita dai suoi vecchi problemi, soprattutto con l'aiuto di ottime letture dei padri della chiesa che lo guidavano, diceva, sulle giuste strade della vita … Che in fondo, aggiunsi io, intromettendomi fra loro, erano quelle nelle quali sovente ci perdiamo.
A me non parve niente affatto strano che GKC avesse voluto fare una precisazione di quel tipo, già che avendo percorso e attraversato molti aspetti della conoscenza, delle vicende opprimenti della vita, di cui egli stesso me ne aveva parlato di persona e scritto poi nella sua autobiografia pubblicata pochi anni or sono, l'anno della sua dipartita, era convinto di trovare nella fede quella vera vita a cui anelava come meta ultimativa, dato che la sola conoscenza intellettiva, a conti fatti, pareva essere per lui soltanto una fiduciosa previsione di ciò che può anche non accadere e soltanto la fede può rendere certo ciò che con l'intelletto possiamo soltanto prevedere.

---

[8] Ovvero il reverendo John O'Connor, che ispirò a Chesterton il personaggio di Padre Brown.
[9] George Bernard Shaw, scrittore e drammaturgo, premio Nobel per la letteratura nel 1925.
[10] Windermere, Morrison …, nomi di persone note alla Ottoboni Guarnaschelli, ma che attualmente non si è riusciti a identificare pur consultando gli annuari di molti *club* inglesi.

In un monologo che lo impegnò per più di un'ora, io fui meravigliata dal fatto che Bertrand Russell, ateo dichiarato, lo stesse ad ascoltare attentamente, fumando la sua pipa, senza accennare a qualche smorfia di dissenso o richiesta di maggiori delucidazioni riguardo a ciò che Chesterton diceva senza però mai dare a certi suoi concetti una definizione univoca e precisa.
Ma, allorquando, per avvalorare le sue riflessioni e le sue tesi GKC tirò in ballo ciò che è il vero e ciò che è il falso della vita, la quale vita, a suo modo di vedere, aveva una sola verità che è data e percepita dalla purezza d'animo e da chi dice sempre il vero, sir Bertrand si riscosse dalla seggiola di legno su cui stava seduto e disse che per l'uomo che vuole arrivare alla sua meta ultimativa, come il suo interlocutore diceva di volere perseguire nella fede, era del tutto indifferente sapere se un altro dice il vero, oppure una menzogna.
GKC, ricordandosi di certe sue letture e citando alcuni grandi nomi del passato, non fu d'accordo con l'asserzione dell'amico e disse, per irrobustire la sua tesi, che quando uno mente fa sbagliare a qualcun altro la sua propria scelta e la sua strada, mentre uno che dice sempre il vero dà sempre delle giuste indicazioni e aiuta quel qualcuno a raggiungere la sua propria meta.
Russell ribatté che, ammesso che si sappia che cosa si intende con la parola "vero", quello che affermava il suo interlocutore non gli dava l'idea di essere sempre vero e mi parve che lo dicesse con un piglio divertito forse perché cominciava a piacergli quella discussione.
A parte il fatto che il caldo non diminuiva e il vino e le cedrate si infittivano sopra al tavolino e benché fossi un poco frastornata dalla velocità delle parole che la piega del discorso aveva preso, nonostante la mia eccellente conoscenza dell'inglese, ricordo che ebbi l'impressione che Bertrand Russell avesse preso quella discussione come il gioco che fa un gatto con un topo e volesse a quel punto divertirsi con l'amico, discutendo un paradosso che lo stesso GKC lo aveva forse aiutato a formulare.
Ancora mi ricordo bene che ritornati a casa alla Lungara, mentre GKC si andò a rinfrescare nella stanza che avevo fatto preparare per lui e la sua signora, mi ritirai nel mio studiolo e, confidando nella mia memoria prodigiosa, trascrissi sul mio quaderno in quarto le parole che si erano scambiate GKC e Sir Bertrand in forma di dialogo platonico, che ancora mi giravan nelle mente e che mi avevano colpito. Dialogo e parole che trascrissi in un corsivo ancora più accentuato perché mi fosse chiaro, magari molti anni dopo e al ricordo di quella giornata, di avere correttamente riportato quei giri di parole, che più sotto trascrivo fedelmente, così come le avevo tradotte dopo averle udite, sperando di averle ben comprese e per lasciarle a chi forse un tempo leggerà queste mie note:

— *Dunque, senti un po', caro Gilberto* – disse Bertrando[11] Russell – *siamo a Roma e fingiamo che un turista, tale mister Pim, chieda a Pietro e Paolo ... per esempio quei due là ... seduti a quel tavolino ..., se la strada che lui sta per imboccare per andare al colle Quirinale da cui siamo venuti è quella giusta e quella più immediata. E ammettiamo anche che uno dei due dica sempre il vero e l'altro il falso e il turista ignori chi dei due sia quello sincero.*
— *Bene* – interloquì GKC.
— *E diciamo anche che chi mente sia un vero mentitore per natura, una vera carogna, che mente anche quando dovrebbe mentire per definizione, per essere insomma nel suo ruolo.*
— *Molto bene* – soggiunse Gilberto.
— *Allora, supponiamo che Pietro dica sempre il vero e che Paolo sia il mentitore e supponiamo pure che Pietro dica che la strada che mister Pim ha preso è quella giusta e che anche Paolo, per confondere le cose, dica la stessa cosa.*
— *Paolo però dovrebbe dire il contrario di ciò che dice Pietro.*
— *Ma Paolo, vecchio mio, è un mentitore per obbligo e per sua natura, una vera carogna, e chi mente non può essere sincero nemmeno nel mentire. Inoltre, dicendo la stessa cosa del buono, puro e onesto Pietro, Paolo non è che dica il vero, venendo così meno alla sua natura, ma dice il falso di ciò che lui dovrebbe dire, cioè mente nel mentire, come del resto gli compete.*
— *Allora dice il vero ...*
— *Eh, no! ... se Paolo risponde come Pietro, finisce ovviamente che lo contraddice, poiché mister Pim non sa ancora chi dei due è un mentitore, ma sa che uno dice il falso e l'altro il vero. Inoltre, sapendo noi che Pietro dice sempre il vero, Paolo non viene meno alla sua natura, perché egli può dire il contrario del vero, ma anche il contrario del non vero, poiché se dice il falso di una cosa falsa, non dice una verità, ma un'altra cosa che puoi chiamare Alfredo.*
— *Spiegati meglio, per favore, mi sfugge qualche cosa.*
— *Se dico che una mela è un sapone da bucato, dico una falsità e se dico che è falso che sia falso che una mela sia un sapone da bucato, non dico che una mela è una mela, cioè una verità, ma soltanto che dire che una mela è un sapone da bucato è falso, sono stato chiaro? ...*
— *Forse ho capito.*

[11] "Gilberto, Bertrando": i nomi propri in lingua inglese del dialogo sono stati italianizzati dall'Autrice dopo i processi di autarchia e di italianizzazione dei nomi stranieri voluti dal regime fascista.

— *Allora proseguiamo e diciamo che essendo che Pietro dice il vero, dicendo che mister Pim è sulla giusta strada, Paolo allora dice il falso confermando le parole del buon Pietro e dunque è vero e falso insieme, la qual cosa non può essere vera, essendo che* tertium non datur, *come un tempo dicevano qui a Roma.*
— *Ma tuttavia è vero che la strada è quella buona.*
— *Questo lo dici tu che sai chi è dei due quello sincero. Ma se Paolo dicesse invece che la strada che mister Pim ha preso non è quella buona, come secondo te dovrebbe dire, confermerebbe le parole del buon Pietro, non venendo meno al suo compito di contraddire Pietro, ma venendo meno a quello di mentire, all'esser obbligato a dire menzogne, come abbiamo detto per definizione e visto che egli mente anche nel mentire.*
— *E quindi?*
— *Voglio dire che dicendo il falso egli finisce col dire una cosa vera.*
— *Quindi, per farla corta e volendo forzare un po' le cose, perché fa caldo è e il vino già comincia a farsi sentire nelle vene, potremmo dire che un grado di falsità può confermare il vero, ma considerando la falsità come l'opposto della verità, essa non può confermare alcunché di vero.*
— *E allora?*
— *Allora il povero mister Pim, turista o pellegrino, non saprà mai chi sia dei due quello che dice sempre il vero e farà bene ad andar per la sua strada, senza chiedere conferme o indicazioni, dato che, se nel caso che abbiamo fatto, se Pietro dice il vero e Paolo il falso, Paolo ha più possibilità di Pietro, che dice solo il vero, di dire il falso ma anche il vero, così come potrebbe dire il vero del falso e il falso del vero.*
— *Però si potrebbe ipotizzare che Paolo dica il falso dicendo invece il vero.*
— *Sì, lo si può dire.*
— *E allora?* – chiese infine GKC.
— *E allora voglio dire che si crede e non si crede in qualcuno che ci possa dire il falso oppure il vero e che è inutile chiedere o cercare in qualcun altro la conferma di una fede o la bontà della strada sulla quale si cammina ... È solo un problema ... Si cammina e non si cammina, si ha fede e non si ha fede e non c'è il terzo escluso ... Credere o non credere in qualcosa o in qualcuno è un semplice atto di coscienza che non si sa chi appartiene ... Inoltre poiché mister Pim chiedeva se la via che sta per imboccare oltre a esser quella giusta era anche quella più immediata, beh!, allora il problema è bicornuto, si infittisce ... Però ... però, vi*

> *prego amici miei, adesso basta! ...* – si interruppe Bertrando all'improvviso – *Alziamoci da qui! ... Non ho più tabacco per la pipa ...* – E dopo aver pagato il vino e le cedrate, ce ne andammo ancora sudaticci e spensierati alla carrozza, sulla quale Marino si era beatamente appisolato, mentre Nerone teneva ancora il muso dentro al sacco della biada.

E questo è quanto compare in quella nota, scritta in quella lontana e calda estate e che la mia veloce trascrizione di allora ha fin qui, nel giugno del 1939, riportato.

Carlo Alberto Parmeggiani è autore del libro *Cifre narrative* pubblicato nel 2015 (Milano-Udine) con una prefazione di Bruno D'Amore.

Avventure della matematica fra metrica e filologia

Emilio Pasquini
Professore emerito
Alma Mater Studiorum, Università di Bologna

Sunto. *L'autore parte dalla morfologia dei testi letterari nelle sue forme più semplici (la scuola di Vl. Propp e di G. Rodari) per arrivare alla "grammatica" del Decameron di Tz. Todorov, con le sue formule algebriche, e all'individuazione di schemi e processi matematici nello studio della topica e nella critica testuale. Si passa poi alle possibili applicazioni matematiche nel settore della metrica, fra isosillabismo e anisosillabismo, rime e assonanze, per finire con i sistemi numerici sottesi alle terzine della Commedia dantesca e con le simmetrie o i parallelismi ravvisabili nel settore addetto all'autonomia del significante, cioè all'orchestrazione dei suoni in poesia, da Dante a Valéry.*

Abstract. *The author starts with literary morphology in its simplest form (the school of V. Propp and G. Rodari), and moves to T. Todorov's 'grammar' of the Decameron with its algebraic formulae in order to identify mathematical schemes and processes in the study of literary topoi and textual criticism. The essay subsequently discusses the possible application of mathematics in the area of metrics, between isosyllabism and anisosyllabism, rhymes and assonances; it also analyses the numerical patterns underlying the tercets of Dante's Commedia as well as the symmetries or parallels emerging from the 'autonomy of the signifier', that is the organisation of sounds in poetry, from Dante to Valéry.*

Sono lieto di poter tributare un tenue omaggio all'amico e collega Bruno D'Amore (il quale ha saputo magistralmente coniugare matematica e letteratura, specie in rapporto a Dante), traendo spunto da una mia inedita lezione sul tema *Matematica fra metrica e filologia*, tenuta qualche anno fa a un convegno di matematici. Ma una premessa è d'obbligo. Chi scrive di qualche traguardo può vantarsi, ma certo non di una sua competenza matematica, per quanto modesta. Un eccellente liceo classico (il "Galvani" di Bologna) gli ha trasmesso l'essenziale dei programmi vigenti negli anni Cinquanta del secolo scorso (geometria, algebra, trigonometria, eccetera); ma oggi egli avrebbe qualche difficoltà a risolvere un'equazione, mentre non può dimenticare l'emozione di quando a quindici anni comprese la bellezza del teorema di Pitagora.

Eppure, nel suo mestiere di filologo e di studioso della poesia italiana fra Due e Novecento, dunque di esperto di fatti metrici, egli ha avuto spesso occasione di fare ricorso alle risorse della matematica, a proporzioni, insiemi, e via dicendo.[1] Così, ci si avvia ad una lettura programmata del testo letterario, dove il veicolo euristico che connette i tre campi convergenti in quell'esperienza è da identificare nel termine "morfologia", meglio ancora "topica": una sorta di "anatomia comparata" che si risolve in una "morfologia funzionale" della letteratura. Si parte dalla "morfologia della fiaba", sulla scorta di Vladimir J. Propp (1928, trad. it. 1966) e magari anche di Gianni Rodari, saggiata in Esopo, Fedro, La Fontaine, Grimm, Trilussa, Calvino. E si giunge alla "narratologia", con tutte le possibili applicazioni ai testi letterari dei meccanismi della fiaba, per esempio – nella scia di Tzvetan Todorov (Todorov, 1969) – sul capolavoro del Boccaccio, a partire dalla novella delle papere narrata nel prologo della IV Giornata. Sul piano del "macrotesto", si possono applicare al *Decameron* gli assi cartesiani, ponendo sull'asse verticale *alfa* (ordinate) i 10 personaggi-narratori e sull'asse orizzontale *beta* (ascisse) le 10 novelle raccontate da ciascuno di loro, alla ricerca di eventuali corrispondenze (Boccaccio si differenzia in questo dal Chaucer dei *Canterbury Tales*, con l'eccezione di Dioneo). Oppure l'asse *alfa* rimane immutato e l'asse *beta* è costituito invece dagli argomenti delle singole giornate, alla scoperta di possibili rapporti fra i novellatori e gli argomenti delle singole giornate (qui invece Boccaccio trova riscontro in Chaucer, almeno per ciò che riguarda i tre novellatori, Filostrato, Dioneo e Panfilo). Una volta acquisita, a livello strutturale, la fondamentale distinzione dei formalisti fra "soggetto" (il racconto nella sua articolazione dinamica) e "fabula" (il racconto nel suo statico contenuto narrativo), si passa all'analisi funzionale del soggetto puntando su sequenze e micro sequenze, nuclei ed espansioni. Può essere utile schematizzare al massimo il funzionamento di un racconto, adoperando queste sigle: le ultime lettere dell'alfabeto (**X Y Z** ecc.) per i personaggi; le prime lettere (**A B C** ecc.) per le qualità degli stessi; **–A –B –C** ecc. per la negazione delle qualità; **des** per il progetto di un'azione; **a** per modificare una situazione, **b** per compiere un delitto, **c** per punire un delitto; infine → per il risultato di un'azione. Puntiamo ora (con la scorta di Todorov, il quale privilegia la **a**, cioè la modifica di una situazione squilibrata di partenza) sulle quattro novelle di Calandrino, così schematizzabili:

XA + XB ----> (X-A) des ---> Ya ---> X-A

Cioè: Calandrino (**X**) è felice (**A**) ma è anche sciocco (**B**), situazione di squilibrio che Bruno e Buffalmacco (**Y**) vogliono modificare (**a**) con un progetto mirato (**X-A des**) perché il collega, pur restando sciocco, perda almeno quella sua assurda felicità. Veniamo alla più complessa novella di Andreuccio da Perugia (**X,** privo di astuzia, **-A**, ma provvisto di 500 fiorini, **B**), dove la prima macrosequenza si può così sintetizzare (**Y** è naturalmente l'astuta siciliana):

[1] Non poco gli ha giovato l'esperienza vissuta in anni ormai lontani accanto al matematico Francesco Speranza e alla storica della lingua Maria Luisa Altieri Biagi (si veda: Altieri Biagi, Pasquini, & Speranza, 1979, pp. 137–146).

X-A + XB + YA + Y des B ---> Ya ---> X-B + YB

Vi risparmio lo schema, assai più intricato, della seconda macrosequenza, dove questa specie di algebra celebra i suoi trionfi, preferendo arrivare a una sintetica formula riassuntiva, che offre il succo di tutta la storia:

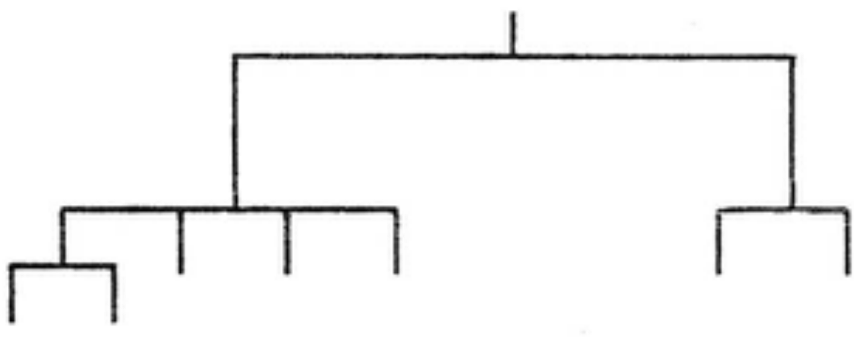
X-A + XB ---> XA + XC

Cioè: un mercante ingenuo, ma titolare di una ricchezza in contanti, giunge, dopo mille vicissitudini, a diventare finalmente astuto e a compensare la perdita dei 500 fiorini con l'acquisizione di un gioiello tanto più prezioso. Questo tipo di analisi ovviamente non basta, in quanto occorre gradualmente passare dalla topica (il mondo alla rovescia, il paesaggio ideale, le metafore archetipiche, eccetera) alla storia, allo stile individuale di un testo, attraverso un approccio scientifico ai successivi livelli di lettura. Può essere istruttivo studiare i passaggi graduali dall'immagine omerica (nell'*Iliade*) delle stirpi degli uomini paragonate alla caduta autunnale delle foglie a quella di Ungaretti, *Soldati*, nell'*Allegria*:

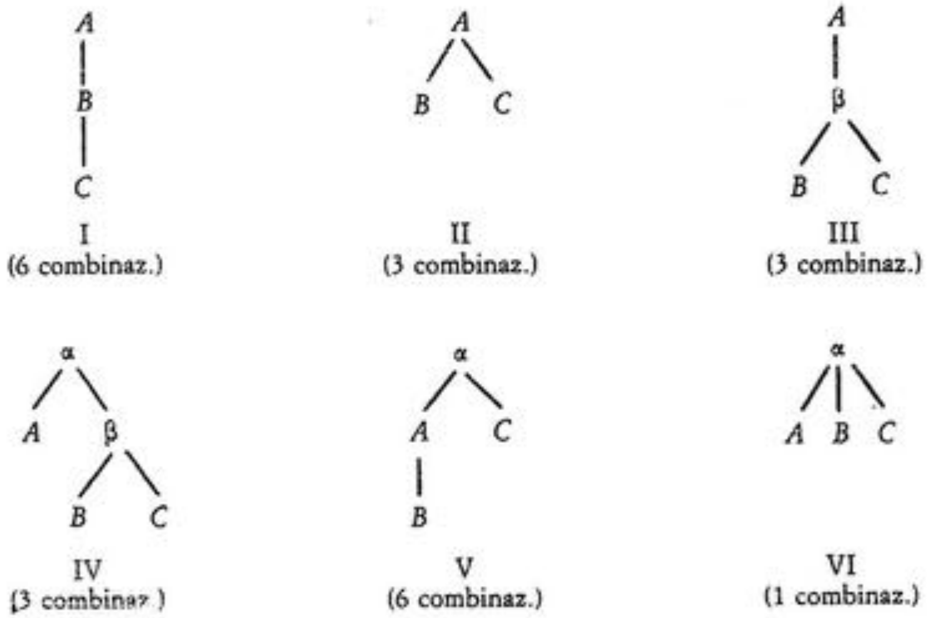
Si sta come
d'autunno
sugli alberi
le foglie

ma già prima a *Imitazione* di Leopardi: «Lungi dal proprio ramo, /povera foglia frale, / dove vai tu? …» (con quel che segue).

Si capisce, dunque, l'importanza del superamento del paradigma naturalistico con cui i positivisti applicavano lo schema dell'albero genealogico alla diffusione dei motivi fiabeschi o novellistici:



Del resto, esso è molto simile allo *stemma codicum* messo in atto dal metodo del Lachmann, attraverso l'individuazione di errori e lacune comuni, come strumento indispensabile (ancora oggi, nell'ecdotica o critica del testo, non senza correzioni di rotta) per rappresentare la genealogia dei testimoni (manoscritti e/o a stampa) di un testo di cui si sia perduto l'autografo e si siano conservate soltanto delle copie. Nella sostanza, ci si può trovare davanti a questi 6 tipi essenziali, che rispecchiano la prevalenza di tradizioni bipartite (schema a due rami, che comporta la necessità di una scelta dolorosa e difficile), rispetto alla più rara tripartita, la quale consente una scelta pressoché sicura (due rami contro uno):



Tutto questo può condurre a conclusioni abbastanza tranquille, quasi matematiche, purché la trasmissione verticale non venga turbata dalla cosiddetta trasmissione orizzontale, con fenomeni diffusi di "contaminazione" (si veda almeno: Avalle, 2002): vi risparmio, a questo punto, il ragguaglio sui vari tipi di analisi statistiche messe in campo dai filologi per combattere questa malattia (la quale convive per giunta con fenomeni di poligenesi e con possibili innovazioni di copisti).
A questo punto, non potendo certo trarre esempi esaustivi dall'universo letterario, vediamo le possibili applicazioni "matematiche" nel settore della metrica, ponendoci davanti un certo numero di testi poetici. Qui è dunque in causa il rapporto con la musica: uno dei miei maestri, Carlo Del Grande, dichiarava di essere stato fortemente agevolato nello studio dei lirici greci dalle sue competenze musicali, le stesse di cui lamentava la carenza Gianfranco Contini, che pure è stato un geniale metricologo, non solo nei suoi *Poeti del Duecento*. Di fatto, chi ha indagato la varietà della terzina dantesca non può non aver fatto leva su sistemi e schemi matematici; mentre chi studi la poesia moderna, soprattutto affrontando quella che Hans Friedrich battezza come "linea musicale", non può non fare i conti con rapporti numerici. Un teorico della comunicazione come Roman Jakobson definiva la funzione poetica proprio in termini di simmetrie e parallelismi, a partire dalla geniale

formula pubblicitaria (**I like Ike**) della campagna presidenziale che portò alla vittoria il generale Eisenhower (**Ike** era appunto il suo soprannome). Ma già un filosofo come Novalis rifletteva sul fatto che nel linguaggio poetico "avviene come per le formule matematiche: elaborano un mondo per sé, giuocano soltanto con se stesse".
Il rapporto con la musica coinvolge anche il binomio ritmi-rime proiettandolo in un orizzonte duplice, in quanto diviso fra un versante colto dominato dall'isosillabismo e dalla rima e un versante giullaresco dominato dall'anisosillabismo e dall'assonanza. Ecco un esempio duecentesco del primo tipo, un sonetto di Giacomo da Lentini, in siciliano toscanizzato, costituito da due quartine e da due terzine in endecasillabi perfetti con regolare intreccio di rime, alternate nelle quartine e incatenate nelle terzine (**ABAB.ABAB.CDC.DCD**):

Io m'aggio posto in core a Dio servire,
com'io potesse gire in paradiso,
al santo loco ch'aggio audito dire
u' si mantien sollazzo, gioco e riso.
Sanza mia donna non vi voria gire,
quella c'ha blonda testa e claro viso,
che sanza lei non poteria gaudere,
estando da la mia donna diviso.
Ma no lo dico a tale intendimento,
perch'io peccato ci volesse fare;
se non veder lo suo bel portamento
e lo bel viso e 'l morbido sguardare:
che lo mi teria in gran consolamento,
veggendo la mia donna in ghiora stare.

Ed ecco un altro esempio dello stesso secolo tratto dalla canzone del Castra, ricordata da Dante nel *De vulgari eloquentia*, con versi in maggioranza decasillabi alternati con endecasillabi, dove il dialetto è il marchigiano:

Una fermana iscoppai da Cascioli:
cetto cetto sa gia in grand'aina
e cocino portava in pignoli
saimato di buona saina.
Disse: "A te dare' rossi treccioli
e operata cinta samartina
se co meco ti dài ne la cabba …".

Nel versante giullaresco non funzionano spesso né le rime, sostituite da assonanze, né i ritmi, irregolari e spesso casuali (e in quel caso la musica serviva a colmare i vuoti). Siamo lontanissimi da Dante, che pure frequentava simili testi.

Si pensi alla varietà della terzina dantesca, pur nella sua suprema regolarità. Ci sono dietro sistemi numerici, più o meno complessi. Ad esempio (*Paradiso* XIV 28 ss.), la triplice icona del *Gloria*, ribadita in direzione ascendente e poi discendente:

Quell'uno e due e tre che sempre vive
e regna sempre in tre e 'n due e 'n uno,
non circunscritto, e tutto circunscrive,
tre volte era cantato da ciascuno
di quelli spirti …

Dunque 1, 2, 3 e 3, 2, 1. Più complesso lo schema matematico che sta dietro il discorso di Salomone nello stesso canto del *Paradiso* (XIV 37 ss.), a proposito della resurrezione della carne e del rapporto fra la luminosità delle anime ricongiunte col corpo e la grazia divina:

Quanto fia lunga la festa
di paradiso, tanto il nostro amore
si raggerà dintorno cotal vesta.
La sua chiarezza séguita l'ardore;
l'ardor la visïone, e quella è tanta,
quant'ha di grazia sovra suo valore.
Come la carne glorïosa e santa
fia rivestita, la nostra persona
più grata fia per esser tutta quanta;
per che s'accrescerà ciò che ne dona
di gratüito lume il sommo bene,
lume ch'a lui veder ne condiziona;
onde la visïon crescer convene.
crescer l'ardor che di quella s'accende,
crescer lo raggio che da esso vene …

In altre parole, allo stato attuale lo splendore è in proporzione all'ardore di carità, l'ardore in proporzione alla visione di Dio, la visione stessa in rapporto alla Grazia; ma dopo la Resurrezione dei corpi, l'aumento della Grazia si tradurrà in un aumento della visione di Dio,, e questa in un aumento della carità, la quale finalmente si attuerà in un accrescimento della luminosità del beato. Quasi scontata la formula matematica qui messa a frutto, uno schema di equivalenza fra una serie proporzionale **1:2=2:4=4:8=8:16** e la serie retrograda **16:8=8:4=4:2=2:1** (ovvero, se la si considera "maggiorata": **32:16=16:8=8:4=4:2**). Insomma due catene di proporzioni in simmetria speculare, quasi a simulare un ritmo circolare di ballata.
Veniamo a un minimo di campionatura per la lirica moderna, dove fungono da guida il libro omonimo di Hugo Friedrich (1958), accanto a quello di Gian Luigi Beccaria (1975), sullo sfondo della teoria della comunicazione elaborata

da Roman Jakobson (si veda: Jakobson & Heilmann, 1966): la funzione poetica, in quanto concentra l'attenzione sulla qualità del messaggio, si fonda soprattutto su analogie, simmetrie, parallelismi (in primis, la rima; ma si ricordi anche il celebre slogan «***I like Ike***», quintessenza del linguaggio pubblicitario).
Si dia per scontato che anche molto tempo prima delle teorizzazioni otto-novecentesche gli scrittori fossero consapevoli delle potenzialità creative del linguaggio poetico, anche se si deve aspettare Mallarmé per leggere un'affermazione quale «i versi non si fanno con le idee ma con le parole» (Friedrich, 1958, p. 124). Non a caso Beccaria comincia con Dante; il quale avrebbe potuto scrivere (a *Paradiso* XXIII 25 ss.):

Quale nei firmamenti sereni
la luna splende tra le stelle etterne
che adornano lo ciel per tutti i seni …

ma in realtà ci ha lasciato il miracolo di uno spartito fonosimbolico costruito sul valore fonico (alla Rimbaud) della *i* come icona della luminosità:

Quale ne' plenilunïi sereni
Trivïa ride tra le ninfe etterne
che dipingon lo ciel per tutti i seni …

Questo, dunque, senza che fosse già sulla scena un certo Baudelaire, il quale definiva la poesia nei termini di una «sorcellerie évocatoire», cioè "stregoneria evocativa".

18. Nessuno fra gli antichi, in ogni caso, avrebbe giocato spudoratamente con la magia ipnotica dei suoni come Paul Valéry:

Patience, patience,
patience dans l'azur!
Chaque atome de silence
est la chance d'un fruit mûr.

Che potrebbe anche visualizzarsi in questo modo:

PATIENCE, PATIENCE,
PATIENCE DANS L'AZ**UR**!
CHAQUE ATOME DE **SIL**E**NCE**
EST LA **CHANCE** D'UN FRUIT M**UR.**

Suoni ridotti a numeri, per una poesia che si separa dal cuore, che scinde la forma dal contenuto. Allo stesso modo né Dante né Petrarca avrebbero mai paragonato lo stile di un poeta ai prodigi della matematica, come fa Baudelaire, dove tuttavia il numero 9 ha una funzione mistica (ivi, p. 51) che potrebbe ricordare certe simbologie dantesche. Ma qui davanti a un pubblico di addetti ai lavori non mi resta che rinviare all'intero paragrafo di Friedrich dal titolo *Concentrazione e consapevolezza della forma: lirica e matematica* (ivi, pp. 39 ss): dove per dire qualcosa di nuovo occorrerebbe forse abbinare le competenze di un filologo e di un matematico. Da ultimo mi si consenta ancora il rinvio a un bel libro uscito qualche anno fa, per il quale ho avuto l'onore di stendere la prefazione: Stefano Beccastrini e Maria Paola Nannicini (2012). Altro non saprei aggiungere: *sat prata biberunt.*

Riferimenti bibliografici

Altieri Biagi, M. L., Pasquini, E., & Speranza, F. (Eds.) (1979). *Per una didattica interdisciplinare nella scuola media*. Bologna: Il mulino.

Avalle, D. S. (2002). *La Doppia verità*. Tavarnuzze: Edizioni del Galluzzo.

Beccaria, G. L. (1975). *L'autonomia del significante: Figure del ritmo e della sintassi, Dante, Pascoli, D'Annunzio*. Torino: G. Einaudi.

Beccastrini, S., & Nannicini, M. P. (2012). *Matematica e letteratura: Oltre le due culture*. Trento: Centro studi Erickson.

Friedrich, H. (1958). *La struttura della lirica moderna*. Milano: Garzanti. (Lavoro originale pubblicato nel 1956).

Jakobson, R., & Heilmann, L. (1966). *Saggi di linguistica generale*. Milano: Feltrinelli.

Todorov, T. (1969). *Grammaire du Decameron*. The Hague: Mouton.

Open problem solving as means for fostering mathematical understanding and creativity

Erkki Pehkonen
Professor emeritus
Department of Teacher Education
University of Helsinki, Finland

Abstract. *Firstly, it will be discussed the concept 'open approach' towards mathematics teaching and learning. The next focus will be in the theoretical underpinning of the method 'teaching via problem solving'. In teaching problem solving the teacher's role is in the very center, and therefore, it will be dealt with here in details. One method of using problem solving in school is investigations, of which structured investigations i.e. problem fields are here in the focus. Experiences on the use of problem fields are discussed with the help of an example.*

1. Introduction

In Finland, the most important aim of mathematics teaching in all age groups is to foster the understanding of mathematical structures and development of mathematical thinking (NBE, 2004). Also the draft of the new Finnish curriculum (NBE, 2014) stresses that the task of mathematics teaching is to promote pupils' mathematical thinking, to lay ground for the understanding of mathematical concepts and constructs that will give pupils resources to deal with information and solve problems. In many other countries this also is the general objective of school teaching, for instance, in the United States (NCTM 2000). The general aim of teaching is to educate such citizens that are independent and initiative as well as motivated and able to critical thinking, in order they can master situations they will encounter in their future life.

2. New demands for mathematics teaching

Psychological research (e.g. Bereiter & Scardamalia, 1996) has confirmed the earlier stated hypotheses that facts and procedures are learnt through different mechanism. Therefore, different methods should be used in school for learning of facts (such as ready results) and for learning of procedures (as use of such facts). Conventional school teaching suits well for learning of facts, whereas learning of procedures demands different learning environments with pupils' own activity. Additionally, pupils need skills that will help them to invent meta-procedures, i.e. how to combine the facts and learnt procedures in new situations. This means actually problem-solving skills.

Active working is considered as an important factor when we are looking for such learning that is compatible with constructivism (e.g. Davis, Maher, & Noddings, 1990). Constructivism emphasizes each person's individual way to shape and see the world, and the fact that knowledge is formed and changed through action. Additionally, constructivism stresses strongly that the knowledge structure of an individual is formed and changed only through his/her own actions.

2.1. The key concepts of the paper

Here the key concepts (problem, understanding, creativity) will be dealt with briefly, since they have been discussed in detail in many earlier publications (e.g. Pehkonen, 2014).

Problem. Generally *problem solving* is understood and accepted as a method to foster understanding of mathematical processes and structures (Schoenfeld, 1992). In the center of these considerations, there is the concept of problem. Here a task is said to be a *problem* for a pupil, if its solution demands that the pupil must combine the knowledge he/she possesses in a new way (Kantowski, 1980). If the solver can immediately recognize the procedures needed for solving the task, the task is for him/her a *routine* task (or a standard task or an exercise). Thus the concept 'problem' is relational to time and knowledge of the person. For instance, a multiplication task 3×4 is a problem for a school beginner, but no more, let's say, in grade 4.

Most mathematics tasks in schoolbooks that are used by teachers are merely routine tasks. Their role is to practice the procedures taught to the level of automatization.

Understanding. In her overview on understanding Mousley (2005) distinguishes three types in the *models for understanding*: (1) understanding as structured progress, (2) understanding as forms of knowing, and (3) understanding as a process. To the first category belong e.g. the models that are based on Piaget's ideas or Vygotsky's "zones of development". The most famous model of the second category might be that developed by Skemp (1987), who was as the first one to separate the instrumental and relational understanding. For example, the model of Pirie and Kieren (1994) represents the third category: understanding as a process. Their model describes eight possible levels in the growth of mathematical understanding.

Thus understanding is a very complex concept. But the most important aspect for school mathematics is that there exist not only two categories in pupils' understanding (a pupil understands / does not understand). As a matter of fact, there are infinite many levels of understanding, one can all the time grow in understanding of a topic (Hiebert & Carpenter, 1992). Research also has shown clearly that teaching with a focus on understanding can foster pupils' development of problem-solving abilities (Lambdin, 2003).

Creativity. According to Haylock (1987), there seems to exist no commonly acceptable characterization for creativity that could be accepted by all creativity researchers. Every researcher seems to formulate his/her own definition. But there seems to exist some common ideas: For instance, the majority of the authors in the Handbook of Creativity (Sternberg, 1999) "endorse the idea that creativity involves the creation of an *original* and *useful* product" (Mayer, 1999, 449). Thus, there appears to be consensus that these are the two defining characteristics of creativity. As an example of definitions, we take that of Sternberg (2003) who explains creativity as an ability to produce work that is novel, high-quality and appropriate.

In a creative process one may distinguish four phases: preparation, incubation, illumination, verification (e.g. Claxton, 1999). In the beginning, a person prepares him/herself for the problem as well as possible (the preparation phase), but he/she doesn't yet know the solution. He/she mulls the facts of the problem in his/her head – both consciously and unconsciously (the incubation phase). Finally he/she gets the idea of the solution (the illumination phase). And at the end, he/she must check with logic that the solution is a proper one (the verification phase). When testing a person's creativity the following four components (idea flow, idea flexibility, originality, elaboration) of creativity introduced by Torrance (1974) are important. Of these flexibility is essential for problem solving.

Problem solving and creativity. Problem solving is generally offered as a method to promote mathematical thinking and creativity (e.g. Schoenfeld, 1985, Schroeder & Lester 1989). In problem solving situations learners may seesaw between creative and critical thinking (McGregor, 2007). In the beginning, the solver develops different possible ideas to solve the problem (creative thinking). When a solution route seems to be working, it will be assessed with critical thinking. Both modes of thinking are essential for the process.

Creative thinking is not a special characteristic that only a few talented people possess, but it can be nurtured via a variety of techniques. For instance, McGregor (2007, 187) presents some pedagogic tactics that support thinking creatively; these involve providing open-ended tasks, challenges, problems or issues to be thought about or acted upon. It has been observed that when teachers are working with proper problems and using proper teaching methods he/she can convoy his/her pupils to enjoyment of mathematics, too. There are several studies that show such phenomena (Sternberg, 1999).

2.2. Open approach

Most mathematics tasks in schoolbooks are *closed*, i.e. their starting and goal situation are exactly given; only in the way of solving there is some degree of freedom. Characteristics for *open problems* are that their starting situation and/or goal situation are not exactly given (Pehkonen, 2004). Therefore, solvers have freedom to select and decide some parameters in solving the problem. And thus pupils can get different, but equally valued correct solutions. Therefore, open problems usually have many correct solutions, or in an extreme case no solution at all.

When a teacher uses open problems during his/her lessons, pupils have an opportunity to work like a creative mathematician (Brown, 1997). The first phase for a mathematician is to explore the situation, and to find and formulate some possible problems. The next step is to solve one of the problems, and to check the validity of the solution found. An example of such a simple open problem situation that can also be solved in the elementary school is the following: "*Divide a rectangular into three triangles. Can you find another solution? How many different solutions can you find?*" In our research project, we implemented the problem in grade 4 (Pehkonen & Varas, 2013), and pupils did find a big many of solutions.

One possible method to help a teacher to construct for his/her pupils optimal learning environments is the so-called open approach. This teaching concept was developed in the 1970's in Japan (Nohda, 1991; Becker & Shimada, 1997). Similar approaches also were constructed in some other countries, and little by little such methods are accepted in a majority of countries (e.g. NCTM, 2000). In a near connection to this are the three ways of teaching problem solving (PS) introduced by Schroeder and Lester (1989): teaching *about* PS, teaching *for* PS, and teaching *via* PS. The last aspect can be easily connected with the open approach, and it will be discussed in detail in the following.

2.3. Teaching via problem solving

In the case of teaching via problem solving, pupils' learning takes place in the trials of solving process, where the concepts and skills essential for the problem are needed (Lester & Charles, 2003). When pupils solve problems, they can use every method they want, and reason their solution ideas in the way they feel to be convicting. Then these solution ideas will be discussed together in the learning group and their validity checked (cf. also Schoenfeld, 1987).

The learning environment "teaching via problem solving" offers pupils a natural situation to present different solutions to their classmates and learn mathematics through social interaction. In the situation meanings are negotiated and a common understanding can be reached. Such activities can help pupils to clarify their ideas, and they get new perspectives to the concept or idea that they are learning. Thus "teaching via problem solving" helps pupils to see behind separate ideas, and it develops a unified and complex knowledge structure that is growing all the time (Cai, 2003), and there is a symbiotic connection between problem solving and concept learning (Lambdin, 2003).

The point of problem solving is that acquisition of a successful solution demands pupils to check, combine and formulate the knowledge they have already learnt. But there seems to be little evidence that pupils' problem-solving abilities are improved by isolating problem solving from learning mathematics concepts and procedures (Lesh & Zawojewski, 2007). When pupils explain and reason their thinking and challenge the explanations of their classmates and the teacher, they also are eager to clarify their own thinking and thus they adopt "knowing" (Lampert, 1990).

The development of pupils' problem solving abilities is not only an essential part of learning mathematics over different content areas, but also it is the central part of learning mathematics in all class levels. According to the Finnish curricula (NBE, 2004, 2014) mathematics should be taught to pupils from Kindergarten to university with such a method that promotes their understanding of mathematical concepts and procedures as well as solving of problems. In the literature there is strong evidence that also even very young pupils can investigate problem situations and invent solution strategies (Cai, 2000). The long-term objective should help pupils in fostering them to develop successful problem solvers, and therefore, on each class level, in every mathematical content area and in every lesson this objective should be present (NBE, 2004, 2014).

But some teachers might form an obstacle, and there is evidence for this in the literature: For example, Cazden (1986) pointed out that many teachers think that their task is to remove all challenges (and obstacles) pupils have, when they are in a problem situation. Also Stein et al. (1996) observed that demanding tasks are often changed into routine tasks when teachers and pupils are working on them, thus the cognitive demand is lowered instead of maintaining it. Therefore, teachers formulate problems easier and more mechanical for pupils. For instance, when a pupil is facing challenges the teacher might tell directly what he/she is supposed to do next, instead of asking what the pupil is thinking or encouraging to locate the challenge, persevere and start dialogue with classmates (Wilhelm, 2014). Similar teachers' behavior could be observed also in experimenting classes of the Finland-Chile research project (Pehkonen & Portaankorva-Koivisto, 2015).

This is the reason why a pupil's opportunity to learn in class does not only depend on the material used neither tasks offered by the teacher. But the discourse in classroom during problem solving lessons, between the teacher and the pupils is very central. That all teachers do not allow their pupils to struggle with challenging tasks seems to be evident.

3. Teachers' role in class implementation

Undoubtedly, a teacher's role is important in all learning. It is the teacher who sets the frames for learning, plans learning environments and thus makes quality learning possible. Why do some teachers seem to be better in teaching problem solving than others? There are few studies looking at the pupil-teacher interactions when working with open problems. For example, Chiu (2007) reports how three teachers guided fifth-graders in fractions using creative and non-creative problems. The best of these three approaches for teaching creative problem solving seemed to be the teaching that emphasizes a confidential learning environment, self-regulation, imagination and basic understanding. However, there is plentiful research on teaching problem solving generally, and we will next summarize some key findings in this area.

One point of view is related to the quality of a teacher's knowledge (Shulman, 1986). What do the teachers need to know to teach effectively? When the teacher uses open problems to teach via problem solving, there are some specific needs for knowledge. Unlike in usual mathematics problems, there is no indication for an open problem to be "finished". Therefore, even a well-prepared teacher may be surprised when pupils discover powerful mathematical ideas that the teacher has not anticipated. Thus, open problems require that the teacher has the pedagogical competence to listen empathically to their pupils' solutions (Pehkonen & Ahtee, 2006), the content knowledge to recognize pupils' unexpected mathematical ideas even when they are not fully formulated, and the pedagogical content knowledge to guide pupils when they seek, formulate and communicate their ideas.

Even when teachers have equal levels of knowledge, they may choose different teaching approaches. For example, Schoenfeld (1992) and Stein, Engle, Smith and Hughes (2008) have identified the following three phases as being typical in problem solving or inquiry lessons. Stein and her colleagues named these phases as 1) a *launch phase* in which the teacher introduces the problems without giving solution methods or examples, 2) an *explore phase* in which pupils work on problems in small groups under the teacher's guidance, and 3) a *discuss and summarize phase* in which the pupils present and discuss their solution methods and the teacher summarizes the lesson.

These three phases can be observed usually in problem-solving lessons. In the beginning, the teacher needs to introduce the problem to pupils and help them to understand the content of the problem. During the solution phase, they will guide pupils with questions or hints. And at the end of the lesson, pupils' solutions will be reviewed and discussed (Sawada, 1997).

3.1. The teacher's role in the launch phase

During the launch phase, the teacher presents a mathematical task to the class. He/she must ensure that pupils understand what they are required to do and the nature of the things they are expected to produce. The teacher should motivate the pupils so that they are engaged to work on the task. He/she also has to organize the work, set up the resources and plan the timing for the session. All this needs to be decided when the teacher is planning the lesson (Stein et al., 2008; Sawada, 1997).

Schoenfeld (1992) presents more detailed ideas for the teacher actions that give cognitive support for pupils. It is important to read the problem and discuss words or phrases the pupils may not understand. It is also central to focus the pupils' attention on important data so that the pupils can understand the problem and know how to start solving the problem.
A large body of research indicates the importance of affective elements in mathematical problem solving (e.g. Schoenfeld, 1985, Goldin, Epstein, Schorr, & Warner, 2011). Although still somewhat inconclusive, it seems that positive emotions would facilitate the creative aspects of problem solving, while modestly negative emotions would facilitate reliable memory retrieval and performance of routines (Pekrun & Stephens, 2010). Hence, one of the ways teachers may facilitate creative problem solving is through creating a happy mood (i.e. a proper emotional climate) in their classes during the launch phase.

3.2. The teacher's role in the explore phase

In the explore phase, pupils work on the problem, often discussing it in pairs or small groups. As pupils work, the teacher supports the pupils' autonomous work by encouraging them to solve the problem in whatever way makes sense to them. Here it is important to provide positive yet realistic feedback to support the pupils' self-confidence and engagement with the task (Linnenbrink & Pintrich, 2003). The pupils may also need help to cope with moments of frustration that are inevitable in problem solving (Hannula, 2015).
As the pupils begin to make progress, the teacher should select examples from the pupils' productions to be discussed in the class (Stein et al., 2008). The teacher-pupil interaction during problem solving has been analyzed using a variety of related approaches. Schoenfeld (1992) suggests teachers should facilitate pupils' cognition through observing their progress and asking questions (diagnose strengths and weaknesses). Furthermore, he/she should provide hints and problem extensions as needed, and require pupils who obtain a solution to answer the problem. In addition to such a holistic approach, other researchers have focused on teachers' questions, how they listen to pupils' responses and their feedback to the pupils (e.g. Pehkonen & Ahtee, 2006).
Teachers need to be careful in the usage of questioning to promote pupils' reasoning (e.g. Sahin & Kulm, 2006). Anghileri (2006) discusses Wood's critique of the funneling pattern and focusing as an alternative interaction mode. While funneling gradually delimits the pupils' answers until the teacher receives the predetermined response, the focusing-interaction pattern requires the teacher to listen to the pupils' responses and guide them based on what the pupils are thinking rather than how the teacher would solve the problem. Pehkonen and Ahtee (2006) have suggested empathic listening as the most advanced level of teacher attending to pupil ideas. In empathic listening, a teacher strives to understand a pupil's thoughts and to hear, follow and

understand the pupil's ideas from the pupil's viewpoint. In such interactions the primary intention is to help the pupils voice their own ideas rather than lead them to the ideas of the teacher.

The last perspective on the interaction focuses on the nature of the teacher's guidance of the pupils' investigations. Based on Hähkiöniemi's and Leppäaho's (2012) three levels of teacher's guidance (surface-level guidance, inactivating guidance and activating guidance) we conclude that the guidance has at least two aspects: 1) how teachers work with pupils' solutions and 2) how teachers work with the pupils. The first one can be divided into deep and surface-level guidance based on how well the teacher is able to guide the pupils to investigate the essential aspects of the problem. The second one can be divided into activating and inactivating guidance. In activating guidance the teacher asks questions that encourage the pupils to proceed with the problem. In inactivating guidance the teacher reveals the potential idea to the pupils, taking away the possibility for the pupils' own innovation.

3.3. The teacher's role in the discussion and summary phase

In Polya's (1945) classical problem-solving model, the *looking back* phase was an important opportunity to learn something new. In the discussion and summary phase, the lesson concludes with a whole-class discussion of pupils' solutions for the problem (Stein et al., 2008). During this phase, the whole class views and discusses a variety of approaches to the problem. Stein et al. (2008) consider it important that the teacher's comments and responses to the pupils' questions do not lower the level of cognitive demand of the task. The teacher has to orchestrate the discussion, not just manage pupils' interventions and interactions but also promote the mathematical quality of the pupils' explanations and discussion. The teacher also needs to create and maintain a positive climate of genuine interest in the discussion, trying to guarantee the participation of all the pupils.

It is very important that the discussion aims beyond the comparison and confrontation of pupils' solutions. The teacher has a crucial role in helping the pupils to summarize the main mathematical ideas that emerged from the discussion in order to advance the mathematical learning of the whole class. The teacher has the opportunity to focus the pupils' attention on new concepts and reinforce their mathematical reasoning. The teacher may show and name different strategies, relate ideas to previously solved problems, point to extensions that demonstrate the general applicability of problem-solving strategies and show how specific task features (e.g. chosen visualizations) may influence the problem-solving approach (Schoenfeld, 1992; Leinhardt & Schwartz, 1997).

4. Problem fields in teaching

Investigations form one group of open problems. They can be divided into structured and non-structured ones. The latter ones have been used in England since the 1970's (Cockcroft, 1982): In a non-structured investigation, a problem situation is given to pupils as well as a couple of starting problems, and then the pupils should work independently further. Structured investigations are also called *problem fields* (or problem domains or problem sequences). Here the teacher has a lot of further questions (problems) on the starting situation, and he/she decides, according to the solving activity of the teaching group, which way he/she will take and how far he/she will continue with the problem field in question.

When we change in mathematics teaching the emphasis from calculation skills to practicing thinking skills, we can build mathematics teaching into such a frame that responses every pupils' needs. Logical thinking and creativity are needed in all areas of the human life, and they belong to the resources of an educated citizen. Since our main goal is the development of mathematical thinking, we can choose the emphasizing of the topics according this viewpoint. We can focus on such content areas where the development of mathematical thinking and creativity can be easiest to implement.

However, it is important to notice that this does not mean the abandonment of practicing of calculation routines. In the case of routines there is more a change of attitude. About thirty years ago, Wittmann (1984) has presented the idea that routine practicing should be built in such a set of tasks that has a certain structure. Then we can, within this structure – along with routine practice – also develop so-called higher order thinking.

4.1. An example: Number Triangle

We take the open problem "Number Triangle" as an example of problem fields. It can be used from the elementary school to the teacher education. Solutions for the problem can be found by using experimenting method (e.g. in the obligatory school), but the general solution of the problem will lead to three equations and four unknown (e.g. in the upper secondary school). In order to reach a proper level of challenge in teacher education, one can ask teacher students, not only to solve the problem, but also to image how they think that pupils in obligatory school would solve the problem.

About thirty years ago (in Autumn 1987) I experimented the number triangle as a separate problem in a seventh grade class (14-years old) in Helsinki. My original purpose was to practice and repeat mental calculations with natural numbers in a slightly unusual way. But from number triangles it was developed an interesting problem series within which we also practiced mental calculations with negative numbers. The pupils were eager to search solutions to separate problems as well as to look for general solution principles. If the

problem was not dealt with during some lessons, the pupils were asking when we will continue and wanted to explain their new solutions.
In the following I will describe briefly different phases of dealing with the number triangle problem chronologically. It is good to point out that all the lessons were not sequential.

The 1. lesson

At the end of one lesson there was about 10 min. time left when I presented the problem (Figure 1) to the pupils using the overhead projector. I asked them to write the problem on their notebooks, since the task will be their homework. Additionally we discussed what is the meaning of “the sum in each side row is the same”.

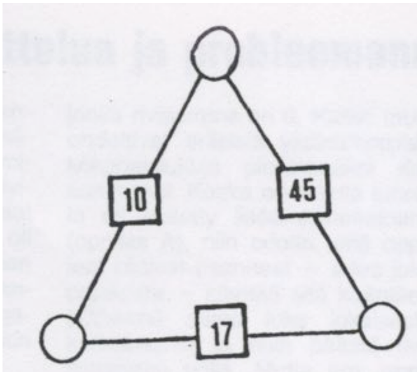


Figure 1. The number triangle problem: *Invent numbers in the circles of the triangle in the way that the sum in each side row is the same.*

The 2. lesson

When checking the home-works, I asked the pupils to draw their solution triangle on the blackboard. But the pupils were wondering, since they have different solutions, and asked which one is the correct one. Then I asked three pupils to present their (different) solution on the blackboard. Beforehand I asked what their row sums were, in order I would get really three different solutions on the blackboard. In this connection we used the concept “row sum” with the meaning of the constant side row sum.
During the lesson I asked the pupils to guess, how many different number triangles there might exist. One pupil stated carefully that, perhaps, there would be found still one more. Thus I gave them as the next homework to invent one different solution more.
At the end of another lesson (when the topic was addition and subtraction with integers) I gave to the pupils an additional task: to find out is it possible to use negative numbers. The high-attainers developed very quickly one number triangle with a negative number in one circle. My subsequence question “Can

we use negative numbers in two circles?" gave them for a while something to ponder.

The 3. lesson

In the beginning of the lesson, I asked the pupils to show three new number triangles on the blackboard. Then I asked again, how many different number triangles there might be altogether. A couple of the pupils had developed interesting methods to answer the question.

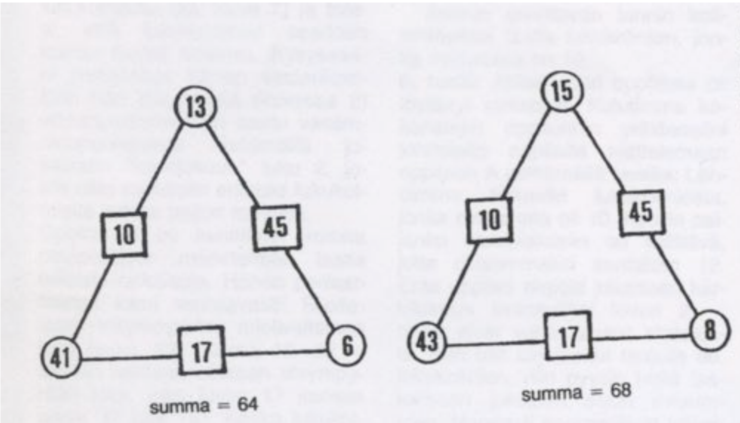


Figure 2. Two examples of the number triangle.

Ann looked at the number triangles on the blackboard (Figure 2) and stated that there are so many number triangles as we want. When I asked reasons for her response, she said that (in Figure 2) the right-hand side is got from the left-hand side by adding in each "circle number" the number 2. Therefore, we can get as many different number triangles as we want.

Basil had developed at home an original method to produce different solutions. His principle was, as follows: Let us put into the upper circle an arbitrary number (e.g. 22). Because 10+22 = 32, we will look for a number into the right-hand corner a number, which will add with 17 the result 32 (thus 15). Because the right-hand row of the number triangle gives 22+25+15 = 82, we should look for a number in the left-hand corner that gives the row sum 82 (thus 50). This method was so complicated that it was compelled to be explained two times (in each case a different pupil explaining at the backboard) with examples, before most of the pupils did say that they understand it.

In order to test how well the pupils have understood the methods explained, I asked from the teaching group, whether it is possible to construct a number triangle where the row sum is zero. After a while of pondering many responded that the task was impossible to solve. Thus I left it as a home-work in the following form: "Investigate whether there exists a number triangle with the row sum 0. If not, what is the smallest positive number that could exist as a row sum?”

The 4. lesson

When checking home-works it came out that only one pupil was able to produce a number triangle with the row sum 0. All others suggested different one-digit numbers as the smallest row sum. Since during the last lesson the adding method was presented by Ann, I was expecting that the pupils would be able – at least some of the pupils – to use it in a reversed way (subtract the same number from each corner number) and thus get the row sum zero. But the mentioned pupil had found his solution by experimenting. Evidently they had not “melted” the method exposed by Ann – not even Ann herself.
For the next lesson I gave the task of producing a number triangle with the row sum 10.

The 5. lesson

Again a couple of pupils had found a solution. We used one whole lesson when trying to guide the pupils to think in Ann’s way: We began with a number triangle where the row sum was 10. I asked how much it must be added into the corner number, in order we would reach the row sum 12. A pupil suggested that into each corner number it must added number 2 – the others did not object. When I had drawn on the blackboard the number triangle in question, I asked them to calculate the row sum of each side. Quickly the first ones stated that it is 14. A pupil (Cecilia) suggested the following correction: Since the row sum increased with two (12–10 = 2), the difference should be divided by two and the resulted number (1) be added into each corner number. Thus we did and resulted the number triangle searched for.
In order to test how many pupils had understood the general method, I asked them to produce a number triangle with the row sum 20. When asking what should be added into the corner numbers of the original triangle (the row sum 10), I received two kinds of answers: 10 or 5. The pupils were spontaneously arguing with each other. Only two or three pupils seemed to understand the general principle and were able to use it. We drew both number triangles on the blackboard and solved the question by calculating their row sums.
My next question was, whether we can thus also decrease the row sum. And received a positive answer. Thus I put forward a task to produce a number triangle with the row sum –10. Together we observed that the row sum will decease by 20 from the original (the row sum 10), and therefore, from all corner numbers it should be subtracted 10. Since the lesson ended before all pupils were ready with their number triangle and checked them, the task was left as homework. The second task for the pupils was to construct a number triangle with the row sum –20.

The 6. lesson

When beginning with checking of homework (where was also the number triangle task mentioned), I could hear from the teaching group the following bored comment “Do we have again that dull number triangle?” And I reacted with saying that this was just going to be the last lesson with it.

Written exam

In the next written exam that was some weeks after the last number triangle lesson, I added a task on number triangle that is given in Figure 3.

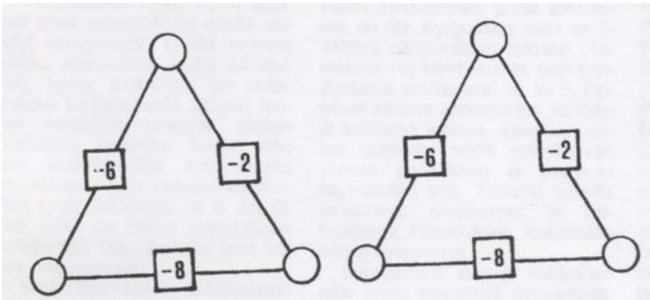


Figure 3. Number triangle tasks: a) *Invent numbers in the circles of the triangle in the way that the sum in each side row is the same. What is then the row sum?* b) *Invent numbers in the circles of the triangle in the way that the row sum is –10.*

More than half of the pupils (about 60%) solved the task totally correctly. About one quarter of the pupils got zero points. And the rest was able to solve the task partially.

Since the written exam seemed to be a very easy one – the first pupils were ready about 15 min. before the end of the lesson – I developed the following additional problem from the number triangle that I wrote on the blackboard:

> Investigate, whether it is possible to use multiplication instead of addition in the number triangle task. Thus: Invent numbers in the circles of the triangle in the way that the product in each side numbers is the same. If there is a solution, could there be several solutions?

The additional problem was solved by about a third of the pupils: some pupils found the trivial solution (0, 0, 0), and some others the solution (–2, –6, –8), but there was one of pupils who had produced several solutions.

Final notes

Thus from the number triangle that I have planned to be a “one-way problem”, it was surprisingly developed a large problem field. When dealing with the problems (2.–5. lesson) all pupils were eagerly involved. A couple of pupils were especially motivated in this kind of action that could be seen i.a. in their willingness to discuss on their solutions also during the break. The bored comment presented in the 6. lesson was no way representative for the general opinion in the teaching group, since it did not receive any support, but

spontaneous resistance. But according to my view it is better to stop before pupils' saturation, in order I do not loose the "additional motivation" that the problem gave. Later on I had dealt with other kinds of problem situations in the same teaching group.
It is worthwhile noticing that in the beginning the problem was not very clearly zoned, in order the pupils would more easily "get acquainted" with the problem situation. It easily can be seen that if the row sum is smaller than 52, there would be at least one negative number in the solution. And then we are practicing the very topic (the addition and subtraction of integers) that belongs to the core curriculum of grade 7. Furthermore, it is to notice that we have not discussed all possible situations in the case of the number triangle. For instance, the case of fractions would be interesting both in the additive number triangle as well as in the multiplicative number triangle (perhaps in grade 8).
The events of the 5. lesson were surprising, when only a few pupils were able to rise on the level of conceptual thinking, although they had a concrete model for checking their thinking. It would be a good idea to continue with the number triangle in the beginning of grade 8, when the calculations with integers will be repeated, and look at, whether there is any development on the level of pupils' thinking.

5. General comments on problem fields

5.1. On the use of problem fields

Within a problem field the level of difficulty in problems varies from very easy problems that probably the whole group can solve, to more complicated problems that only the most gifted pupils can solve. Since the objectives of problem fields are in the first place to foster pupils' problem solving skills and creativity, it is typical that they are not bound to a certain grade level (Pehkonen 1989). Problem fields are suitable for mathematics teaching usually from elementary level to teacher education. The role of easier problems in problem fields is to develop the problem solving skills of low-attainers, e.g. their perseverance on solving the task. For high-attainers there are more complicated parallel problems.
The most important aspect in a problem field is the way to use it: The problem field should be offered to pupils in small pieces, and the continuation depends on pupils' answers. Instead of solutions and results that are not usually given to pupils (nor to teachers), the most important one is the process of solving. Then it is uttermost important to use pupils' creativity, and develop it further. How far the teacher works with the teaching group in a problem at hand, depends essentially on the answers given by pupils. When pupils are no more able to produce answers, the dealing with the problem field can be stopped, in order pupils do not lose their motivation. The teacher can, perhaps, come later on back to the problem. It is uttermost important to notice that answers are not here in a central position, but development of pupils' problem solving skills.

Therefore, pupils' independent solving and trials to solve of problems are paramount important.
During the solution process the teacher's role is, as Schoenfeld (1985) puts it, only to act as a discussion moderator and a secretary. I.e. the teacher writes everything offered from the class on the blackboard (also possible errant tracks) without any comments, and at the end all offered solution possibilities are discussed together. Pupils' task is to ponder the sensibility and correctness of different solution alternatives (also possible wrong tracks), and will check their credibility. Of course, the teacher may use pupils' ideas for new problems, and thus develop the problem field further.
The use of problem fields is not meant to substitute conventional mathematics teaching, but to enrich it. Pupils will learn other part of mathematics than mere calculations. When problem fields are used within normal school teaching, a probed method is to use the last part of the lesson (perhaps, 10 min) for discussions of some partial problem in the problem field, and continue it in the next lesson. And then the teacher can give as much as possible of the rest of the problems to pupils as a homework. Thus, all pupils have enough time to think about the problems, and therefore, success experiences are more common. The rest of the lessons can be used e.g. for conventional mathematics teaching.

5.2. What are we aiming with problem fields?

Conventional school teaching has been accused of that it considers as totally separate the action and the context where learning happens. However, psychological investigations have shown that (also mathematics) learning is strongly situation-bound (e.g. Brown et al., 1989, Collins et al., 1989). Studies in learning psychological have confirmed the earlier hypotheses that learning of facts and processes happens via different mechanisms (Bereiter & Scardamalia, 1996). Therefore, we do need new elements into the school learning process of mathematics where pupils do learn to use mathematical facts. And open problems offer a good opportunity to practice solving processes.
Conventional teaching is proper for learning facts, but for processes new elements will be needed, such elements that emphasis pupils' spontaneous studying. The use of open problems offers here an opportunity, since they enable the use of real problems and learning in natural settings. Solving open problems sets pupils into real problem solving environment, and thus it can combine phenomena of real world and classroom.
When pupils are solving problems during mathematics lessons, especially open problems, also the teacher may experience mathematics lessons more interesting. He/she must think him/herself on the problems and pupils' solutions for them, and not only mechanically do some routine procedure. He/she should learn to accept the fact that he/she does not know everything,

and not to be afraid of showing it. Thus his/her pupils will consider him/her more human.
When a teacher decides to use open problems in his/her instruction, the published material is not enough. He/she should develop his/her own problems e.g. through opening closed tasks. One should develop richer problem fields and probe them in mathematics teaching. Furthermore, it is important to convoy the information to other teachers e.g. in teachers' journals.
When using open problems in teaching of mathematics, the teacher's own conceptions on good mathematics teaching are very strongly in a key position: they conduct the implementation of instruction. If the conception of open teaching is not coherent with the teacher's understanding of teaching, the new teaching will not be successful, although the teacher has been trained to use open problems. Therefore, the teacher's own beliefs and conceptions on mathematics teaching are very central (Shaw et al., 1991).

6. End note

The use of problem fields brings openness into school teaching. Furthermore, the use of problem fields promotes pupils' thinking skills and creativity which both are needed in pupils' future life. The usual understanding of mathematics as a strict and abstract discipline can be replaced by a wider view of mathematics: mathematics can be enjoyable, too. And more pupils can experience even joy and pleasure in their mathematics studies. When using open problems in classroom, there are more pupils who enjoy doing mathematical tasks and will have experiences of success. When pupils are solving problems – especially open problems – during mathematics lessons, also instruction will be more interesting to the teacher, since he/she cannot be prepared for all situations, and thus mathematics lessons can be interesting challenges for him/her, too.
In their paper Lester and Cai (2016) ponder the possibilities of teaching problem-solving. They used six key questions for which they searched answers from the existing literature. Additionally, it is to mention that Zimmermann (2016) presents how one can "open" old traditional school tasks, and develop of them investigations. Furthermore, there are published many books for teachers on open problems, e.g. Stevenson (1991), Becker y Shimada (1997), Möwes-Butschko (2010), Heinrich et al. (2015).
In order teachers can enrich their teaching with open problems, they should have interest to cultivate their teaching and be obliged to implement new ideas in teaching (Shaw et al., 1991). With constructivism the importance of teachers' mathematics-related beliefs have gained emphasis (Davis et al., 1990). Here beliefs are understood as knowledge and feelings on mathematics and mathematics teaching that are based on earlier experiences. These beliefs conduct and structure each teaching and learning process. To change these

teaching/learning processes means also to develop and change teachers' beliefs on good and successful teaching.

In the published literature, there are many research reports on teachers' changing and developing conditions. But none of the described intervention methods seems to be automatically successful. It looks like that changes in teachers that will be regulated outside, are not possible. The best help teacher educators can give to teachers is to offer ideas on the direction of change, but teachers must themselves cultivate their own solutions and to work for their implementation. More on problems in teacher change one may find e.g. in the publication (Pehkonen, 2007).

References

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33–52.

Becker, J., & Shimada, L. (1997). *The open-ended approach.* Reston, VA: NCTM.

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (1996). Rethinking learning. In D. R. Olson & N. Torrance (Eds.), *The handbook of education and learning. New models of learning, teaching and schooling* (pp. 485–513). Cambridge, MA: Blackwell.

Brown, S. I. (1997). Thinking Like a Mathematician: A Problematic Perspective. *For the Learning of Mathematics, 17*(2), 36–38.

Cai, J. (2000). Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *2*, 309–340.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (pp. 241–254). Reston, VA: NCTM.

Cazden, C. B. (1986). Classroom discourse. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching (3rd ed.)* (pp. 432–463). New York: Macmillan.

Chiu, M.-S. (2007). Approaches to the Teaching of Creative and Non-creative Mathematical Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education 7*(1), 55–79.

Claxton, G. (1999). *Wise-up: The Challenge of Lifelong Learning*. London: Bloomsbury.

Davis, R. B., Maher, C. A., & Noddings, N. (Eds.) (1990). *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics.* JRME Monograph Number 4. Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y., & Warner, L. B. (2011). Beliefs and engagement structures: behind the affective dimension of mathematical learning. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)*, *43*(4), 547–560.

Hähkiöniemi, M., & Leppäaho, H. (2012). Prospective mathematics teachers' ways of guiding high school students in GeoGebra-supported inquiry tasks. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *19*(2), 45–57.

Hannula, M. S. (2015). Emotions in problem solving. In Cho, S. J. (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 269–288). Springer International Publishing.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59–74.

Heinrich, F., Jerke, A., & Schuck, L.-D. (2015). *Lernangebote für problemorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule*. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 65–97). New York: Macmillan.

Kantowski, M. G. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 195–203). *NCTM Yearbook 1980*. Reston, VA: Council.

Lambdin, D. V. (2003). Benifits of teaching through problem solving. In F. K. Lester & R. L. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Kindergarten – grade 6* (pp. 3–13). Reston, VA: NCTM.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29–63.

Leinhardt, G., & Schwarz, B. B. (1997). Seeing the Problem: An Explanation from Polya. *Cognition and Instruction*, *15*(3), 395–434.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The Handbook of research on mathematics teaching and learning (2nd ed.)* (pp. 763–804). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 117–135). Research in Mathematics Education, Springer.

Lester, F. K., & Charles, R. (Eds.) (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Pre-K–Grade 6*. Reston, VA: NCTM.

Linnenbrink, E. A., & Pintrich, P. R. (2003). The role of self-efficacy beliefs in student engagement and learning in the classroom. *Reading & Writing Quarterly: Overcoming Learning Difficulties*, *19*(2), 119–137.

Mayer, R. E. (1999). Fifty Years of Creativity Research. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 449–460). New York, NY: Cambridge University Press.

McGregor, D. (2007). *Developing Thinking, Developing Learning*. McGraw-Hill, London: Open University Press.

Mousley, J. (2005). What Does Mathematics Understanding Look Like? In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice. Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne* (pp. 553–560). Sydney: MERGA.

Möwes-Butschko, G. (2010). *Offene Aufgaben aus der Lebensumwelt Zoo*. Münster: Verlag WTM.

NBE (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004* [Basics of the curriculum for basic instruction 2004]. Helsinki: Opetus-hallitus.

NBE (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014* [Basics of the curriculum for basic instruction 2014]. National Board of Education.

http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: The Council.

Nohda, N. (1991). Paradigm of the "open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 23*(2), 32–37.

Pehkonen, E. (1989). Der Umgang mit Problemfeldern im Mathematikunterricht der Sek. I. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1989* (pp. 290–293). Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker.

Pehkonen, E. (2004). State-of-the-Art in Problem Solving: Focus on Open Problems. In H. Rehlich & B. Zimmermann (Eds.), *ProMath Jena 2003. Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 93–111). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Pehkonen, E. (2007). Über "teacher change" (Lehrerwandel) in der Mathematik. In A. Peter-Koop & A. Bikner-Ahsbahs (Hrsg.) *Mathematische Bildung-mathematische Leistung: Festschrift für Michael Neubrand zum 60. Geburtstag* (pp. 349–360). Hildesheim: Franzbecker.

Pehkonen, E. (2014). Open problems as means for promoting mathematical thinking and understanding. In A. Ambrus & E. Vásárhelyi (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Education*. Proceedings of the 15th ProMath conference in Eger (pp. 152–162). Eötvös Loránd University.

Pehkonen, E., & Ahtee, M. (2006). Levels of teachers´ listening in working with open problems. In T. Kántor (Ed.), *ProMath Debrecen 2005: Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 63–74). Institute of Mathematics, University of Debrecen, Hungary.

Pehkonen, E., & Portaankorva-Koivisto, P. (2015). Teacher change via participation to a research project. In L. Sumpter (Ed.), *Proceedings of the MAVI-20 Conference in Falun (Sweden)* (pp. 163–172). Falun: Högskolan Dalarna University Press.

Pehkonen, E., & Varas, L. (2013). Ein Versuch zur Entwicklung des mathematischen Denkens in der Grundschule: Vergleichstudie Finnland-Chile. Published in the electronic *GDM-Münster report*: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/de/forschung/bzmu.html

Pekrun, R., & Stephens, E. J. (2010). Achievement Emotions. A control-value approach. *Social and Personality Psychology Compass, 4*(4), 238–255.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how we can characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics Education*, *26*(2–3), 165–190.

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Sahin, A., & Kulm, G. (2006). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(3), 221–241.

Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. In J. P. Becker & S. Shimada (Eds.), *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics* (pp. 23–35). NCTM.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's All the Fuss About Metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189–215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Understanding mathematics via problem solving. In P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31–42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shaw, K. L., Davis, N. T., & McCarty, J. (1991). A cognitive framework for teacher change. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of PME-NA 13* (Volume 2, pp. 161–167). Blacksburg, VA: Virginia Tech.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Sternberg, R. (2003). *Wisdom, Intelligence and Creativity Synthesized*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (Ed.) (1999). *Handbook of Creativity*. New York, NY: Cambridge University Press.

Stevenson, F. W. (1991). *Exploratory problems in mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests of Creative Thinking*. Lexington, Mass: Ginn and Company.

Viitala, H. (2016). *A study on mathematical thinking: problem solving and view of mathematics*. A manuscript for a dissertation at the University of Agder, Norway.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 25–36.

Zimmermann, B. (2016). Improving of Mathematical Problem-Solving: Some New Ideas from Old Resources. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 83–109). Research in Mathematics Education, Springer.

Scopri quanto puoi vedere più lontano con un software di geometria dinamica (*Gli assi delle coniche con riga e compasso*)

Consolato Pellegrino
Già docente del Dipartimento di Matematica
Università di Modena e Reggio Emilia

A Bruno collega capace, leale e sincero:
100 e più di questi giorni!

Sunto. *Ritengo che i software di geometria dinamica spostino in avanti, molto avanti, la possibilità di "vedere in geometria", più di quanto si possa pensare. Ossia aiutino a vedere proprietà delle figure, risolvere problemi, fare congetture nonché dimostrarle o confutarle. In questa nota, per darti la possibilità di avere un'idea di ciò, ti racconterò cosa mi è accaduto cercando una costruzione con riga e compasso degli assi di una conica vista come immagine prospettica di una circonferenza.*

Abstract. *I believe that dynamic geometry software enhance considerably the possibility of "seeing in geometry", much more than one might think: they help to see the properties of the figures, solve problems, create conjectures, as well as to demonstrate or refute them. In order to give you an idea of these possibilities, in this paper I will tell you what happened to me on trying to construct with ruler and compass the axes of a conic seen as a perspective image of a circumference.*

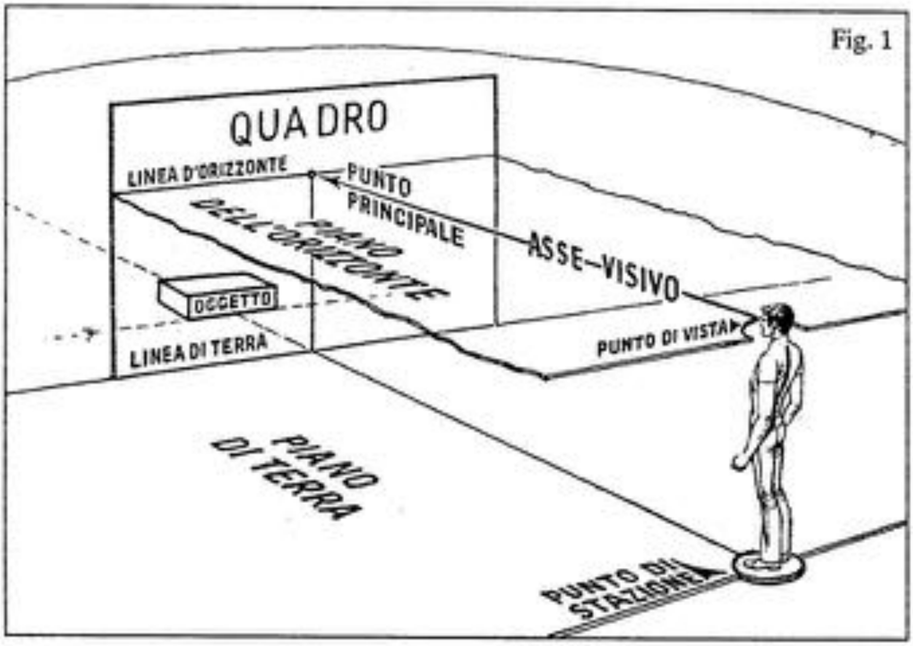
1. Introduzione

Ormai l'importanza nella didattica dei software di geometria dinamica è assodata. In questa nota, rifacendomi alla mia esperienza, porrò l'accento sul loro impiego anche in progetti e problemi che travalicano il loro utilizzo nella semplice pratica in classe. Al riguardo cito i due esempi che più di altri mi hanno confermato l'ottima impressione che mi aveva dato Cabri-géomètre quando l'ho visto per la prima volta in azione all'inizio degli scorsi anni '90: il primo esempio si riferisce a un ampio progetto sfociato in una monografia e il secondo, complementare a esso, altrettanto sorprendente seppur più circoscritto.

1.1. Il primo esempio

Già nel 1963, nel corso del mio primo anno di studio all'università, suggestionato da un'osservazione trovata in Castelnuovo (1903) mi sono proposto di esplicitare il processo che, innescato nel XV secolo dall'avvento della *prospettiva* e maturato all'inizio del XIX secolo, ha portato alla nascita della geometria proiettiva. Questo progetto è rimasto in un limbo per vari motivi, non ultimo la mancanza di strumenti adatti. Le cose sono cambiate quando ho deciso di affrontarlo utilizzando Cabri. In effetti nel 1999, grazie alla dinamicità di Cabri (allora GeoGebra non c'era ancora) e alle idee base della geometria descrittiva (e in particolare al metodo della doppia proiezione di Monge) sono riuscito, utilizzando il *principio di intersegazione della piramide visiva* (che sta alla base della prospettiva), a «scoprire» (*cfr.* Pellegrino, 1999; o il più succinto Pellegrino e Tomasi, 2004) proprietà fondamentali e concetti caratteristici della rappresentazione prospettica (quali *punti di fuga, linea di orizzonte*, ecc.: *Fig.* 1) ed arrivare così a comprendere:

– la genesi dei concetti e delle regole che stanno alla base di vari sistemi di rappresentazione prospettica;
– l'origine, le proprietà e le applicazioni di concetti caratteristici della geometria proiettiva (quali *punto improprio*, *retta impropria, omologia,* ecc.).

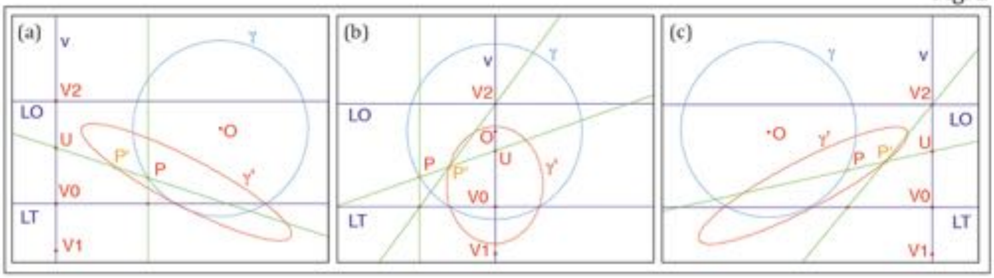


1.2. Il secondo esempio

Sulla scia di quell'esperienza, mi sono proposto di determinare una costruzione degli assi di una conica γ', vista come immagine prospettica di una circonferenza γ o, il che è lo stesso, dell'immagine di γ nell'omologia θ (del piano in sé) collegata alla rappresentazione prospettica. Il caso dell'iperbole è abbastanza semplice in quanto i suoi assi sono le bisettrici dei suoi asintoti. Più impegnativi sono invece i casi dell'ellisse e della parabola quando γ (vedi

Fig. 2a e 2c) è “posta al lato” del punto di vista V anziché (vedi *Fig.* 2b) “di fronte” ad esso.

Fig. 2



Particolarmente interessante è quindi trovare (e giustificare!) una costruzione per gli assi di γ' che sia valida sempre: qualunque sia il suo tipo e qualunque sia la sua posizione rispetto al punto di vista. Questo problema nei manuali di geometria descrittiva è trattato solo in casi particolari. Ad esempio il caso dell’ellisse vista di lato mi sembra sia ignorato. Invece nei manuali di geometria proiettiva è risolto utilizzando nozioni e teoremi alquanto specialistici quali il *metodo di Steiner* (*cfr*. ad es. Castelnuovo, op. cit., p. 273). Questa via però comporta l’abbandono dell’impostazione da me seguita nel primo esempio in quanto antepone la teoria alla pratica: nel caso dello studio sulla rappresentazione prospettica è stata proprio la pratica sui fogli di lavoro di Cabri a fare da apripista alla teoria, non viceversa. Esclusa quindi quella via, dopo aver realizzato:

– le macro che consentono di costruire l’immagine diretta e inversa di punti e rette nell’omologia θ collegata alla rappresentazione prospettica;
– un cabri-disegno con l’immagine γ' di una circonferenza γ ottenuta mediante θ;

ho provato diversi approcci. Grazie a quello più adatto a sfruttare la dinamicità di Cabri ben presto ho elaborato una costruzione degli assi di un’iperbole che, con qualche aggiustamento, sempre grazie alla dinamicità di Cabri, ho generalizzato (ed in gran parte giustificato) in modo da comprendere i casi dell’ellisse e della parabola “viste di lato”. Di più, via via che riuscivo a comporre i pezzi del puzzle sono riuscito a giustificare quasi tutti i passi della costruzione trovata utilizzando proprietà di una nozione che, a mio giudizio, è la grande assente dai trattati di geometria descrittiva. Sono riuscito così a elaborare una costruzione degli assi di γ' *eseguibile con riga e compasso*, limitando il più possibile il ricorso a questioni specialistiche di geometria proiettiva. Il risultato è visibile nelle seguenti pagine web:

• Coniche a centro: http://youtu.be/yV4yg58OtQc
• Parabole: http://youtu.be/Py0yaXFZ_GM

Se desideri rifare l’esperienza, ossia se vuoi un’idea di quanto si può vedere più lontano con l'utilizzo di uno qualunque dei tanti software di geometria dinamica, prova a risolvere anche tu questo problema.[1] Se vuoi puoi farlo insieme a me. Per questo nel seguito ti illustrerò il cammino da me seguito. Più precisamente:

- nel §2 illustrerò, brevemente, l'omologia e le sue proprietà;
- nel §3 illustrerò la corrispondenza θ associata alla rappresentazione prospettica;
- nel §4 darò le indicazioni per realizzare le macro che simulano θ e la sua inversa;
- nel §5 darò le indicazioni sul percorso da me seguito per determinare gli assi e il centro per iperbole ed ellisse;
- nel § 6 darò le indicazioni da me seguite per estendere la costruzione trovata anche alla parabola.

2. L'omologia

2.1. Omologia *(Castelnuovo, op. cit., pp. 300 e sgg.)*

Una corrispondenza biunivoca non identica, del piano ampliato in sé,[2] *che manda punti allineati in punti allineati, è detta omologia se ha uniti tutti i punti di una retta u e tutte le rette di un fascio di centro U. La retta u ed il punto U sono detti rispettivamente asse e centro dell'omologia. Punti e rette corrispondenti in un'omologia sono detti omologhi.*
In un'omologia sono uniti tutti i punti dell'asse e tutte le rette per il centro. All'infuori di questi, l'omologia non possiede altri elementi uniti.

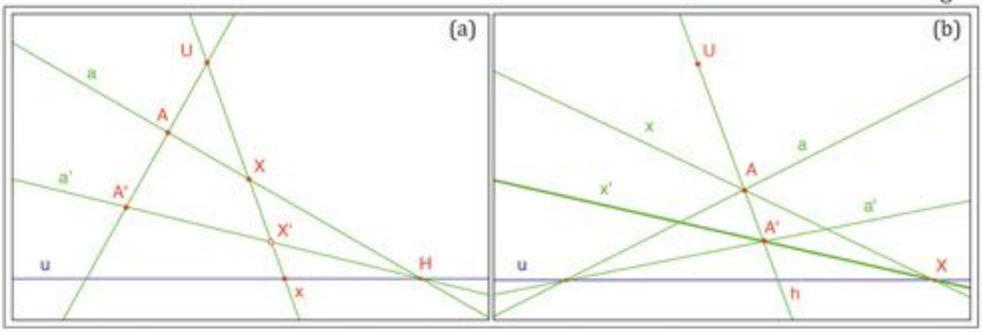
2.2. Proprietà dell'omologia

Dalla definizione di omologia segue che:

(1) *Punti distinti corrispondenti in un'omologia sono allineati con il centro; rette distinte corrispondenti si segano sull'asse*.
(2) *Se una retta è parallela all'asse, anche la sua omologa è parallela all'asse*.
(3) *Una omologia è individuata quando di essa si conoscono il centro* U, *l'asse* u *e due elementi corrispondenti distinti, che possono essere due punti* A *e* A' *allineati con* U, *o due rette* a *ed* a' *che si intersecano su* u.

[1] Ringrazio in anticipo chi mi dirà com'è andata, soprattutto se la sua soluzione, in tutto o in parte, è diversa dalla mia.
[2] Mediante la retta e i punti impropri.

Fig. 3



Costruzione del corrispondente di un punto X nell'omologia di centro U, asse u, individuata dai punti corrispondenti A e A' (*Fig.* 3a).	Costruzione della corrispondente di una retta x nell'omologia di centro U, asse u, individuata dalle rette corrispondenti a e a' (*Fig.* 3b).
Traccia: – la retta a per i punti A e X; – il punto H intersezione delle rette u e a; – la retta a' per i punti A' e H; – la retta x per i punti U e X; – il punto X' intersezione delle rette a' e x.	Traccia: – il punto A intersezione delle rette a e x; – la retta h per i punti U e A; – il punto A' intersezione delle rette a' e h; – il punto X intersezione delle rette u e x; – la retta x' per i punti A' e X.

2.3. Inversa di un'omologia

La proposizione (3) consente di costruire il punto X' corrispondente di un punto X di una omologia, di asse u e centro U, a partire dalla retta u e dai punti U, A, A' e X. Se nella costruzione di X' invertiamo il ruolo di A e A' otteniamo il corrispondente di X nell'omologia inversa della precedente. Di conseguenza, se entrambi i punti sono propri, con una stessa macro si ottiene un'omologia e la sua inversa. Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui i due elementi omologhi sono rette anziché punti.

2.4. Rette limiti

La retta L1, omologa della retta impropria, e la retta L2, che ha per omologa la retta impropria, sono dette *rette limiti*. Da questa definizione segue che:

(4) *Due rette sono parallele se e solo se, le loro omologhe s'incontrano in* L1.

(5) *Due rette s'incontrano su* L2 *se e solo se, sono le omologhe di due rette parallele.*

3. Omologia e rappresentazione prospettica

3.1. La corrispondenza θ associata alla rappresentazione prospettica

La corrispondenza θ che a un punto X del *piano di terra* associa la sua rappresentazione prospettica X' è un'omologia (*cfr.* ad es. Pellegrino, 1999, op. cit., p. 56 e sgg.). Tra le trasformazioni geometriche più comuni la simmetria centrale, quella assiale (ortogonale o non), l'omotetia e la traslazione sono omologie in cui la retta impropria è unita e il centro e/o l'asse sono impropri. Per chi non ha familiarità con la terminologia usata nell'ambito della rappresentazione prospettica (con riferimento alla *Fig.* 4 in cui si descrive la situazione di *Fig.* 1 dopo il ribaltamento del *quadro* sul *piano di terra*) faccio presente che (Ibid., p. 58 e sgg.):

(6) La *linea di terra* LT coincide con l'asse u di θ.

(7) Il *punto di stazione* coincide con la proiezione ortogonale V1 del *punto di vista* V sul *piano di terra*.

(8) Il *punto principale* coincide con la proiezione ortogonale V2 di V sul *quadro*.

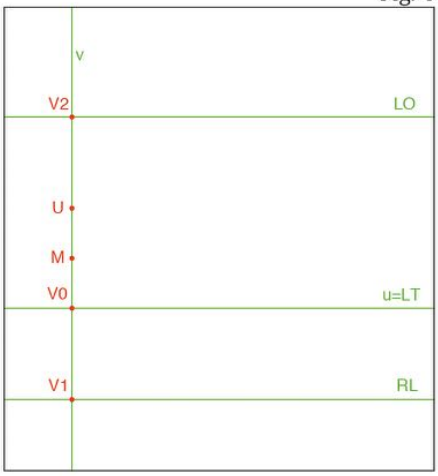
(9) La distanza del *centro* U di θ da LO è uguale a quella tra RL e LT.

(10) Il *punto improprio* V_∞ della retta v ha per omologo V2.

(11) La *linea di orizzonte* LO, che è l'omologa della retta impropria, coincide con la parallela a LT passante per V2.

(12) La *retta limite* RL, che ha per omologa la retta impropria, coincide con la parallela a LT passante per V1.

Fig. 4



3.2. θ si fa in quattro

L'omologia θ è una corrispondenza biunivoca del piano ampliato (punteggiato e rigato). Per impiegarla nei fogli di lavoro definiremo a partire da essa:

(a) la biiezione $\theta(X)$ che a un punto X associa il suo omologo X', ossia la sua rappresentazione prospettica X' vista da V;

(b) la biiezione $\theta'(X)$, inversa della (*a*), che a un punto X associa il punto X' che ha per omologo X, ossia la cui rappresentazione prospettica vista da V è X;

(c) la biiezione θ(x) che a una retta x associa la sua omologa x', ossia la sua rappresentazione prospettica x' vista da V;
(d) la biiezione θ'(x), inversa della (*c*), che a una retta x associa la retta x' che ha per omologa x, ossia la cui rappresentazione prospettica vista da V è x.[3]

4. Indicazioni operative

Per facilitarti il passaggio alla fase operativa riporto i passi da me seguiti per:
- predisporre il foglio di lavoro base;
- costruire le macro delle quattro biiezioni che simulano θ;
- tracciare l'immagine prospettica di una circonferenza γ.

4.1. Il foglio di lavoro base

Aperto un foglio di lavoro, al fine di renderlo adatto al nostro scopo, in conformità a quanto detto nella sez. 3.1, ho creato nell'ordine (*Fig.* 4):
- una retta che rappresenta la linea di terra LT, asse u dell'omologia;
- un punto V0 su LT;
- la perpendicolare v a LT per V0;
- un punto V1 su v (che rappresenta la 1ª proiezione del punto di vista V);
- un punto V2 su v (che rappresenta la 2ª proiezione del punto di vista V);
- la parallela LO a LT per V2 (che rappresenta la linea di orizzonte);
- la parallela RL a LT per V1 (che rappresenta la retta limite);
- il punto U di v (centro dell'omologia) tale che V1 V0 = U V2 (per la 9 della sez. 3.1, possiamo creare U come simmetrico di V0 rispetto al punto medio di V1 e V2).

4.2. Le quattro macro che simulano θ

A partire dal foglio di lavoro base, utilizzando la procedura di *Fig.* 3a e la proposizione (10) per i punti e quella di *Fig.* 3b e la proposizione (11) per le rette, in conformità a quanto detto nella sez. 3.2, ho definito le macro che simulano θ. Più precisamente:

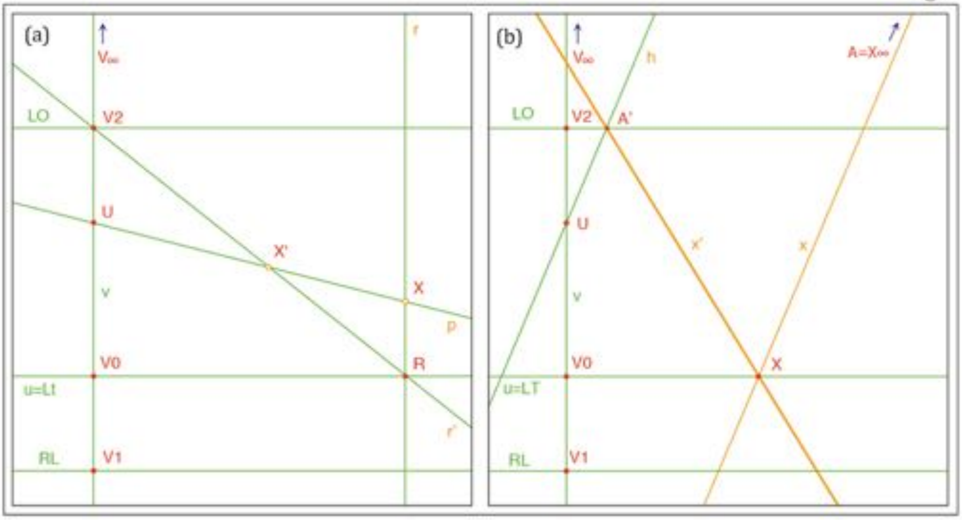
a) Per realizzare la macro Th(X)=Theta(U, LT, V2; X), di oggetti iniziali U, LT, V2 e X, che simula θ(X) e che quindi restituisce il punto X' omologo di X, ho creato nell'ordine (*Fig.* 5a):[4]
   - la retta r per i punti A=V_∞ e X (ossia la parallela r a v passante per X);
   - il punto R intersezione delle rette u=LT e r;
   - la retta r' per i punti A'=V2 e R;
   - la retta p per i punti U X;
   - il punto X' intersezione delle rette p e r'.

---

[3] Per semplicità, avendo indicato con lettere maiuscole (A, A', X, …) i punti e minuscole (a, a', x, …) le rette, non ho distinto tra loro le biiezioni che operano sui punti da quelle che operano sulle rette.

[4] In questo caso ho posto A=V_∞ e A'=V2.

Fig. 5



b) Per realizzare la macro Th'(X)=Theta'(U, LT, V2; X) di oggetti iniziali U, LT, V2 e X, che simula $\theta'(X)$ e che quindi restituisce il punto X' il cui omologo è X, ho creato nell'ordine (*Fig.* 5a):[5]
   – la retta r per i punti A=V2 e X;
   – il punto R intersezione delle rette u=LT e r;
   – la retta r' per i punti A'=V_∞ e R (ossia la parallela r' a v passante per R);
   – la retta p per i punti U X;
   – il punto X' intersezione delle rette p e r'.

c) Per realizzare la macro Th(x)=Theta(U, LT, V2; x) di oggetti iniziali U, LT, V2 e x che simula $\theta(x)$ e che quindi restituisce la retta x' omologa di x, ho creato nell'ordine (*Fig.* 5b):[6]
   – il punto A intersezione delle rette a=r_∞ e x (ossia il punto improprio A=X_∞ di x);
   – la retta h per i punti U e A=X_∞ (ossia la parallela h a x passante per U);
   – il punto A' intersezione delle rette a'=LO e h;
   – il punto X intersezione delle rette u=LT e x;
   – la retta x' per i punti X e A'.

d) Per realizzare la macro Th'(x)=Theta'(U, LT, V2; x) di oggetti iniziali U, LT, V2 e x che simula $\theta'(x)$ e che quindi restituisce la retta x' la cui omologa è x, ho creato nell'ordine (*Fig.* 5b):[7]
   – il punto R intersezione delle rette a=LO e x;

---

[5] In questo caso ho posto A=V2 e A'=V_∞. Nella *Fig.* 5a i nomi dei punti X e X' nonché quelli delle rette r e r' vanno scambiati tra loro.

[6] In questo caso ho posto a=r_∞ e a'=LO.

[7] In questo caso ho posto a=LO e a'=r_∞. Nella *Fig.* 5b i nomi delle rette x e x' nonché quelli dei punti R e R' vanno scambiati tra loro.

– la retta h per i punti U e R;
– il punto R' intersezione delle rette $a'=r_\infty$ e h (ossia il punto improprio $R'=h_\infty$ di h);
– il punto X intersezione delle rette u=LT e x;
– la retta x' per i punti X e R' (ossia la parallela x' a h_∞ passante per X).

4.3. Una scelta che si rivelerà felice

La scelta della coppia di rette utilizzate per definire la macro Th'(x) non è del tutto indifferente. Infatti la scelta di (LO, r_∞) mette in luce la seguente proprietà di θ' che, come vedremo, è fondamentale anche per la risoluzione del problema di cui ci stiamo occupando:
– *qualunque sia la retta* x *si ha che la corrispondente retta* $x'=\theta'(x)$ *è parallela alla retta che congiunge* U *con il punto d'incidenza di* x *con la linea di orizzonte* LO.[8]

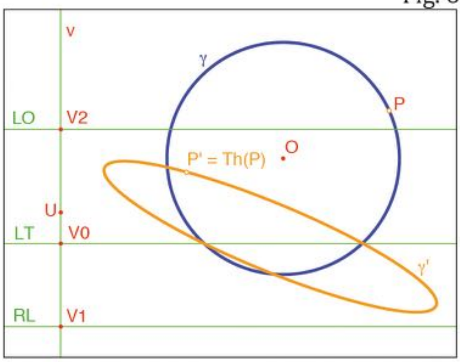
4.4. Immagine prospettica di una circonferenza γ

Per realizzare la rappresentazione prospettica di una circonferenza, partendo dal foglio di lavoro base ripulito dagli oggetti introdotti per definire le quattro macro, ho creato (*Fig.* 6):
– una circonferenza γ, di centro O, ed un punto P di γ;
– la rappresentazione prospettica P'=Th(P);
– la rappresentazione prospettica γ' di γ ottenuta come Luogo di P'.

4.5. Collaudo del foglio di lavoro base

Ultimato il foglio di lavoro base, è bene effettuarne il "collaudo" ed assicurarsi se al variare del raggio di γ o del suo centro O, si verifica che γ' si trasforma in un'ellisse, in una parabola o in un'iperbole a seconda che γ sia esterna, tangente o secante alla retta limite RL.

Fig. 6



[8] Nel seguito del presente studio utilizzeremo le macro (a), (c) e (d) ma non la (b).

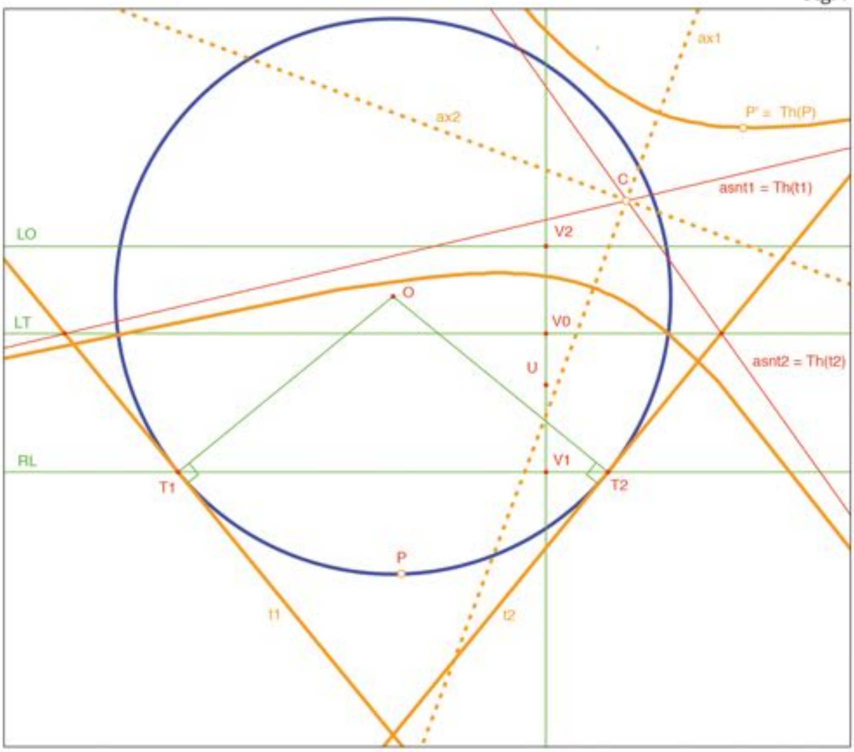
5. Costruzione degli assi di una conica a centro

5.1. Costruzione degli assi e del centro dell'iperbole

Costruire gli assi e il centro dell'iperbole non è difficile. Una volta sistemati gli oggetti iniziali in modo che γ intersechi RL (così γ' assume la forma d'iperbole), basta creare (*Fig.* 7):

– le intersezioni T1 e T2 di γ con RL;
– i raggi O T1 e O T2 e le relative perpendicolari t1 e t2 (che risultano tangenti a γ);
– gli asintoti asnt1 e asnt2 di γ' trasformando t1 e t2 mediante la macro Th(x);
– il centro C di γ' coincide con il punto intersezione degli asintoti mentre gli assi coincidono con le bisettrici, ax1 e ax2, degli angoli formati dagli asintoti.

Fig. 7



5.2. Occorre un'idea

Ovviamente gli assi e il centro così costruiti non resistono al trascinamento: essi esistono sino a quando γ interseca RL, "svaniscono" in caso contrario. Questo vuol dire che ci troviamo in un vicolo cieco? Non è detto. Diciamo piuttosto che occorre un'idea. Un'idea per aggirare l'ostacolo.

Per la mia esperienza a questo punto è naturale cercare di coniugare "l'antico" (i metodi della geometria classica) con "il nuovo" (le potenzialità offerte da

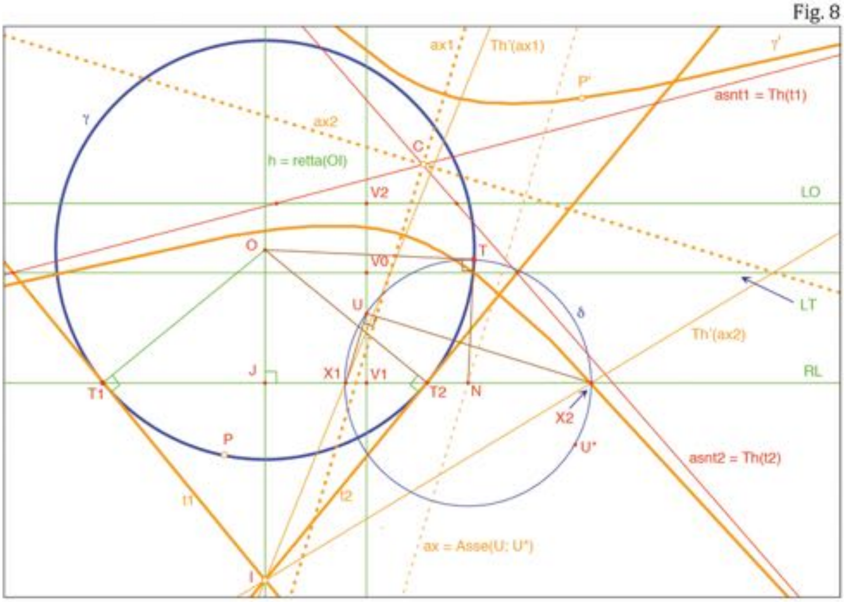
Cabri). Cerco quindi di individuare condizioni necessarie e sufficienti tra gli assi di γ' e altri oggetti già presenti, o introdotti ad hoc, nel foglio di lavoro. L'idea è di utilizzare le proprietà individuate per determinare una serie passi che consentono di costruire gli assi e il centro di γ' cortocircuitando i punti intersezione di γ e RL. Così facendo mi auguro che la costruzione trovata valga anche per l'ellisse oltre che per l'iperbole.

5.3. Come aggirare l'ostacolo per determinare centro e assi di γ'

Concentro la mia attenzione su C che,[9] per quanto detto, è l'omologo del punto intersezione delle tangenti t1 e t2 di γ. Mi chiedo come sia possibile individuarlo cortocircuitando t1 e t2. Studio la situazione. Mentre esamino il foglio di lavoro (*Fig.* 7) ho un'illuminazione: la configurazione formata dal cerchio γ e dalle rette t1 e t2 mi fa pensare all'*inversione circolare*. Sento di essere sulla buona strada: ogni punto diverso dal centro di γ ha inverso ma non è detto che da esso si dipartano due tangenti a γ. Forse ho trovato la chiave per aggirare l'ostacolo (caratterizzare il centro e gli assi indipendentemente dalla presenza o meno degli asintoti). In effetti:

– l'inverso di un punto è costruibile con riga e compasso;[10]
– l'inversione circolare gode di interessanti proprietà tra cui quella di conservare l'angolo tra due rette e quindi tra due curve.[11]

Fig. 8



[9] Puntare l'attenzione sul centro anziché sugli assi mi è sembrata la scelta più praticabile.
[10] Nei software di geometria dinamica esiste un comando che crea l'inverso dei punti (e perfino di altri tipi di oggetti) rispetto una circonferenza.
[11] Per comodità del lettore riporto in *Appendice* 1 alcune generalità sull'inversione circolare. Per una trattazione più ampia rinvio a Courant e Robbins (1941, p. 195 e sgg.).

5.4. Ho "fatto centro"

Per concretizzare l'intuizione avuta aggiungo nel foglio di lavoro (*Fig.* 8):

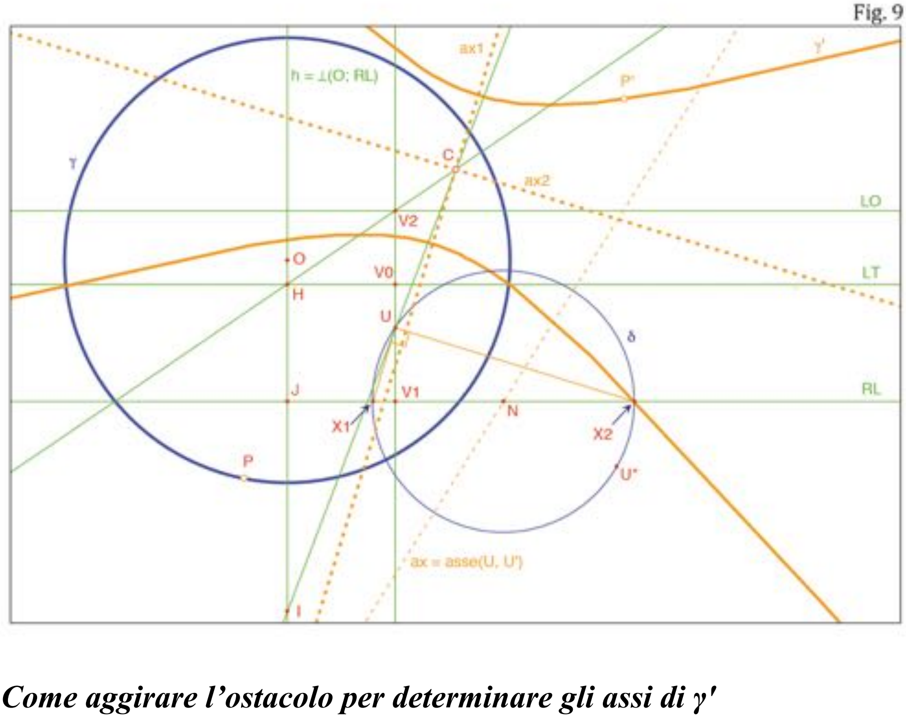
– il punto I, intersezione delle tangenti t1 e t2;
– la retta congiungente il centro O di γ con il punto I;
– il punto J, intersezione delle rette O I e RL.

Esaminando la configurazione ottenuta, salta agli occhi che la retta O I è ortogonale ad RL. Dal *teorema dei punti inversi* (vedi *Appendice* 1) e in particolare dal confronto di *Fig.* A2 (ivi riportata) con *Fig.* 8, segue che i punti I e J sono uno l'inverso dell'altro rispetto alla circonferenza γ. Di conseguenza, essendo il punto C, intersezione delle omologhe delle rette t1 e t2 si ha che:

– *il centro* C *dell'iperbole* γ' *è l'omologo del punto* I, *inverso rispetto a* γ *del punto* J, *proiezione ortogonale su* RL *del centro* O *di* γ.

Conclusione: Siamo in grado di costruire O cortocircuitando le tangenti t1 e t2 di γ.

Fig. 9



5.5. Come aggirare l'ostacolo per determinare gli assi di γ'

Trovato il modo per individuare il centro, cortocircuitando le tangenti, resta da trovare quello per individuare gli assi. Decido quindi di studiare le proprietà delle rette Th'(ax1) e Th'(ax2) che hanno per omologhi gli assi. Di conseguenza aggiungo sul foglio di lavoro (*Fig.* 9):

– le rette Th'(ax1) e Th'(ax2);
– i punti intersezione X1 ed X2 di RL rispettivamente con Th'(ax1) e Th'(ax2);

– i segmenti U X1 e U X2.

Esaminando con un minimo di attenzione il foglio di lavoro ho l'impressione che:

– l'angolo X1 U X2 sia retto (il che assicurerebbe che X1, U e X2 sono inscrivibili nella circonferenza δ passante per U e centro nel punto medio N di X1 e X2).

L'impressione è rafforzata dal trascinamento degli oggetti e confermata dai comandi "Misura angolo" e dal test "Perpendicolare?". Del resto, a ben pensarci, si ha che:

– *le rette* ax1 *ed* ax2 *sono ortogonali tra loro se e solo se lo sono i segmenti* U X1 *e* U X2;

in quanto per l'osservazione di sez. 4.3 si ha che:

– la direzione di ax1 coincide con quella della retta U X1;
– la direzione di ax2 coincide con quella della retta U X2.

5.6. Siamo in un vicolo cieco?

Il precedente risultato purtroppo non è risolutivo: non dà indicazioni sufficienti per caratterizzare la circonferenza δ che individua i punti X1 e X2 che consentono di costruire gli assi. Non è detto però che ci troviamo in un vicolo cieco. Infatti, a ben vedere la questione si è spostata in quella dell'individuazione della circonferenza δ, o meglio del suo centro, N.

La cosa non è del tutto banale ma vale la pena provarci. Per cominciare, dal momento che sappiamo già che N è un punto di RL è sufficiente individuare un'altra retta che contiene N. Creata quindi:

– la circonferenza δ di centro N, punto medio di X1 e X2, passante per U;

cerco di 'vedere' se δ presenta qualche particolarità rispetto a oggetti presenti sul foglio di lavoro. Pensandoci mi accorgo che:

– le circonferenze δ e γ sono (sembrano?) ortogonali!

Cerco quindi di assicurarmene. Di conseguenza, per evitare abbagli:

– misuro l'angolo O T N (ove T è uno dei due punti intersezione di δ e γ), appare la scritta "90°" che resiste al trascinamento.

Confortato da questa verifica al fine di giustificare questo fatto cerco aiuto nella teoria. Purtroppo non mi viene in mente nulla. Non mi scoraggio. Avendo notato che:

– l'inverso U* di U rispetto alla circonferenza γ appartiene a δ;

posso fugare ogni dubbio dimostrando il *teorema dei cerchi ortogonali* (vedi *Appendice* 1) grazie al quale si può stabilire che:

– *i punti* X1 *e* X2, *che consentono di individuare le direzioni degli assi, coincidono con i punti intersezione della circonferenza* d *che ha centro nel punto* N *intersezione di* LT *con l'asse* ax *dei punti* U, *centro dell'omologia, e* U*, *inverso di* U *rispetto alla circonferenza* γ.

Conclusione: siamo in grado di costruire gli assi ax1 e ax2 cortocircuitando le tangenti t1 e t2 di γ.

5.7. Una costruzione degli assi delle coniche a centro

In forza di quanto stabilito nelle conclusioni riportate alla fine delle sezioni 5.4 e 5.6 siamo in grado (puoi provare anche tu) di dare la costruzione, con riga e compasso, per gli assi dell'iperbole che, per quanto detto vale anche per l'ellisse, anch'essa conica a centro.

5.8. Collaudo e verifica della costruzione trovata

Realizzo sul foglio di lavoro la costruzione trovata (*Tavola* 1). La verifico. Noto così che trascinando γ è possibile verificare che essa oltre che per l'iperbole:

– vale anche per l'ellisse (è una conseguenza di quanto detto in 5.3);
– ma non per la parabola (che si presenta quando γ appare tangente ad RL).

Che la nuova costruzione non valga per la parabola è ovvio. Utilizzo allora Cabri per capire quali sono le cause di questa sparizione. Trascino O in modo da accostare tra loro γ e RL sino a farle apparire tangenti, mi rendo conto che mentre la distanza tra γ e RL si avvicina a zero, i punti X1 e J tendono entrambi ad I e, nello stesso tempo, la retta J U tende a essere parallela a U X1. Il che, al limite, comporta la sparizione di C e quindi di ax1 e ax2. Ovviamente la cosa era intuibile (la parabola non ha centro proprio!) ma adesso ho le idee più chiare.

Tavola 1.

Una costruzione per gli assi delle coniche a centro

Gli assi di un'iperbole γ', rappresentazione prospettica di una circonferenza γ vista da un punto V di proiezioni V1 e V2 (o, che è lo stesso, trasformata dell'omologia di centro U e asse LT in cui al punto improprio V_∞ o alla retta impropria r_∞ corrispondono rispettivamente V2 e la linea di orizzonte LO) si possono costruire con la seguente procedura:

- Traccia la circonferenza δ ortogonale a γ passante per U che ha centro su RL:
  - crea l'*inverso* U* di U rispetto alla circonferenza γ;
  - crea l'*asse* ax dei punti U ed U*;
  - crea il punto *intersezione* N delle rette ax e RL;
  - crea la *circonferenza* δ di centro N passante per U.
- Individua, mediante due segmenti, le direzioni degli assi di γ':
  - crea i punti *intersezione* X1 ed X2 di RL e δ;
  - crea i *segmenti* U X1 e U X2.
- Traccia il punto I il cui omologo è il centro C di γ':
  - crea (mediante la *perpendicolare* h) la proiezione J di O sulla retta RL;
  - crea l'*inverso* I (rispetto a γ) del punto J.
- Traccia il centro C di γ':
  - crea il punto C=Th(I) omologo del punto I;
- Traccia gli assi ax1 e ax2 di γ':
  - crea le *parallele* per C alle rette U X1 e U X2.

6. Costruzione degli assi di una conica

6.1. Una costruzione generale è possibile?

La costruzione realizzata non vale per la parabola. Considerato che nella pratica dei fogli di lavoro ciò non è facilmente rilevabile potrei chiuderla qui. Invece più che cercare una costruzione ad hoc per gli assi della parabola preferisco provare a modificare la costruzione in modo da eliminare l'eccezione. La cosa non è semplice ma vale la pena tentare.
Dal momento che l'anomalia dipende dalla sparizione di C occorre, a differenza di quanto fatto prima, costruire C a partire dagli assi e non viceversa. Arrivo così alla conclusione che per ciascun asse occorre individuare un punto proprio che gli appartiene. Dopo averci pensato un po', mentre esamino il foglio di lavoro, ho un'illuminazione: per cortocircuitare C posso ricorrere alla polarità rispetto alla circonferenza γ in quanto C è l'omologo del polo della proiezione di O su RL.[12]

6.2. È possibile cortocircuitare C?

È possibile cortocircuitare C? È possibile farlo utilizzando la polarità? Stavolta è andata un po' diversamente dal solito. Per brevità mi limito a fare "la cronaca in diretta" di quanto accaduto.
Volendo individuare per ciascun asse un punto proprio che gli appartiene, accentro l'attenzione sui punti X1 e X2 che sono collegati agli assi in quanto ne individuano la direzione. Come primo passo creo l'inverso Y1 di X1. Mi balza subito agli occhi che Y1 appartiene a δ. Ciò non mi sorprende: δ è ortogonale a γ e quindi è unita nell'inversione rispetto a γ (proprietà I.5). Questo primo passo è incoraggiante. Proseguo creando l'omologo Z1 di Y1. Sorpresa: Z1 sembra appartenere ad ax2. Penso a un caso. Uso il trascinamento di più oggetti per togliermi il dubbio: l'appartenenza di Z1 ad ax2 resiste. Provo con X2 idem: anche l'omologo Z2 dell'inverso Y2 di X2 sembra appartenere ad ax1. Lo scambio d'indici da 1 a 2 e viceversa mi fa pensare che quanto osservato sia vero e possa essere dimostrato a partire dal teorema di reciprocità che lega tra loro gli assi di una conica. Rilevo poi che questa congettura se dimostrata fornisce la chiave per generalizzare la costruzione realizzata prima. Rompendo ogni indugio passo a utilizzare quanto osservato "per vedere l'effetto che fa".

6.3. Una "buona candidata" a costruzione generale degli assi di una conica

Sia pure con qualche riserva siamo in grado (puoi provare anche tu) di elaborare la procedura che è "una candidata" per essere una costruzione, con riga e compasso, degli assi di una conica (a centro e senza centro!). Direi addirittura che sia una "buona candidata" in quanto grazie ad essa ho

---

[12] Per comodità del lettore riporto in *Appendice* e alcune generalità sulla polarità rispetto a una circonferenza. L'argomento può essere approfondito in Bruni (1990, p. 247 e sgg.).

realizzato le animazioni presenti su YouTube indicate all'inizio del presente articolo.

Tavola 2.

Una costruzione per gli assi di una conica (?)
Gli assi di una conica γ', parabola inclusa, rappresentazione prospettica di una circonferenza γ vista da un punto di proiezioni V1 e V2 (o, che è lo stesso, trasformata dell'omologia di centro U ed asse LT in cui al punto improprio V_∞ o alla retta impropria r_∞ corrispondono rispettivamente V2 e la linea di orizzonte LO), sempre che sia valida la congettura formulata, si possono costruire (vedi Fig. 10) seguendo la seguente procedura:
– Traccia la circonferenza δ ortogonale a γ passante per U che ha centro sulla retta limite RL:
– crea l'inverso U* di U rispetto alla circonferenza γ;
– crea l'asse ax dei punti U ed U*;
– crea il punto intersezione N di ax con RL;
– crea la circonferenza δ di centro N passante per U.
– Individua, mediante due segmenti, le direzioni degli assi di γ':
– crea i punti intersezione X1 ed X2 di RL con δ;
– crea i segmenti U X1 e U X2.
– Individua un punto Z2, dell'asse ax1:
– crea l'inverso Y2 rispetto a γ di X2;
– crea Z2=Th(X2) rispetto a γ di Y2.
– Individua un punto Z1, dell'asse ax2:
– crea l'inverso Y1 rispetto a γ di X1;
– crea Z1=Th(X1) rispetto a γ di Y1.
– Traccia gli assi ax1 e ax2 di γ':
– crea la parallela ax1 per Z2 alla retta U X1;
– crea la parallela ax2 per Z1 alla retta U X1.
– Traccia il centro C di γ':
– crea il punto C intersezione di ax1 con ax2.

6.4. Collaudo e verifica della costruzione trovata

Realizzo sul foglio di lavoro la costruzione elaborata (*Tavola* 2). La verifico. Noto così che la nuova costruzione sembra funzionare benissimo. Tant'è che quando ridefinisco la circonferenza γ in modo da renderla tangente a RL la nuova procedura resiste al trascinamento e l'asse della parabola non si dissolve (*Fig.* 11).

Ovviamente come in genere accade, a parte le riserve già espresse, la costruzione elaborata continua a presentare qualche criticità. Ad esempio se si avvicina il centro O di γ alla retta v, molte rette tendono ad "appiattirsi" su di essa il che comporta la sparizione dei loro punti intersezione e … degli assi (questa costruzione, quindi, presenta come eccezione proprio il caso più semplice, quello in cui γ è vista di fronte: *Fig.* 1b).

Fig. 10

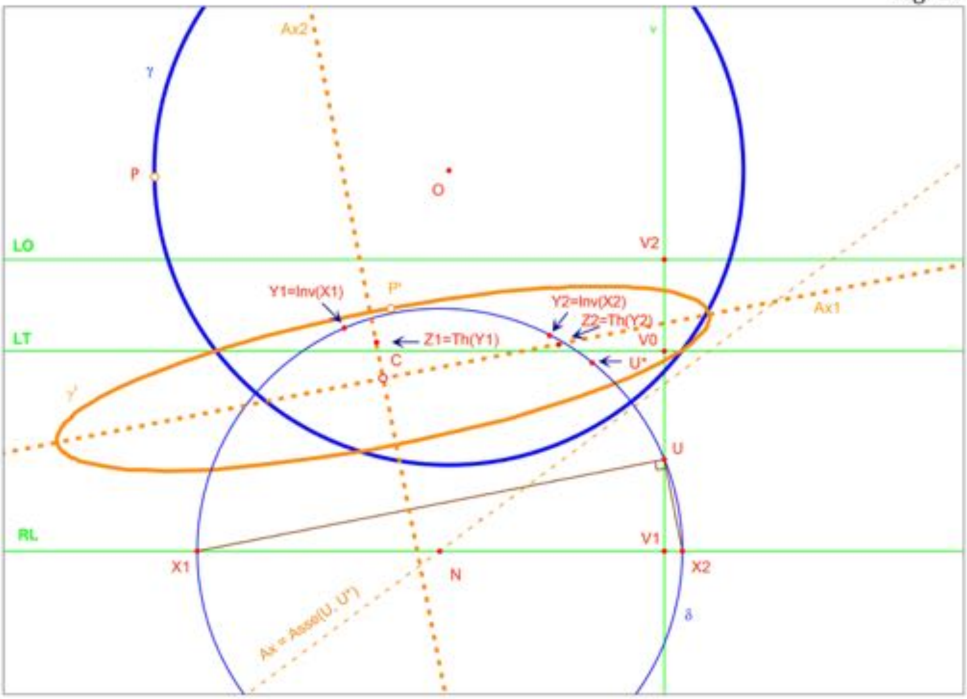
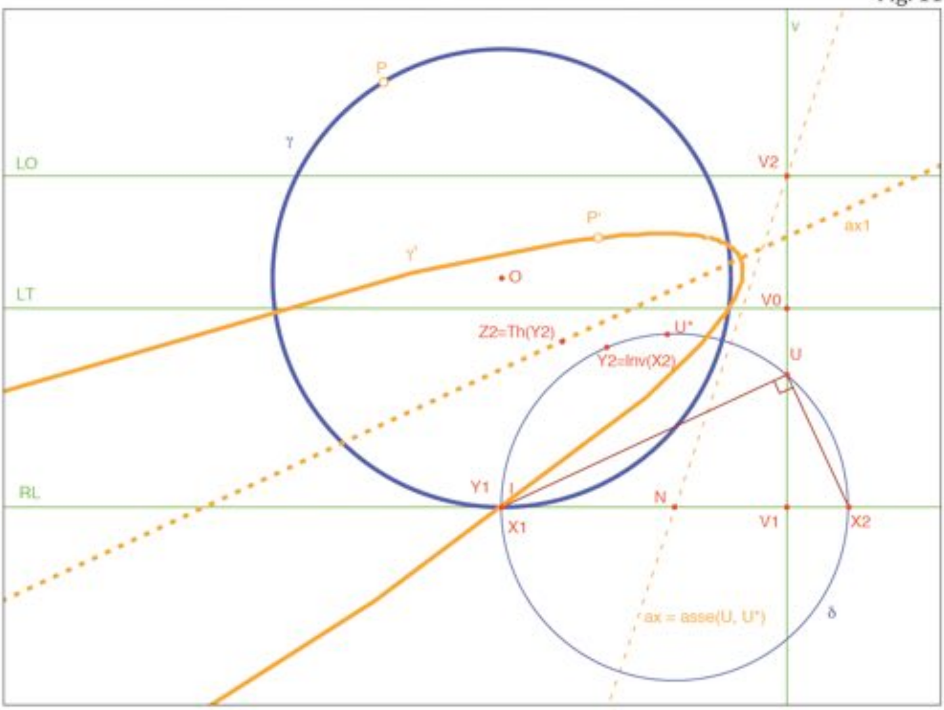

Ax2
v
γ
P
O
LO
V2
Y1=Inv(X1)
P'
Y2=Inv(X2)
Z2=Th(Y2)
Ax1
LT
Z1=Th(Y1)
V0
C
U*
γ'
U
RL
V1
X1
N
X2
Ax = Asse(U, U*)
δ

Fig. 11


v
P
γ
LO
V2
P'
ax1
γ'
O
LT
V0
Z2=Th(Y2)
U*
Y2=Inv(X2)
U
Y1
N
RL
X1
V1
X2
ax = asse(U, U*)
δ

7. Commiato

Al momento mi fermo qui. Conto di ritornarci su, per dimostrare (o confutare) la congettura formulata in precedenza ma anche per approfondire alcune idee che qui ho accantonato per non correre il pericolo di ricominciare tutto dall'inizio o quasi: mi dispiacerebbe che negli atti della giornata di studio dedicata ai *70 anni di Bruno* (di cui mi onoro di essere anche amico), i *30 del NRD di Bologna* e del convegno *Incontri con la Matematica* (che ho visto nascere, crescere e consolidarsi) mancasse il mio contributo.
Spero comunque di essere riuscito nell'intento di averti fatto toccare con mano l'ampia portata delle potenzialità offerte dai software di geometria dinamica. Se hai ancora dei dubbi mi limito a fare presente che così come il telescopio di Galileo ha permesso di vedere così lontano da mostrare nitidamente le stelle, la luna e in generale gli astri all'epoca ritenuti irraggiungibili, l'utilizzo di Cabri mi ha consentito di affinare la mia capacità di vedere e scoprire aspetti geometrici nonché di fare congetture e, spesso, dimostrarle o confutarle più di quanto avessi immaginato prima di prendere confidenza con esso.

Riferimenti bibliografici

Bruni, M. (1990). *La figura e il numero. Lezioni di geometria*, vol. 1. Milano: Editoriale Veschi.

Castelnuovo, G. (1903). *Lezioni di geometria analitica* (*e proiettiva*) (rist. 1961[13]). Milano-Roma: Soc. Ed. Dante Alighieri.

Courant, R., & Robbins, H. (1941). *Che cos'è la matematica*? *Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi* (trad. it. 2000, dell'ed. 1996 con integrazioni di I. Stewart). Torino: Bollati Boringhieri.

Pellegrino, C. (1999). *Prospettiva*: *il punto di vista della geometria*. Bologna: Pitagora.

Pellegrino, C., & Tomasi, L. (2004). Alla riscoperta della rappresentazione prospettica con "Cabri", *Progetto Alice*, *5*(14), 431–446.

Pellegrino, C., & Zagabrio, M. G. (1996). *Invito alla Geometria con Cabri-géomètre. Spunti di lavoro per la Scuola Secondaria Superiore*. Trento: IPRASE Trentino.

Appendice 1

Inversione circolare

Consideriamo in un piano una circonferenza γ di centro O e raggio r. Chiamiamo *inversione circolare*, o inversione rispetto a γ, la corrispondenza che a ogni punto P, distinto da O, associa il punto P* che giace sulla semiretta OP tale che:

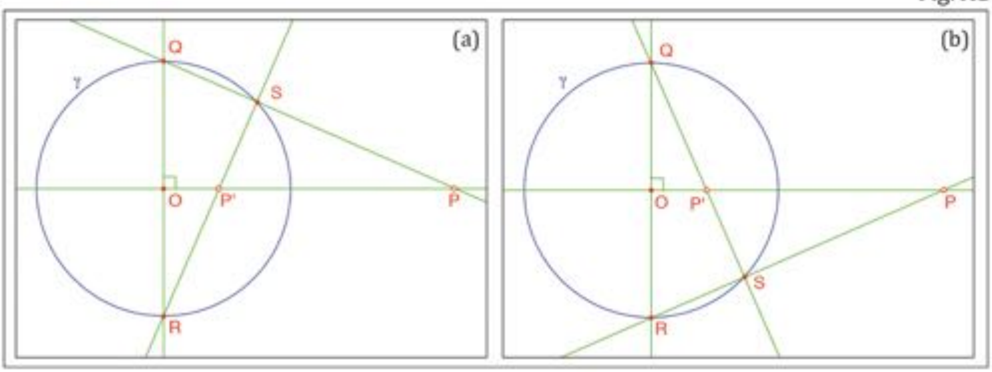
$$OP \cdot OP^* = r^2$$

La circonferenza γ è detta *circonferenza d'inversione* o *circonferenza base*, mentre il punto O e il numero reale r sono detti rispettivamente *centro* e *raggio d'inversione*. Il corrispondente P* di P invece è detto *inverso* di P (rispetto a γ).

Ovviamente se P è interno a γ, P* è esterno e viceversa. I punti di γ corrispondono a se stessi e quindi sono gli unici punti uniti dell'inversione. Inoltre dall'interscambiabilità di P e P* nella definizione d'inversione segue che *l'inversione circolare è una involuzione*.

Costruzione dell'inverso di un punto rispetto a una circonferenza γ. La costruzione dell'inverso di un punto rispetto a una circonferenza γ è eseguibile con riga e compasso. In (*Fig.* A1) ne riportiamo una (*cfr*. Pellegrino e Zagabrio, 1996, p. 90 e sgg.) che, a differenza di tante altre, vale sia se P è interno a γ sia se è esterno.

Fig. A1



[*Segue*]

Proprietà dell'inversione. Dalla definizione segue che l'inversione gode delle seguenti proprietà (Courant e Robbins, op. cit., p. 197):

(I.1) *I punti di una retta passante per* O *vanno nei punti della stessa retta*.

(I.2) *I punti di una retta non passante per* O *vanno nei punti di un cerchio passante per* O.

(I.3) *I punti di un cerchio passante per* O *vanno nei punti di una retta non passante per* O.

(I.4) *I punti di un cerchio non passante per* O *vanno nei punti di un cerchio non passante per* O.

(I.5) *I punti di un cerchio* d *ortogonale a* γ *vanno in punti di* d.

Un'altra importante proprietà è:

(I.6) *L'angolo tra due rette o due curve è invariante rispetto all'inversione*.

Dalla definizione d'inversione circolare e dal 1° teorema di Euclide si ha il seguente:

(I.7) ***Teorema dei punti inversi***. *Siano* P *e* Q *due punti di una semiretta uscente dal centro* O *di una circonferenza* γ (*Fig.* A2). *I punti* P *e* Q *sono uno l'inverso dell'altro rispetto a* γ *se e solo se la retta* T1 T2*, congiungente i punti di contatto delle tangenti a* γ *uscenti da* P*, è ortogonale a* P O *nel punto* Q.

Dalla definizione d'inversione circolare e dal teorema di Pitagora si ha il seguente:

(I.8) ***Teorema dei cerchi ortogonali***. *Siano* P *e* Q *due punti di una semiretta uscente dal centro* O *di una circonferenza* γ *e sia* h *l'asse del segmento* P Q (*Fig.* A3). *Una circonferenza* δ *di centro in un punto* C *di* h *è ortogonale a* γ *se e solo se i punti* P *e* Q *sono uno l'inverso dell'altro rispetto a* γ.

Fig. A2

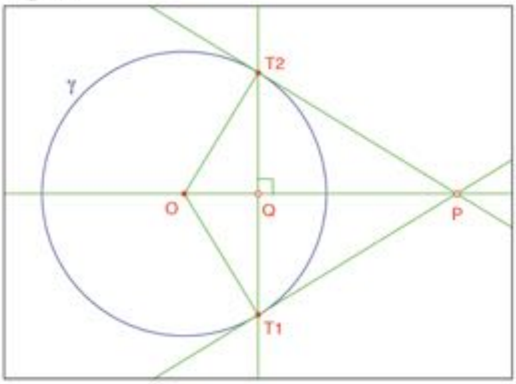
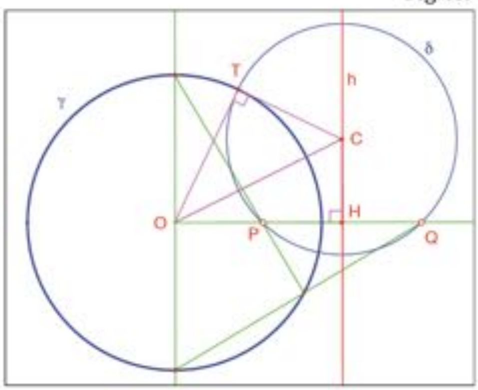


Fig. A3



Appendice 2

Polarità piana

Consideriamo in un piano una circonferenza γ di centro O e raggio r. Chiamiamo *polarità* rispetto a γ la corrispondenza che a ogni punto P, distinto da O, associa la retta p tale che:

– p passa per l'inverso P* di P ed è ortogonale a OP.

Punto e retta si chiamano rispettivamente *polo* e *polare* l'uno dell'altra rispetto a γ. Dal legame emerso tra polarità e inversione (sintetizzato dalla *Fig.* A2) segue immediatamente che la polarità è una corrispondenza biunivoca. Di più si ha che:

(P.1) *La polare di un punto* P *è esterna, secante o tangente in* P *a* γ *a seconda che* P *è interno, esterno o appartiene a* γ.

(P.2) ***Teorema di reciprocità o dei punti coniugati*** (Bruni, op. cit., *p*. 251). *Se di due punti il secondo appartiene alla polare del primo, il primo appartiene alla polare del secondo* (e i due punti si dicono *reciproci o coniugati*, rispetto a γ).

Le API e L'ARCHITETTO: le Scienze tra artigianato e arte

Tiziano Pera
Gruppo di Ricerca in Didattica delle Scienze, Università di Torino

Sunto. *Questo mio breve scritto vuole sottolineare il fondamentale contributo di Bruno D'Amore alla epistemologia della didattica disciplinare come ricerca di senso per la professionalità docente. Si tratta di un tema cruciale soprattutto per la scuola di oggi che è chiamata a coniugare apprendimenti e competenze a sostegno della emancipazione degli allievi.*

Se è vero che in un punto ci può stare tutto l'infinito,[1] è anche vero che in ogni azione didattica d'aula c'è tutta l'infinità di sfumature epistemiche che regolano la complessità della relazione tra insegnamento e apprendimento. Quest'affermazione potrebbe sembrare banale se nella Scuola molti non fossero ancora lì a discutere di come e di quanto le didattiche disciplinari siano intrise di didattica generale e viceversa.

Che la didattica delle Scienze, tanto per fare un esempio, debba essere intesa come epistemologia dell'apprendimento riferito alle medesime Scienze e che detta didattica debba intendersi come "*ars docendi*" è fuori discussione (D'Amore, 2003, pp. 23–24), eppure c'è ancora chi si domanda se conti di più il dominio dei contenuti su cui esprimere una valutazione giudicante (obiettivi di apprendimento) oppure la capacità degli allievi di richiamare e rielaborare quegli stessi contenuti affrancandoli dal contesto di apprendimento primario (quello di pertinenza disciplinare) per liberarli a nuovo vigore entro il contesto problematico della vita (competenza di cittadinanza, in merito alla quale valutare nel senso di "dare e ricevere valore"). La questione mi richiama alle api che producono il miele passandosi il nettare di bocca in bocca e malgrado ognuno possa liberamente esprimere un voto sulla qualità del prodotto che ne viene, noi mangiamo il miele, non il voto. La metafora ci porta all'idea dei "bambini-ape" che sciamano dall'alveare (Scuola) alla ricerca dei vari tipi di nettare (informazioni, nozioni, concetti e abilità, cioè *apprendimenti disciplinari*) per rimasticarli e trasformarli in … "miele" (cioè la competenza).

Bastano i bambini-ape per alimentare il mondo della scuola? È chiaro che no: ancora oggi alle api occorre un "architetto" (Cini, de Maria, Jona-Lasinio, &

[1] "*In obscurum coni conduxit acumen*" vedi in Lucrezio, "De rerum Natura" sulla scorta dei teoremi di Euclide riferiti alla visione dei piani.

Ciccotti, 1976) che le accompagni non tanto a trovare risposte giuste, quanto a porsi domande sensate: l'*ars docendi* è dunque per la gran parte ancora da ricercare in quell'infinito che Bruno D'Amore, maestro autentico, da sempre ci propone di cogliere alla congiunzione tra artigianato e arte (D'Amore, 2003, p. 24).

Riferimenti bibliografici

Cini, M., de Maria, M., Jona-Lasinio, G., & Ciccotti, G. (1976). *L'ape e l'architetto. Paradigmi scientifici e materialismo storico*. Milano: Feltrinelli.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Mathematics and Mathematics classroom activity through the lens of a metaphor

Luis Radford
Université Laurentienne, Canada

¿Será posible saber sin ser?
(D'Amore, 2015, p. 153)

Abstract. *This essay is my contribution to the celebration of Bruno D'Amore's 70th birthday, In it I suggest a metaphor for mathematics and mathematics classroom activity. I suggest to conceive of mathematics classroom activity as a joint endeavour that is carried out together by teachers and students, much like the joint endeavour that is carried out by an orchestra that performs, say, a symphony in a music hall. What the orchestra produces through its activity is a sensible aural phenomenon: music. In the same way, I submit, mathematics is something sensible, something that is produced by the joint endeavour of the teachers and the students and that is simultaneously visual, tactile, olfactory, aural, material, artefactual, gestural, and kinesthetic.*

1. Introduction

One of the themes that surfaces again and again in the work of Bruno D'Amore is that of practice. In his recent work, D'Amore draws on the sociological idea of practice to offer an understanding of mathematics classroom and a typology of practices. He suggests that we consider the mathematics classroom "as a community of shared practices having as its goal the construction of knowledge" (D'Amore & Radford, in press).

In this short essay, with which I would like to contribute to the celebration of Bruno D'Amore's 70th birthday, I would like to reflect on the idea of the mathematics classroom as a community of practices. But I will dare to reverse the pieces somewhat and argue that what is usually termed practice can be better rendered through what Russian dialectical thinkers such as Vygotsky and Leont'ev have called *deyatel'nost'* and that is usually translated as *activity*. But, as we shall see in a moment, the translation is misleading.

In the first part of this essay I will summarize the idea behind *deyatel'nost'*. I will then resort to a metaphor to argue that mathematics classroom practice (or mathematics classroom activity) can be considered very much like the musical activity of an orchestra or a musical ensemble in a music hall. First, I would like to start with a culinary anecdote because it was while enjoying a piece of Santa Fe chicken and a glass of wine that I was confronted with the difference between activity and practice.

2. The Santa Fe Chicken

Sometime in the early 2000s Bruno sent me an email to see whether or not one of his PhD students could come to spend some time in my Research Laboratory at Laurentian University. The student, I was told, was working on semiotics. After some email exchanges, we fixed the date for the student's visit to be in late spring. The student was interested in understanding the differences between Raymond Duval's (1995, 1998) approach to signs and human learning, Juan Godino and collaborators's famous onto-semiotic approach (see, e.g., Font, Godino, & Gallardo, 2013), and the Vygotskian semiotic cultural approach I was trying to articulate (Radford, 2006; for recent formulations, see Radford, 2008, 2014).

After some weeks of intense discussions around mathematics classroom videos and the analysis of students' productions, we made some progress. The difference between the approaches started to emerge with more clarity. But, of course, the student had to return to his country. So, on the eve of his departure I made a reservation at a restaurant not far from the university.

That evening, with his kind smile and manners, working on a robust and colourful salad, Giorgio Santi was sitting across from me. With a glass of wine in his hand, he mentioned that differences between the onto-semiotic approach and the cultural one cannot be found in the concept of activity. Although the onto-semiotic approach may not have "activity" among its main theoretical constructs, it resorts systematically to the concept of practice. "In the onto-semiotic approach, they talk about the mathematician's practice," Giorgio contended. Giorgio was right (Santi, 2011).

I remember that I tried to counter by saying that these were not the same thing. But I had to surrender. I could not explain why. The differences were not clear. What, indeed, do we mean by practice and by activity? The discussion ended up without conclusion. It ended with a sense that, to make the differences visible, I had to keep thinking about the meaning of activity. To argue, as I did, that I was using it in Leont'ev's (1978) sense was not enough.

3. *Deyatel'nost'*

The Merriam-Webster online dictionary gives the following definition of activity: "something that is done as work or for a particular purpose" (http://www.merriam-webster.com/dictionary/activity). This definition highlights two things: First, activity is about doing; second, it is about doing something purposely. It is from this sense of activity that the usual conceptions of activity derive. For instance, activity is conceived of as a series of actions that an individual performs in the attainment of his or her goal. The German and Russian languages have a specific term for this conception of activity as being simply busy with something: Aktivität, and aktivnost', respectively (Roth & Radford 2011).

There is, however, another sense for activity, which is the one emphasized in dialectical materialism, where activity does not merely mean "to do, and be busy with, something." The German and Russian languages have a specific term that better conveys the idea of activity of dialectical materialism: *Tätigkeit* (in German) and *deyatel'nost'* (in Russian), one that puts at its heart the idea of life.

When Leont'ev tries to define activity, this is what he does, and to do so he talks about a *unit of life*. Leont'ev says that activity

> is a molar, not an additive unit of the life of the physical, material subject . . . activity is not a reaction and not a totality of reactions but a system that has structure, its own internal transitions and transformations, its own development. (1978, p. 50)

Let me insist: activity as *Tätigkeit* or *deyatel'nost'* is a *form of life.* More precisely, it is a social form of joint endeavour that comprises self-expression, intellectual and social development, and aesthetic enjoyment.

In this line of thought, activity refers to what Aristotle describes in his *Metaphysics* as a process – an unfolding energy – , something that in modern terms we may call a *dynamic system* that, instead of being simply object- or goal-oriented, is geared to the satisfaction of collective needs and the self-expression of the individuals.

When I was finishing my Santa Fe chicken that memorable evening with Santi, I had not realized yet that behind this dialectical idea of activity rests a specific anthropological conception of the human. I had not realized yet that the dialectical idea of activity can only be understood if we think of it along with the corresponding anthropological conception of the human. It took me years to realize it. It is perhaps the French philosopher Frank Fischbach that helped me the most to understand it during the lengthy conversations that he had when he was visiting Laurentian University and my research lab. The interested reader can watch Fischbach's brilliant lecture on subjectivity in our site: http://penseeetculture.ca/2015-16-conferences/

The deep relationship between activity and the concomitant concept of the human can be stated as follows (of course, I am simplifying, but the account is sufficient to make my point, I hope. The sceptical readers will have to dig into Marx's Parisian manuscripts, i.e., the *1844 economic and philosophical manuscripts* and *The German Ideology*). Humans, following Marx's (1998) Spinozist stance, are considered to be part of nature: they are considered *natural beings*. That humans are natural beings means that they are sensible beings. And to say that humans are sensible beings means that humans are unavoidably *affected* by the other parts of nature: by things and people, and by what other people do and think. In this context, sensations and passions are conceptualized as ontological affirmations of the individual's nature as a natural being (Fischbach, 2004).

One important consequence of this theoretical stance is that the individual's existence cannot be conceived of as a substantial entity, produced from within, as articulated by the humanist trend of the Enlightenment. The individual's existence is *relational* through and through. It appears to be profoundly linked to an ensemble of relationships with other parts of nature – including social relationships – and is based on culturally and historically constituted conditions of life. This is what Marx says in the famous sixth thesis on Feuerbach, when he defines that which makes us human: "But the essence of man [sic] is no abstraction inherent in each single individual. In its reality it is the ensemble of the social relations" (1998, p. 570). From this idea of humans, Marx can assert that "Essence, therefore, can be regarded only as 'species', as an inner, mute, general character which unites the many individuals in a *natural way*" (p. 570; emphasis in the original). In this line of thought, to be a natural being means also that, like other natural living beings, humans are *beings of need* who find their satisfaction in objects *outside* of themselves.

But the story does not stop there. To meet their needs (needs of survival and also artistic, spiritual, intellectual, and other needs created by/in society), humans engage actively in the world. They *produce*. What they produce to fulfil their needs occurs in a social process that is, at the same time, the process of the *individuals' inscription in the social world* and *the production of their own existence*. In dialectical materialism, the name of this process is deyatel'nost', that is, *activity.* This is why, from this perspective, sensuous, material activity is considered the ultimate field of aesthetic experience and cognition and that discourse-oriented, and practice-oriented, and deyatel'nost'-oriented ways of theorizing are not the same (Radford, in press).

In *A cultural historical perspective on teaching and learning* (Roth & Radford, 2011) my colleague Michael Roth and I tried to look at classroom activity through the lens of deyatel'nost'. To do so, we resorted to Leont'ev's (1978) seminal work. In articulating a psychological approach based on the idea of activity as deyatel'nost', Leont'ev (1978) highlighted some of activity's basic components: an activity for him is characterized by its object and its motive. The object and motive of an activity are the engines that keep activity in motion. In practice, in the pursuit of the activity's object, individuals break down the object into a sequence of goals with which actions are associated. He referred to the material conditions through which the actions occur as operations. In the Supplement to his important 1978 book – a supplement dedicated to educational matters – Leont'ev discusses the conditions under which a certain theoretical learning content can be meaningfully perceived or attended to by the student. He contends that

> in order that the perceived content be recognized, it is necessary that it occupy the structural place of a direct goal of action in the subject's activity, and thus that it appear in a corresponding relation to the motive of this activity. (Leont'ev, 1978, p. 153)

It is hence through activity and the structural interconnection between motive, object, goals, and actions that the learning content becomes disclosed to the student's consciousness.

Activity Theory, as this approach has come to be known, has had an important impact on education in general and mathematics education in particular. Yet, in focusing on the *procedural* aspect of activity, activity is reduced to its operational and functional dimension, eradicating the aesthetic and political dimensions of action and creation, culminating unfortunately in a dull technological account of what was originally thought of as the sensible experience of *life* – human life.

How, then, could we recover the idea of activity in the sense of deyatel'nost'? It is here where I need to turn to the metaphor of music.

4. Mathematics as a sensible, material phenomenon

In a Colloquium on Symbolic Cognition that Stephen Hegedus organized in a secluded and remote hotel in Vermont a few years after Giorgio's visit to my laboratory, I was having breakfast with some mathematicians and mathematics educators at a table by a window. We were there together for one week. We could see the beautiful, totally white landscape. It had been snowing without interruption for days. It was January and it was cold. I do not remember what brought us to discuss the nature of mathematics. Maybe it was a good night's rest, or an interesting discussion on symbols the day before, or both. I ventured to mention that mathematics could not be equated to symbols. Mathematics, I argued, is not comprised of the symbols on the pages of a book. The symbols on the pages of a book are exactly that – *symbols*, or *marks,* if you want me to put it more bluntly. To sustain my claim, I resorted to music. In the same way that there is no music in a score sheet, there is no mathematics in the pages of a textbook. Music is what we *hear* when people play instruments. Mathematics is … Well, you see, I do not have an exact equivalent term with which to refer to the sensible phenomenon that *appears* when I talk about mathematics as I have when I say that something appears when an orchestra plays a symphony. But it does not mean that we cannot think of mathematics as something that *appears* as students and teachers engage in a certain classroom activity. What appears in the mathematics classroom is not exactly an *aural* phenomenon or a *visual* or *tactile* or an *olfactory* one. Yet, *something* appears (and perhaps is something that is all of that: visual, tactile, olfactory, aural, material, artefactual, gestural, and kinesthetic) and that, being all of that, becomes the object of consciousness and thought. Mathematics, in this materialist and phenomenological line of thought, is what is made sensible through the teachers' and students' activity.

To continue with the Vermont metaphor, we need to make some distinctions. I am not saying that mathematics and the activity that produces it are the same. Yet, both are *deeply* intertwined. We cannot extract one from the other, as we cannot extract the orchestra's activity from what we hear. Mathematics has a deep influence on the kind of activity that will bring it into sensible existence, and vice versa. This is why we can say that there are good mathematical activities and that there are bad ones.

Now, activity is not a static thing that happens all of a sudden, nor is mathematics. As the activity unfolds, mathematics appears – much as, for example, Beethoven's 7th symphony appears as the orchestra activity unfolds. Unfolding and appearing have to be understood here in a dialectical relationship. The unfolding affects, moves, and transforms the appearing, and the appearing affects, moves, and transforms the unfolding.

But things do not merely happen or appear out of the blue. The sound that is produced by a violin, for example, has its source in the instrument. The instrument is bearer of a what Aristotle called *potentiality.* The sound may or may not be produced. And if it is produced, it can be produced in countless many ways. It is both: contingent and historically bounded. In being produced, the sound materializes or actualizes that which was potentiality or pure possibility. Hegel talks about the *general*. In his terminology, mathematics or music are sensuous evolved forms of something that before being materialized and coming into sensible existence was general.

The general is *formless*. It belongs to the realm of the potential or the virtual. Yet, it is not a Platonic Form. The realm of the potential or the virtual belongs to an always changing immaterial sphere of culture that is intertwined with the material world of objects and human actions. This immaterial sphere of culture is part of what Marx (1998) called the "non-organic" realm of nature and it is also part of the conditions out of which human existence is crafted. This sphere cannot be sensed by us humans through our culturally and historically evolved senses and sensations. Can we sense or perceive or touch the Pythagorean theorem *as such*? We cannot. Can we hear Beethoven's 7th symphony *as such*? We cannot. To become the object of consciousness, feeling, and thought, the general has to be set into motion to transform it into something sensible, and *appear*. Its appearance is the *singular*. The singular is the appearance of the general through the mediation of human activity.

To make the previous ideas clearer, let me turn to Beethoven's 7th symphony. As we know, Beethoven's 7th symphony has four movements: Poco sostenuto – Vivace, Allegretto, Scherzo, and Allegro. Table 1 presents the duration of the symphony as conducted by two orchestra directors who are considered to be among the best 20th century Beethoven specialists: Herbert von Karajan and Leonard Bernstein.

Table 1
Total time of two famous recordings of Beethoven's 7th symphony

	Herbert von Karajan (Berlin Philharmonic Orchestra, 1963 recording)	Leonard Bernstein (New York Philharmonic Orchestra, 1958 recording)
Poco sostenuto – Vivace	11:25	12:27
Allegretto	8:02	9:44
Scherzo	7:50	8:23
Allegro	6:37	7:27
Total time	33 min 54 s	38 min 01 s

Bernstein's recording is 12% longer than Karajan's. And I think that the reader would agree with me that 12% is a lot. It is not an insignificant difference. Which one is the true 7th symphony? Neither of them. The 7th symphony as such is a *general*. Bernstein's and Karajan's recordings are materializations of this general; that is, they are singulars, or, in other words, they are appearances of the general. I would like to insist that this general has nothing to do with a metaphysical or Platonic concept. The 7th symphony as a general belongs to a musical tradition of leisurely symphony prologues, a romantic paradigm, an increasing focus on rhythm and the smart use of available musical artifacts (e.g., metronomes for measuring tempo), among others. In other words, rather than existing in itself and by itself, the general is to be found in culture and history.

We can summarize these ideas by saying that the singular is the unending appearing of the general. In other words, the singular is the coming into existence of the general as an evolved ontological form transformed under the force of an activity (deyatel'nost'). That this activity is not merely an Aktivität or aktivnost' is shown by the fact that the Aktivität or aktivnost' is what would appear if the 7th symphony were to be interpreted by programmed artifacts and mechanical devices only. Such appearing would in fact lack exactly that which makes deyatel'nost' what it is, namely human, natural life.

Let us come back now to mathematics and mathematics classroom activity. What produces the activity is mathematics as a *sensible phenomenon* – a *singular evolved form* of something *general* that before being set into motion by the classroom activity was pure potentiality. The activity that happens in the classroom, as I mentioned previously, can be good or bad. The bad activity is precisely that which looks pretty much like the mechanical one of my example, where people do not really connect, where they do not work *together*. They simply do things, as in Aktivität or aktivnost'. It is *lifeless* activity, like in traditional teaching and learning. It is something like knowing without being. Yet, as D'Amore asks: ¿Será posible saber sin ser? [Would it be possible to know without being?]. Certainly not. The good activities would be, by contrast, those where students and teachers engage, debate, agree and disagree, where they object and find a place for subversion, and where students could show respect, responsibility, and care for each other. In short, the good activities would be those in which knowing and being (or becoming) are there, simultaneously. How to get there? To answer this question I might need to have a few more dinners with Giorgio Santi, to digest the ensuing ideas, and to wait until Bruno D'Amore's 80th birthday celebration for the ideas to be ripen.

References

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics. Some past and current approaches to mathematics education* (pp. 151–171). University of Urbino Carlo Bo: Isonomia. http://isonomia.uniurb.it/epistemologica.

D'Amore, B., & Radford, L. (in press). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Duval, R. (1995). *Sémoisis et pensée humaine [Semiosis and human thinking]*. Bern: Lang.

Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II [Sign and object, I and II]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg*, *6*, 139–196.

Fischbach, F. (2014). *La production des hommes [The production of men]*. Paris: Vrin.

Font, V., Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of mathematical objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Marx, K. (1998). *The German ideology, including theses on Feuerbach and introduction to the critique of political economy.* New York: Prometheus Books.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación [Elements of a cultural theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103–129 (available at: http://www.laurentian.ca/educ/lradford/).

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación [On the theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132–150.

Radford, L. (in press). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. *International Journal for Research in Mathematics Education.*

Roth, W. –M, & Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning.* Rotterdam: Sense Publishers.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *77*, 285–311.

Elementi di calcolo trascendentale
(Ventidue lettere d'Amore all'inverso dell'angolo B)

Tobia Ravà
PaRDeS, Laboratorio di Ricerca d'Arte Contemporanea

Sunto. *È incredibile ma è tangibile come la ghematrià faccia parte di un percorso sia esoterico che essoterico e, pur facendo anche parte della Kabbalah, quindi dell'ermeneutica mistica, ha determinato nei secoli un percorso estremamente razionale, la conoscenza del quale ha portato fisici, matematici e scienziati di ogni specie ad avere una marcia in più nelle loro ricerche. Ben distante dalla numerologia occidentale che si ferma a valori bassi e che non ha un percorso razionale logico e linguistico.*

Abstract. *It's amazing but tangible how the gematria is part of a process both an esoteric and exoteric one and while being also part of the Kabbalah, that means of mystical hermeneutics, it shaped in centuries an extremely rational path, which knowledge has led physicists, mathematicians and scientists of all kinds to have something extra in their research. Far from Western numerology that stops at low values and does not have a rational logical and linguistic path.*

Già da metà degli anni novanta ripresi in mano, anche nella mia ricerca artistica, quel percorso della lingua ebraica che viene chiamato ghematrià ovvero la corrispondenza tra lettera e numero delle parole ebraiche che fanno del testo biblico anche un testo matematico; ciò avvenne in maniera consequenziale al fatto di essermi accostato alla Kabbalah Luriana, caldamente consigliata per la mia ricerca dallo stesso Umberto Eco, con il quale avevo svolto parte della mia tesi di laurea sull'interdizione visiva.
Le ventidue lettere dell'alfabeto ebraico corrispondono ad altrettanti numeri, le prime nove alle unità poi le decine e le ultime 4 alle prime centinaia, spesso vengono accostate anche le lettere finali che in quattro casi si scrivono in modo diverso e si possono calcolare come diversi valori.
È incredibile ma è tangibile come la ghematrià faccia parte di un percorso sia esoterico che essoterico e pur facendo anche parte della Kabbalah quindi dell'ermeneutica mistica ha determinato nei secoli un percorso estremamente razionale, la conoscenza del quale ha portato fisici, matematici e scienziati di ogni specie ad avere una marcia in più nelle loro ricerche. Ben distante dalla numerologia occidentale che si ferma a valori bassi e che non ha un percorso razionale logico e linguistico.
Come la Kabbalah Luriana ci ha portato dalla teoria del Zim Tzum alla teoria del Big Bang, come le ricerche di Newton si sono sviluppate per anni a cavallo

tra fisica ed ermeneutica mistica attraverso la ricerca dei modelli matematici che regolano la natura. Così Alan Turing scopre il codice segreto tedesco (Ultra) attraverso un procedimento cabalistico di permutazione: TZERUF, che viene applicato sul primo rudimentale computer (Enigma).
La ghematrià è un potente sistema di interpretazione del testo biblico attraverso un percorso di equazioni ovvero ogni parola può essere scoperta ed interpretata attraverso altre parole che hanno lo stesso valore numerico. Le parole hanno un loro valore oggettivo ed eterno ed è per questo che sostanzialmente l'ebraico è immutato nei secoli e nei diversi contesti geografici.
Secondo la tradizione mistica Dio creò il mondo attraverso la parola ed essa stessa diventa il soggetto creato con un valore matematico che la determina empiricamente. Nel "Sefer Yetzirà" le lettere sono pietre e le parole sono appunto gli elementi strutturali di edificazione dell'universo. Ogni parola è composta da lettere che rappresentano delle forze vettoriali quindi ogni parola ha un impatto specifico a seconda del valore diversificato.
Questo spiega come nel medioevo in ambito Askenazita si discutesse a proposito del fatto che una preghiera non potesse mai essere cambiata in quanto al variare delle parole e della relativa somma numerica, non avrebbe più potuto avere un funzionale valore teurgico.
È indubbio che alcuni elementi fondanti siano evidenti come per esempio la parola AV padre, da cui deriva la parola italiana avo, composta da ALEF 1+ BET 2 mi dia 3 che sommato ad EM madre ALEF 1 + MEM 40 mi dia 44 valore di YELED bambino IOD 10 LAMED 30 DALET 4, ma anche YALAD nascere, valore anche della linfa, del sangue DAM, DALET 4 ALEF 1 MEM 40, ma anche della sabbia del mare CHOL e di diverse altre parole a queste correlate; la presenza divina determinata dalla lettera ALEF sommata a DAM sangue mi da ADAM 45 uomo, che tuttavia viene plasmato dalla terra ADAMAH: 50 come la ghematrià di YAM mare e la loro somma mi da YOFI 100, la bellezza.
Fondamentale equazione per esempio è quella di AIN SOF = infinito 207 che ha lo stesso valore di OR 207 luce, di RAZ segreto, ZER corona, ma anche ADON OLAM "Il Signore del mondo" e di altre parole che ci portano direttamente ad un percorso legato all'albero della vita inteso come albero sefirotico, ma contemporaneamente apre anche una porta verso la fisica quantistica.
Così il valore di SHADAI onnipotente: 314 ci porta al PI GRECO, questa parola (SHADAI) fin dall'antichità viene messa all'apice delle culle dei bambini, allora gerle rotonde, come formula apotropaica recante positività ad una zona circolare sottostante. Ma 314 è anche il valore di METATRON il più alto negli empirei angelici, ed è il valore di SUACH meditare e di CHUSH senso. Le ventidue lettere dell'alfabeto ebraico, forze vettoriali, diviso 7 numero base del processo creativo mi da appunto 3,14 valore di Pi Greco.

La costante di introdotta da Arnold Sommerfeld nel 1916 come misura della deviazione relativistica nelle linee spettrali rispetto al modello di Bohr, poi perfezionata da Freyman chiamata “Costante di struttura fine” della fisica subatomica: 137 rappresenta, in un atomo di idrogeno, il rapporto tra la velocità della luce e quella dell’elettrone, energia disposta in orbite parallele degli elettroni attorno all’atomo; QABALAH = 137, dalla radice ebraica QBL = parallelamente, viene tradotta normalmente con “ricezione”, ciò che abbiamo ricevuto in senso energetico, ha lo stesso valore di MATZEVA pilastro, OFAN ruota angelica, IOM VE LAILA giorno e notte. 137 è la somma di CHOKHMAH e NEVUAH sapienza e profezia ma anche di OMETZ coraggio.
86 è il valore ghematrico di COS calice ma è più noto come la ghematrià di HATEVA la natura e di ELOIM altro nome divino, da questa equazione è nato il panteismo di Baruch Spinoza in quanto alcuni anni prima di dare alle stampe l’“Etica” venne ristampato uno scritto medievale di Gikatila, allievo di Abulafia che prendeva in considerazione proprio questa ghematrià.
La sequenza di Fibonacci che forse è la principale legge di riproduzione naturale, è anche una sequenza ghematrica come ci dice anche Ahronoski nel film “Pi greco …”. Non solo ma la sua sequenza in “Mispar qatan” numero piccolo o riduzione teosofica (base dieci) mi ha portato alcuni anni fa a scoprire una sua particolarità: la riduzione teosofica della sequenza di Fibonacci ha valenza 24 ovvero ogni ventiquattro numeri della sequenza si ripetono le medesime cifre.
Se questa mia piccola scoperta, che non è più una congettura in quanto provata già alcuni anni fa da Federico Giudice Andrea, per ora non ha una applicazione, tuttavia acquista un senso dal momento che in ebraico il KAD vaso o giara è di valore 24, KHAF 20 + DALET 4, quindi è il valore di un vaso, che è una unità di misura nell’antichità e che rappresenta la sua ricostruzione secondo la Qabbalah Luriana. Il canone, la somma dei libri della Bibbia ebraica: TANACH è di 24 volumi. Inoltre abbiamo deciso di dividere il giorno in 24 ore, GHEVIA il torace è di valore 24 e rappresenta il centro del corpo nell’uomo vitruviano e nella scomposizione leonardesca. Davide nel testo biblico si scrive DVD DALET 4 + VAV 6 + DALET 4 = 14 quando è un giovane pastore e lavora con le mani, e la mano è YAD 14, YOD 10 + DALET 4, appunto 14 come la somma delle falangi di una mano (Koach, la forza è 28 e due mani come YUCHUD = unificazione 28 attraverso una stretta di mano). DAVID diventa re e acquista la YOD = 10, DVD diventa DAVID nel testo biblico in quanto ha compiuto il suo percorso di riqualificazione terrena.
Da qualche anno alcuni dei miei lavori sono costruiti con un procedimento linguistico-matematico definito da una scala crescente o decrescente di concetti risultanti dalle radici quadrate di parole o all’elevazione a potenza di valori relativi a concetti determinati. Per esempio: EHEYEI = sarò, nome

divino: “Sarò colui che sarà” di ghematria 21, ottavo numero della sequenza di Fibonacci, e numero triangolo di 6, ha per quadrato EMET = verità: 441 Alef 1 + MEM 40 + TAV 400 (senza la ALEF: MET morte) di il valore 441 è anche la ghematria di TEVA SHENI = seconda natura, questo rappresenta anche un antico percorso Chassidico secondo il quale la verità non è mai apparente ma è la seconda natura delle cose e quindi va scavata e approfondita. Il “futuro” = ATID, ha valore 484 come anche CHALOMOT = i sogni; ed i sogni sono la proiezione del futuro, la radice quadrata di 484 è il numero seguente al precedente: 22, numero totale delle lettere ebraiche e ghematrià di YACHAD = insieme e di ZIVUG, (ZAIN 7 + VAV 6 + VAV 6 + GHIMEL 3) = 22, accoppiamento, unione sessuale. Se ne deduce che il rapporto sessuale è la radice quadrata del futuro, è evidente che si parli di procreazione.
Anche il percorso alchemico è reso palese, dal momento che: MAIM 90 acqua + ADAMA’ 50 terra + AVIR 217 aria + ESCH 301 fuoco = 658 valore della somma dei 4 elementi ma anche ghematrià di BATANUR forno, crogiolo di fusione dell’alchimista e valore di THEOM RABBA’ = il grande abisso, momento di caduta profonda dell’uomo solo attraverso la quale può trovare la forza del recupero e della risalita.
Infine vorrei citare “HAYAH-HOVEH-YIHEH” “Era, è e sarà”, di valore ghematrico 66 come il numero triangolo di 11. LULA’AH è l’occhiello o asola di valore 66 come la ghematrià di GALGAL = ruota, ma anche orbita, e GALGAL è la somma di due onde GAL 33 come avviene (sincretismo) nell’induismo e nel buddismo tibetano dove YIN e YANG, due onde formano una ruota o sfera …
Non voglio affermare che tutto questo avviene perché l’ebraico sia la lingua sacra che si parlava prima della costruzione della Torre di Babele ma che il percorso matematico che sottende la lingua, ogni volta che si scava nel testo, lascia intravedere una logica di fondo che non può essere casuale, in quanto verificabile sempre di più anche con il progredire dell’umanità attraverso le nuove scoperte scientifiche.

Una riflessione sulla trasposizione didattica

Pier Giuseppe Rossi
Università degli studi di Macerata

Sunto. *Un messaggio in occasione della festa di compleanno di Bruno D'Amore.*

I disciplinaristi francesi di area matematica degli anni '80 del secolo scorso con il modello della trasposizione hanno dato un contributo fondamentale per lo sviluppo della didattica, sottolineando la differenza tra sapere sapiente e sapere insegnato.
Ma come possono contribuire i docenti delle scuole alla trasposizione didattica? Non sempre hanno una formazione disciplinare tale da poter costruire il percorso dal sapere sapiente al sapere insegnato, né è pensabile che siano dei semplici esecutori di percorsi realizzati da esperti.
Il lavoro di Bruno D'Amore ha risposto su tre piani al quesito precedente: sul piano teorico superando l'approccio francese e guardando con interesse al pensiero degli insegnanti (Shulman) e al costruttivismo, sul piano divulgativo costruendo materiali per la didattica, sul piano del lavoro con gli insegnanti sia costruendo spazi congressuali sempre molto partecipati, sia operando nelle scuole. Partendo da tali percorsi quali strade potrebbero essere percorse oggi tenendo conto anche delle nuove sfide che il contesto attuale impone? Come riprendere le riflessioni di D'Amore relative alla trasposizione, in una realtà come l'attuale in cui i docenti debbono progettare in contesto percorsi personalizzati per far fronte alla complessità della classe? Le ricerche attuali in ambito di didattiche disciplinari sembrano fornire vari spunti. Essi provengono sia dalla ricerca in didattica della matematica, sia dalle ricerche in didattica delle scienze dove "The Model of Educational Reconstruction", formalizzato da Duit, potrebbe fornire interessanti stimoli. Contemporaneamente una maggiore interazione tra didattiche disciplinari e didattica generale potrebbe contribuire alla costruzione di processi attenti alla coerenza epistemologica, ad un ruolo progettuale dei docenti e a un maggiore collegamento con le problematiche sociali e culturali attuali.

Reflections on didactical transposition

Pier Giuseppe Rossi
Università degli studi di Macerata

Abstract. *A message on the occasion of the birthday of Bruno D'Amore.*

In the Eighties, Francophone disciplinary researchers in the field of Mathematics gave a fundamental contribution to the development of didactics with the model of transposition underlining the difference between the academic knowledge and knowledge taught.
But how can the school 'teachers contribute to the didactical transposition? Teachers do not always have a disciplinary competence able to build a path from the academic knowledge to the taught knowledge. And we cannot think that they become mere executors of learning paths designed by others.
The work by Bruno D'Amore has given a three level answer to the above mentioned question: on the theoretical level overcoming the French approach and looking with a major interest at the teacher thinking (Shulman) and at the Constructivism, on the educational 'level building materials for didactics, on the level of work with teachers by building seminar spaces always fully participated, and by working directly at school.
The research line is the one that was more productive in terms of interest. Starting from this work, what directions should be taken today taking into consideration also the new challenges that are connected with the current context? How to revisit the reflection by D'Amore related to transposition in a reality in which teachers need to design personalized paths in the context to meet the needs of the complexity of the class?
The current researches in the field of disciplinary didactics seem to provide various thoughts. They come from both the research in didactics of Math, and from the researches in science education where "The Model of Educational Reconstruction", formalized by Duit, could offer interesting stimuli. At the same time a bigger interaction between disciplinary didactics and general didactics could contribute to the construction of processes that put the attention on the epistemological consistence, and on a teacher's design role.

Quelques paradoxes dans les phénomènes de diffusion des savoirs mathématiques : une création normative ?

Un hommage à l'œuvre du Professeur Bruno D'Amore

Bernard Sarrazy
Laboratoire Cultures et Diffusion des Savoirs (EA 7440)
Université de Bordeaux, France

Résumé. *Ce texte propose quelques réflexions sur les paradoxes (du contrat) et de la création comme condition de la dévolution d'un apprentissage des manières de faire des mathématiques. Il montrera aussi son caractère fondamentalement social a contrario des approches néo-individualistes et contribuera ainsi à une déconstruction de la création dans sa dimension mystique et néo-libérale pour la resituer dans sa pleine dimension didactique et pédagogique.*

Abstract. *This text offers some thoughts on the paradoxes of the didactic contract and on creation like a condition for the devolution of learning ways to do maths. The fundamentally social nature of creation, in contrast with neo individualistic approaches, is shown and a contribution to the deconstruction of creation from its mystical and neoliberal dimension, with the aim to return it to its full didactical and pedagogical dimension, is given.*

Il serait réducteur et certainement ambitieux de prétendre résumer les engagements scientifiques, praxéologiques, et politiques de l'œuvre de Bruno D'Amore tant elle est dense, complexe et riche. Si je devais en dégager une ligne force ce serait probablement une extrême ouverture à tous les champs connexes de l a diffusion des mathématiques et toujours orientée par un souci d'amélioration des affaires des hommes ! Sens, vérité et valeur ! C'est la raison pour laquelle je livrerai dans ce texte quelques idées qui nous ont souvent réunis autour des paradoxes (du contrat) et de la création comme condition de la dévolution d'un apprentissage des manières de faire des mathématiques et non des mathématiques elles-mêmes. En effet, les mathématiques toutes faites sont des mathématiques mortes et une grande partie du travail des professeurs consiste à créer les conditions de leur résurrection pour les élèves. Pour ce faire, ils créent des situations susceptibles de montrer aux l'élèves l'usage, l'intérêt … des mathématiques qu'ils doivent leur enseigner. Mais les professeurs ne peuvent se substituer à leurs élèves pour les leur apprendre : tel est ce qu'on appelle : le contrat didactique (Brousseau, 1998 ; D'Amore et al. 2010). Ce contrat est paradoxal car l'élève ne peut apprendre que s'il accepte de ne plus être enseigné. Enseigner, c'est donc créer les conditions pour faire surgir du nouveau ; la création est donc centrale dans le travail du professeur : créer des problèmes et des situations pour permettre à l'élève de découvrir des manières nouvelles de les traiter. Ainsi, c'est moins la création en soi qui doit être examinée que les conditions pédagogiques et didactiques (propres aux mathématiques elles-mêmes) de cette création. Il s'agit de désenchanter la création dans sa dimension mystique pour la resituer dans sa dimension didactique et pédagogique.

1. Création et éducation

La création comme surgissement d'une nouveauté dotée d'une valeur (intellectuelle ou esthétique) est fascinante : elle nous saisit par la rupture qu'elle révèle et nous ravit par son esthétisme – y compris dans le domaine scientifique. La création a une dimension divine ; elle semble se poser comme le témoin vivant et concret d'une réalité supra-sensible qu'elle révèle et qui nous échappe. Mais expliquer la création par le talent est une tautologie car le talent est un don de Dieu et chacun, nous dit la parabole biblique, doit le faire fructifier selon ses capacités. La création n'ayant pas d'origine, car elle-même originelle, semblerait donc s'opposer à l'éducation et *a fortiori* à l'enseignement. Cette conception de la création est un déni de l'éducation. Mais ce n'est pas le cas car il n'existe pas de création sans éducation.

2. La création à la croisée de paradoxes

La création est un processus consistant à « tirer une chose du néant », à faire naître un être ou une chose *ex nihilo*. Le terme a longtemps été réservé au domaine religieux. Ce n'est qu'à la fin du 18e siècle, que le mot désignera ce qui est aussi produit par l'activité humaine. Mais une idée restera associée : l'unicité. Unicité de ce qui est produit (la création elle-même en tant qu'objet) mais aussi unicité du créateur ; l'histoire désigne assez souvent les créations par le nom de leur auteur : le théorème de Pythagore, la conjecture de Fermat ou celle de Poincaré … Mais immédiatement un problème apparait : comment sait-on que ce qui est produit est originel, premier … unique ? On ne peut le savoir qu'en référence aux productions collectives déjà existantes ; il n'y a donc pas de création sans une communauté qui reconnaîtra une création dans une production et méritant être retenue car elle présente une valeur pour la vie des hommes (utilité pratique, esthétique, scientifique, technique …). Tel est un des premiers paradoxes de la création : l'unicité ne peut exister qu'au sein d'un collectif qui les reconnaît comme tels ; la création apparemment individuelle est constitutivement un phénomène collectif.
Ce premier paradoxe en appelle aussitôt un 2e : comment reconnaître ce qui est nouveau ? Si je reconnais une production comme une nouveauté, c'est que je la connaissais déjà puisque je suis capable de la reconnaître, et si je ne la connais pas alors je ne peux pas la reconnaître comme telle. L'histoire des sciences, de la peinture, de la littérature … peuvent témoigner de ces œuvres qui n'ont été reconnues comme telles que des années voire même des siècles

après leur production : Kepler par exemple, ou encore Bolzano (1781–1848) dont de nombreux travaux ne furent reconnus et appréciés qu'à partir des années 1920. Il n'y a donc pas de création sans mémoire, sans une mémoire collective des œuvres. Or, l'éducation n'est rien d'autre que la transmission des œuvres : il n'y a donc pas de création sans éducation. Tel est le 2ème paradoxe : il ne peut y avoir de création sans transmission de ce qui a déjà été produit et en même temps, la création ne peut pas être le produit d'une transmission puisqu'on ne peut transmettre que l'existant.
Le troisième paradoxe est une conséquence de ce deuxième paradoxe. Si une société ne peut transmettre que l'existant, alors toute création exige une transgression puisqu'il s'agit de faire exister l'inexistant, de rendre visible le caché. Or, la psychanalyse montre bien que le caché a toujours entretenu un commerce subtil avec le savoir et le désir : le sujet ne peut désirer que ce qu'il n'a pas, ce qui se dérobe à lui, ce qui lui est caché. Tel est là un des moteurs puissant de la création en quête de savoir : un savoir pour voir ! Le caché a conséquemment toujours été frappé d'interdit : souvenons-nous de la Genèse de la Bible, l'arbre de la connaissance, ou encore de ce beau roman de Umberto Eco, *Le nom de la rose* ; songeons aussi aux enfants, à leur attirance particulière pour l'interdit ou le caché … c'est dans cet espace que naît ce « désir de voir » que Freud appelait « *pulsion scopique* » (1987, 123). Ainsi la création est toujours transgression : transgression des normes pour voir autrement, transgression des interdits en s'autorisant soi-même à voir ce qui est masqué. Or, la transgression – et donc la création – ne peut être le produit d'une injonction, l'exécution docile d'un ordre : Désobéissez ! Tel est le troisième paradoxe : créer, c'est s'autoriser, c'est décider de devenir auteur, c'est-à-dire adopter la posture de « celui qui fonde et établit ». C'est dans cet entre-deux, entre la liberté individuelle et les contraintes collectives propres au jeu, entre la dimension structurelle du jeu et la manière de jouer que se situe l'espace de la création. Mais répétons-le, la création est loin de se réduire à la nouveauté, elle doit aussi présenter un intérêt, une valeur pour l'institution ou la communauté dans laquelle elle apparaît : en cela, elle est toujours une rencontre entre une culture à un moment donné et le désir singulier d'un sujet nourri par le terreau de cette culture ; le phénomène est classique dans l'enseignement : les professeurs font le tri entre ce qui doit être retenu et oublié (c'est d'ailleurs ainsi que se crée la mémoire didactique de la classe – Brousseau, 1998). La création mathématique exige donc du jeu c'est-à-dire un espace de liberté limité à la manière du jeu des gonds : sans jeu la porte ne peut s'ouvrir, trop de jeu la porte ne ferme plus. Ces trois paradoxes de la création sont aussi au fondement de toute action d'éducative et sont particulièrement plus marqués en ce qui concerne l'éducation mathématique. Pourquoi ?

3. L'éducation mathématique : une création normative

Eduquer c'est transmettre aux jeunes générations ce que les générations précédentes ont produit en vue de leur insertion dans une communauté dans laquelle ils devront nécessairement vivre. C'est parce que l'enfant est inachevé, parce qu'il est dépendant, parce qu'il est ignorant … qu'il doit être éduqué. L'éducateur qu'il soit parent, enseignant … montre des exemples, explique, donne des raisons, pose des interdictions, dit ce qu'il convient de faire ou ne pas faire … mais il ne peut rien sans l'adhésion de l'enfant à son projet éducatif. En effet, ce que l'enseignant attend ce n'est pas seulement l'obéissance, le respect de ce qu'il a dit, ce n'est pas non plus l'imitation de ce qu'il lui a montré ou dit, ce n'est pas seulement la mémorisation des règles qu'il lui a enseignées … non, c'est un usage particulier de ce qui lui aura été enseigné, dit, montré … dans des situations qu'il n'aura pas proposées. C'est bien en cela qu'apprendre peut être considéré une sorte de *création normative* : *création* puisque le sujet explore des espaces nouveaux, résout des problèmes nouveaux mais *normative* aussi car la manière dont il le fait *doit* être conforme aux règles qui définissent l'espace de son jeu – tout comme le joueur de football peut créer une manière de jouer mais dans le cadre des contraintes qui lui sont imposées par les règles et qui en retour définissent sa liberté de joueur. La différence entre un bon élève et un mauvais élève ne se situe pas dans leur connaissance des algorithmes mais bien dans la manière de les utiliser. D'ailleurs, les professeurs ne s'y trompent pas lorsqu'ils disent à l'élève : « Tu connais ta leçon mais tu ne l'as pas comprise ! » : apprendre c'est mémoriser bien sûr, mais se manifeste surtout par cette production propre à l'élève dans l'usage qu'ils font des règles enseignées. La création de l'élève est donc bien au centre des préoccupations du travail des éducateurs et des professeurs car elle est tout à la fois *l'instrument* et le *critère* de son apprentissage. En effet, c'est bien en explorant et en résolvant des problèmes nouveaux qu'il apprendra mais c'est aussi lorsqu'il les résoudra que le professeur saura que l'élève a appris et compris la règle, le théorème ou l'algorithme.

4. Conclusion

Quelle devrait être la visée de l'enseignement : doit-il viser une 'tête bien pleine' ou une 'tête bien faite' ? Doit-on rechercher une bonne maîtrise des algorithmes ou bien permettre aux élèves d'être créatifs et de les utiliser dans des situations nouvelles ? Cette question n'est pas seulement scientifique, elle est aussi noblement politique car elle pose inévitablement celle de savoir quel type d'hommes et de femmes l'Ecole doit former. Or manifestement, si les deux visées précédemment énoncées paraissent nécessaires ensemble, elles apparaissent dans un rapport paradoxal.
La théorie des situations didactiques est née de la théorisation et de l'étude scientifique des conditions permettant le dépassement de ce paradoxe ; Bruno

D'Amore et ses collaborateurs ont largement œuvré à sa diffusion et à son usage dans la formation des professeurs et dans les recherches. Que ce texte puisse témoigner de ma reconnaissance à cette noble mission d'acculturation des professeurs afin de permettre un jour aux élèves de pouvoir réinventer le monde à leur tour, en poursuivre sa conquête. Comment pourrait-on d'ailleurs imaginer qu'ils puissent continuer de produire du nouveau, s'ils n'ont jamais eu l'occasion d'en vivre l'expérience ? Telle est notre noble mission : organiser les conditions de possibilité de cette créativité mathématique.

Références bibliographiques

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica alcuni effetti del "contratto"*. Bologna : Archetipolibri.

Eco, U. (1980). *Il nome della rosa.* Milano : Bompiani.

Freud, S. (1987). *Trois essais sur la théorie sexuelle.* Paris : Gallimard.

L’importanza della metafora in matematica e nella sua didattica

Silvia Sbaragli
Dipartimento Formazione e Apprendimento/SUPSI, Locarno, Svizzera
NRD, Università di Bologna

Abstract. *In this article we show some characteristics of metaphor, its role in mathematics and in the processes of teaching/learning of this discipline.*

1. La regina delle figure

Le riflessioni legate alla metafora hanno accompagnato il pensiero occidentale fin dalle sue origini. Tali riflessioni si sono sviluppate in filosofia, letteratura, retorica, psicologia ecc. partendo da Aristotele fino ai giorni nostri, concependo il fenomeno metaforico come una deviazione dalla norma.

> Aristotele è stato il primo a cercare di definire tecnicamente la metafora, sia nella *Poetica* sia nella *Retorica*, ma quelle sue definizioni inaugurali fanno qualche cosa di più: mostrano come essa non sia puro ornato bensì una forma di conoscenza. (Eco, 2004)

Rispetto a un linguaggio legato alla realtà, la metafora ha assunto il ruolo di strumento ricco, eversivo e incisivo.
Come sostiene Mortara Garavelli (2010): «Di tutte le figure retoriche la *metafora* è la più facile da riconoscere e la più difficile da definire. È un “meccanismo” presente in ogni lingua, a disposizione di ognuno».
Non è facile fornire una definizione sintetica e esaustiva di questa efficace figura retorica,[1] per questo per poterla comprendere in profondità occorre analizzarne le diverse caratteristiche.
La metafora, detta “la regina delle figure”, può essere concepita come una “similitudine abbreviata”, in quanto il procedimento che la genera corrisponde con la contrazione di un paragone: un’entità viene a identificarsi con quella con cui è confrontata. Se prendiamo la frase: “Francesco è un pesce” si intende che quel tal bambino è disinvolto in acqua come un pesce. La differenza tra metafora e paragone è che nella prima le due entità vengono fuse in una, mentre nella seconda vengono mostrate separatamente le affinità e le differenze delle due entità.

[1] Il *Webster’s Third New International Dictionary* fornisce la seguente definizione di metafora: «una figura retorica in cui una parola o frase che denota letteralmente un tipo di oggetto o idea è utilizzata al posto di un’altra per suggerire una somiglianza o analogia tra loro» (http://www.merriam-webster.com/dictionary).

La metafora può essere considerata come analogia implicita che si differenzia solo per la forma con la quale è espressa (Presmeg, 1997).
Spesso il meccanismo metaforico è azionato dalla somiglianza, dall'analogia di due entità, dall'intersezione di caratteri che le due entità hanno o si suppone che abbiano in comune; tali metafore vengono dette "metafora-similitudine". Secondo Sfard (1997) vi è però una differenza fra analogia e metafora: la metafora è associata a un atto creativo che non è riconducibile all'analogia che ne può derivare. Dell'aspetto creativo della metafora parla anche Eco (2004) quando afferma: «il talento della metafora non lo si prende a prestito da altri, e pertanto essa è materia non di mera imitazione ma di invenzione».
Va sottolineato come la forza di alcune metafore sia proprio quella di fare vedere aspetti della realtà o di ciò che vogliamo concepire al di là della realtà ed è proprio quest'ultima caratteristica ad essere indispensabile in matematica e nella sua didattica.

> Trovare una metafora che renda più efficace il nostro modo di esprimerci vuol dire innanzi tutto avere idee migliori su quanto vogliamo dire, "vedere" con più chiarezza, profondità, originalità, come sono fatte le cose di cui parliamo. Una metafora riuscita può svelarci aspetti nascosti della realtà o aiutarci a inventarne di nuovi: è un altro modo di pensare, prima che di parlare o scrivere. (Mortara Garavelli, 2010)

2. L'uso della metafore in matematica e nella sua didattica

Anche se nel senso comune la metafora sembra riguardare solo l'ambito umanistico, la matematica è un linguaggio con propri contesti, metafore, sistemi di simboli e scopi.
In matematica è necessario e irrinunciabile fare uso di tali figure retoriche: "Le diagonali si tagliano a metà", "Prolungare un segmento", "Sovrapporre due figure", "Tracciare un'altezza" ecc. sono tutte metafore nelle quali si usano oggetti, verbi, relazioni legate al mondo reale per parlare di oggetti ideali, astratti, non presenti nel mondo reale. Su questo sarebbe importante riflettere con gli allievi nei diversi livelli scolastici, eppure come sostengono D'Amore e Fandiño Pinilla (2012):

> Nessuno pensa mai e nessuno avvisa mai gli studenti che in matematica è obbligatorio, necessario e irrinunciabile l'uso di metafore. Esse sono usate in tanti contesti, al di là di ogni attesa, a volte nascoste nel linguaggio comune come nell'espressione "il collo della bottiglia"; assolutamente consuete nella poesia "Anche un uomo tornava al suo nido" (G. Pascoli, *X agosto*, v. 13); o nella religione: "Voi siete il sale della terra" (Matteo 5:13); ma sono assolutamente necessarie nel linguaggio della matematica: "Due rette a e b si intersecano".

Senza l'uso di tale figura retorica sarebbe impensabile riuscire a concepire l'insegnamento-apprendimento matematico o addirittura la matematica stessa: «la metafora è centrale all'espressione del significato matematico, come all'espressione del significato nel linguaggio naturale» (Pimm, 1987).

All'interno della matematica risulta impossibile prolungare un segmento, disegnare un punto, intersecare due rette, sezionare una piramide, sovrapporre due figure ecc. non essendo oggetti concreti. Come affermano D'Amore e Fandiño Pinilla (2012): «Se uno ci pensa, questo vocabolario è, a dir poco, ridicolo; si usano parole concrete per parlare di oggetti astratti e, spesso, senza mai avvisare gli studenti di quel che si sta facendo».
Oltre all'indiscusso ruolo in ambito matematico, la metafora possiede anche una notevole ricaduta dal punto di vista didattico, anche grazie alla sua forte valenza sociale, culturale ed euristica. A tal proposito Gardner (1999) afferma: «È certo che educatori e ricercatori capaci sono costantemente impegnati nella ricerca di analogie e metafore adatte e feconde».
Sono diversi gli autori in didattica della matematica che hanno messo in evidenza una visione di tale figura come strumento cognitivo capace di creare significato piuttosto che semplicemente rappresentarlo (Lakoff, & Johnson, 1980; Sfard, 1997; Lakoff & Núñez, 2000).
Per Lakoff e Johnson (1980) la metafora rappresenta un'applicazione (in senso matematico) tra due domini concettuali, attraverso la quale uno dei due domini, il dominio obiettivo (*target domain*), è compreso in termini dell'altro, il dominio sorgente (*source domain*). La comprensione di una metafora si basa per i due autori sull'insieme delle corrispondenze tra gli elementi del dominio sorgente e gli elementi del dominio obiettivo.
Anna Sfard (1994, 2002) ha centrato la sua attenzione su quelle metafore che hanno origine nell'esperienza reale fisica, suggerendo che questa figura può giocare un ruolo centrale nel trasferire le esperienze del corpo nel mondo delle idee matematiche, consentono di trasformare determinati processi in un oggetto matematico. Le metafore possono quindi avere un ruolo centrale nel modo di agire, pensare e dunque anche di apprendere, essendo pervasive del nostro modo di ragionare.
Anche Lakoff e Núñez (2000) attribuiscono alle metafore un ruolo centrale, ritenendole uno dei meccanismi della mente umana che permette di formulare le idee matematiche e di ragionare matematicamente. La metafora concettuale è dagli autori intesa come una struttura che consente di comprendere concetti astratti in termini concreti, utilizzando idee e modelli di ragionamento fondati nel sistema senso-motorio. Il pensiero matematico fa costantemente uso di metafore concettuali, come per esempio quando concettualizziamo i numeri come punti su una retta:

> La metafora concettuale è un meccanismo cognitivo che permette di ragionare su un tipo di cose come se fosse un altro. Ciò significa che la metafora non è semplicemente un fenomeno linguistico, una mera figura retorica. Piuttosto, essa è un meccanismo cognitivo che appartiene al mondo del pensiero. (Lakoff, Núñez, 2000)

Va tenuto in considerazione che la metafora concettuale rende la matematica enormemente ricca, ma può anche essere la causa di confusione se non viene

chiarita e contestualizzata con consapevolezza.
Le riflessioni di Lakoff e Núñez non hanno trovato unanimità di consensi, c'è chi mette in discussione l'assunto che la matematica abbia radici linguistiche fondate sulle metafore, ma certamente la loro contestualizzazione in ambito didattico può portare utili ricadute nella riflessione sul processo di insegnamento-apprendimento della matematica.
L'inventare efficaci metafore didattiche rappresenta uno degli aspetti di creatività della professione del docente per riuscire a far comprendere e costruire cognitivamente gli oggetti matematici. Tipico è l'esempio della scuola primaria di introdurre la relazione binaria dell'uguaglianza tramite la metafora dell'equilibrio o della bilancia, mostrando anche concreti esempi. Un altro esempio sempre riferito alla scuola primaria è quello condotto da Saenz-Ludlow (2004) sull'uso della metafora basata sulla somiglianza percepita tra l'azione fisica di suddividere un oggetto in parti e l'azione mentale di dividere un numero in unità. Tale somiglianza, richiamata dal termine "dividere" utilizzato spontaneamente dagli studenti, è stata considerata in questa ricerca una metafora nella teoria peirceana dei segni che ha permesso di individuare diverse e flessibili strategie numeriche degli studenti, consentendo di spostare la loro comprensione da un ambito più strumentale a uno più relazionale. Un ulteriore interessante articolo è quello di Carreira (2001) che si concentra sui tipi di interpretazioni e di metafore che gli studenti sviluppano nell'affrontare situazioni realistiche legate al tema funzioni e su come la creazione di metafore permetta di far evolvere significati dei concetti matematici, offrendo al ragionamento degli studenti un doppio ancoraggio (o una duplicazione di riferimenti) per i concetti matematici.
Questo tipo di metafore usate in senso didattico possono avere il ruolo mostrato da Eco (2004) nel parlare di Aristotele:

> Nel fare questo, e siamo al punto veramente fondamentale, le metafore *mettono la cosa sotto gli occhi* (*tõ poieîn tò prãgma prò ommátõn*). Questo *mettere sotto gli occhi* torna varie altre volte nel testo e Aristotele sembra insistervi con convinzione: la metafora non è solo un trasferimento, ma è un trasferimento che è una evidenza immediata – ma evidentemente non consueta, inattesa – grazie alla quale si vedono le cose mentre agiscono (1410b 34), le cose in atto, *energoûnta*.

Come suggerisce l'etimologia del termine, la *metafora* indica in generale un "trasferimento di significati da un luogo ad un altro" [dal greco μεταφορά (*metaforà*), comp. di μετά (*meta*), "oltre", "dopo", "tra", e φέρω (*férō*), "portare" (Nöth, 1995)].
Tra gli esempi di metafore usate in modo che il trasferimento avvenga dal mondo degli oggetti concreti al mondo degli oggetti matematici, fin dal 1997 abbiamo proposto a numerosissimi insegnanti e allievi di diversi livelli scolastici la metafora degli "occhiali della matematica", pensata come un confine, un limite, una soglia (Sbaragli, 2014). Da una parte c'è un "mondo senza gli occhiali della matematica", che è il mondo reale, di tutti i giorni, con

la concretezza dei suoi oggetti, dall'altro c'è il mondo della matematica astratto e ideale, concepito tramite appositi occhiali.
Gli "occhiali della matematica" favoriscono il *necessario* "trasferimento" tra le proprietà degli oggetti concreti, le azioni e relazioni della vita reale (accessibili ai sensi) e le proprietà degli oggetti matematici (non accessibili ai sensi). Come afferma D'Amore (2000):

> ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti", dal punto di vista di un realismo ingenuo; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi; ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci: dunque, in matematica, non c'è accesso sensibile (vista, tatto, …) diretto agli "oggetti" ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici.

È quindi qui che gioca un ruolo importante l'uso di questa metafora.
Indossando "gli occhiali della matematica" possiamo andare alla ricerca, tramite l'esperienza sensibile, delle proprietà che interessano il mondo della matematica e che a prima vista non vengono "viste" e percepite. È proprio questa mancanza di ovvietà delle proprietà da osservare tramite la metafora che ne farà cogliere la ricchezza. Come afferma Eco (2004):

> Ed è ripudiata la metafora ovvia, che non colpisce affatto. Quando la metafora ci fa vedere le cose all'opposto di quanto si credeva, diventa evidente che si è imparato, e sembra che la nostra mente dica *Così era, e mi sbagliavo.*

Tramite gli "occhiali della matematica" gli oggetti astratti, non accessibili ai sensi, come gli oggetti della matematica, riescono così a "tagliarsi", "passare", "sovrapporsi", …,"esistere".
Come sostengono Font, Godino, Planas e Acevedo (2010):

> L'oggetto metafora è sempre presente nel discorso dell'insegnante perché qui le entità matematiche sono presentate come "oggetti con proprietà" che possono essere fisicamente rappresentate (sulla lavagna, con materiali didattici, con gesti ecc.). […] L'uso dell'oggetto metafora facilita il passaggio dalla rappresentazione ostensiva dell'oggetto a un oggetto ideale, non ostensivo. Quindi, l'uso di questo tipo di metafora porta a parlare di "esistenza" degli oggetti matematici. Questo uso può indurre gli studenti ad assumere che gli oggetti matematici esistano all'interno del discorso matematico (esistenza interna) e, a volte, gli studenti possono supporre che essi esistano come esistono le sedie e gli alberi (esistenza esterna, fisica o reale).

Ovviamente la riuscita del trasferimento dipende dalle esperienze e pratiche vissute, dal processo creativo innescato, dall'osservazione di somiglianze e differenze di significativi oggetti anche apparentemente diversi, la cui percezione dipende da codici culturali. Infatti, come sostiene Nöth (1995), non si può dimenticare che le metafore non sono naturali e universali, ma culturalmente determinate.

Bibliografia

Carreira, S. (2001). Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model, *Mathematical thinking and learning*, *3*(4), 261–287.

D'Amore, B. (2000). "Concetti" e "oggetti" in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*, *6*(3), 143–151.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola.

Eco, U. (2004). Aspetti conoscitivi della metafora in Aristotele. In Eco et al. (2004), *Doctor virtualis - quaderno n. 3: La metafora nel Medioevo* (pp. 5–7). CUEM: Milano.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30*(1), 15–19.

Gardner, H. (1999). *Sapere per comprendere*. Milano: Feltrinelli.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press. [Ed. Italiana: (2004). *Metafora e vita quotidiana*, Milano: Bompiani].

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Mortara Garavelli, B. (2010). *Il parlar figurato*. Bari: Editori Laterza.

Nöth, W. (1995). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classroom*. London: Routledge & Kegan Paul.

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 267–279). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Saienz-Ludlow, A. (2004). Metaphor and Numerical Diagrams in the Arithmetical Activity of a Fourth-Grade Class. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(1), 34–56.

Sbaragli, S. (2014). Una lettura didattica della metafora degli "occhiali della matematica". In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica* (pp. 49–56). Bologna: Pitagora.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics, 14*(1), 44–55.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 339–371). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2002). Thinking in metaphors and metaphors for thinking. In D. Tall & M. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics: A tribute to Richard Skemp* (pp. 79–96). Flaxton QLD: Post Pressed.

Una parabola per Eratostene

Aldo Spizzichino
ex INAF (Istituto Nazionale di Astrofisica), Bologna

Abstract. *A geometric interpretation of the Sieve of Eratosthenes by a property of the parabola.*

1. Premessa

Nel proprio percorso scolastico tutti hanno incontrato il Crivello di Eratostene, argomento praticamente inevitabile quando si parla di numeri primi. Poi magari ne resta solo una traccia nella memoria, per il nome un po' particolare di questo algoritmo che è tra i più antichi tra quelli ancora usati, se non altro in campo didattico. Spesso chi fa i primi passi in qualsiasi linguaggio di programmazione si cimenta con questo algoritmo ed è soddisfatto quando finalmente esce la nota sequenza 2,3,5,7,11,13,17,19, …
Crivello non è altro che un nome desueto per *setaccio*: si tratta infatti di setacciare un insieme di numeri naturali consecutivi, eliminando prima i multipli di 2, poi i multipli di 3 ancora presenti, e così via, fino alla radice quadrata dell'ultimo numero della sequenza considerata, ottenendo così un insieme di numeri primi consecutivi. Se l'insieme non è troppo grande, il metodo funziona benissimo, mentre, per la ricerca di numeri primi molto grandi occorre rivolgersi a tecniche specifiche estremamente raffinate, dato che la quantità di calcolo cresce esponenzialmente.
Questo, in sintesi, è il discorso che si fa di solito dentro e fuori dalle scuole, e, dato che il metodo così enunciato non è altro che una diretta applicazione della definizione stessa di numero primo, non colpisce più di tanto la fantasia dei ragazzi. Diverso è il caso se se ne dà un'interpretazione geometrica, come hanno brillantemente fatto i due matematici russi Y. Matiyasevich e B. Stechkin, sfruttando una proprietà della parabola. Esaminiamo l'idea in dettaglio.

2. Una proprietà della parabola

Data una parabola con vertice nell'origine e asse verticale, consideriamo una retta arbitraria passante per il punto $P_0(0,y_0)$ dell'asse. A meno che la retta non coincida con l'asse stesso, essa intercetterà i due rami della parabola in due punti $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ [Figura 1]. Definiti i punti $Q_0(0,y_2)$ e $Q_1(x_1,y_2)$, per la similitudine dei triangoli $P_1Q_1P_2$ e $P_0Q_0P_2$, si avrà:
$(y_0-y_2)/x_2=(y_1-y_2)/(x_2-x_1)$, da cui, essendo $y_1=x_1^2$ e $y_2=x_2^2$, con semplici passaggi si ricava $y_0=-x_1x_2$.

Si conclude che, intersecando la nostra parabola con una retta congiungente due punti appartenenti rispettivamente al ramo destro e al ramo sinistro, il prodotto delle loro ascisse dà l'ordinata del punto di intersezione con l'asse.

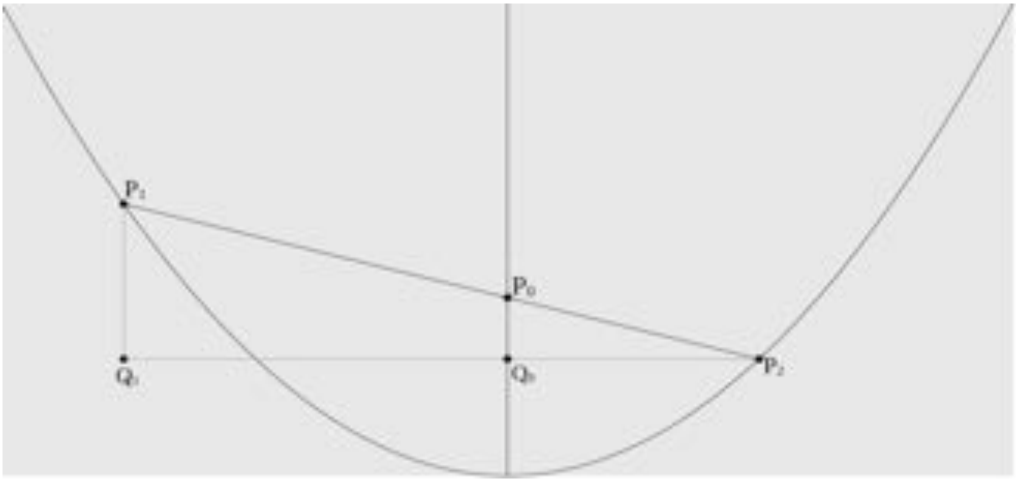


Figura 1.

Applicando questa proprietà nel campo dei numeri interi, consideriamo in un certo intervallo i punti della parabola ad ascissa intera (in valore assoluto > 1) e uniamo ciascun punto di un ramo con ciascuno dell'altro ramo.
Sull'asse riportiamo i punti corrispondenti ai numeri naturali, con un fattore di scala che consenta la leggibilità della figura (0.2 nel nostro caso). A questo punto, se eliminiamo tutti i punti intersezione dei raggi con l'asse della parabola (corrispondenti al prodotto di due interi), resteranno i *primi*.
In realtà non tutte le intersezioni corrispondenti ai numeri composti sono rappresentate in Figura 2, dato che l'intervallo delle ascisse considerato, pur essendo più ampio di quello mostrato, è pur sempre limitato. I puntini gialli corrispondono ai numeri primi minori di 100.
È evidente che la costruzione è concettualmente equivalente al metodo di Eratostene, ma ha in più una eleganza geometrica, una pregnanza visiva che la rende degna di nota.

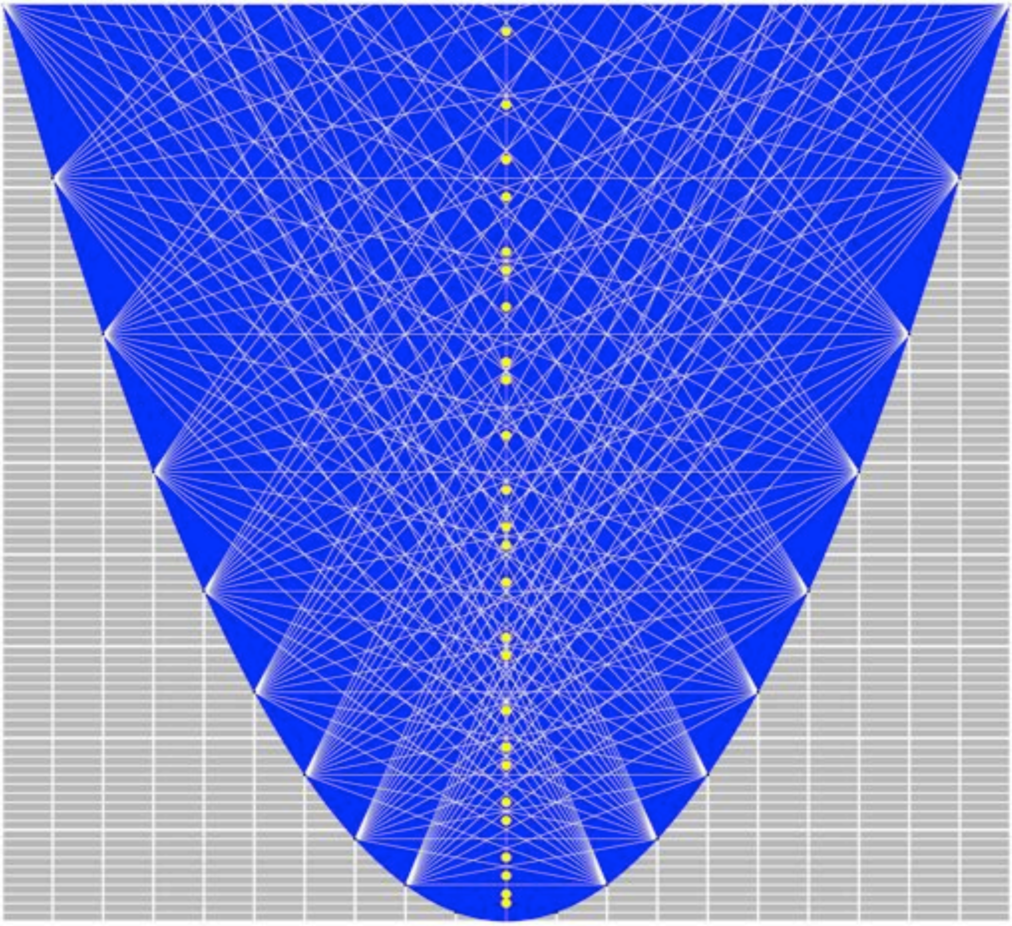


Figura 2.

La Figura 2 rovesciata suggerisce lo schema costruttivo per un modello scenografico basato su quanto descritto. In occasione di un Festival della Matematica, o ad un museo scientifico, si potrebbe proporre un'installazione conformata ad arco parabolico, o addirittura a cupola paraboloide, con una colonna centrale graduata attraversata da fili di nylon, con delle piccole luci in corrispondenza dei primi. Fantasie, naturalmente, ma se qualcuno volesse portare avanti questo spunto sono pronto a collaborare.

Ambientes virtuales para el aprendizaje de las geometrías[1]

Publio Suárez Sotomonte
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Resumen. *El artículo presenta una sucinta panorámica sobre los aportes teóricos de investigadores sobre el problema de la representación, el pensamiento visual y su relación con la comprensión en matemáticas. Contextualizados en perspectivas cognitivas y semióticas se describen algunas investigaciones sobre los tipos de sistemas de representación involucrados en experiencias de aula en el ámbito local, mediadas por los ambientes virtuales para el aprendizaje de las geometrías, el desarrollo del pensamiento espacial y la exploración de sus sistemas y estructuras. Los aportes significativos describen la dinámica en el uso de dichas mediaciones y el fortalecimiento del nexo entre construcciones intuitivas y constructivas, tratando de mantener un equilibrio adecuado en el trabajo con representaciones, elaboración de modelos y simulaciones en los procesos de construcción de conceptos geométricos.*

Abstract. *This paper presents a brief panoramic on the theoretical contributions of researchers on the representation problem, visual thinking and their relationship with mathematical comprehension. Contextualized cognitive perspectives and semiotic approaches, described some research on the types of systems of representation, involved in the classroom experiences mediated by virtual environments for geometry learning, the development of geometric thinking and exploration of their systems and structures. The significant contributions describe the dynamics in the use of such mediations and strengthening the link between intuitive and constructive buildings, trying to maintain a proper balance in working with representations, elaboration of modeling and simulation in the process of geometric concepts construction.*

1. Introducción

El papel de la representación en la construcción de conceptos de matemáticas es considerado un problema fundamental en educación matemática, en pleno auge dentro de las diversas tendencias que orientan los programas de investigación actual (D'Amore, 2006; Font, 2006). La exploración en los sistemas semióticos de representación es clave para brindar ambientes creativos de aprendizaje y propiciar la elaboración de imágenes mentales esenciales en la construcción conceptual; además el pensamiento visual es el soporte con miras a potenciar el pensamiento matemático (Duval, 1999).

---

[1] La propuesta hace parte del proyecto de tesis doctoral: "Ambientes virtuales para el aprendizaje de las geometrías" del Doctorado en Educación, desarrollado por Publio Suarez, dirigido por el Dr. Alfonso Jiménez, con asesoría internacional del Dr. Vicenç Font.

La incorporación de las tecnologías de la información TIC a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha revolucionado positivamente la dinámica del aula, como sistema de distribución de información o como espacio de formación de los estudiantes y profesores (Cabero & Gisbert, 2008). Los enfoques tradicionales para aprender matemáticas dejan poco a poco el camino libre para brindar nuevos ambientes en el aula diseñados por profesores creativos en donde el estudiante desarrolle el pensamiento matemático, se divierta y aprenda por sí mismo muchos de los conceptos matemáticos que antaño se consideraban difíciles e inalcanzables para ellos.

La conferencia presenta una panorámica sobre el problema de la representación y los aportes teóricos de expertos investigadores respecto a las alternativas de solución en ambientes virtuales. Se involucran los tipos de sistemas de representación, a la luz de perspectivas cognitivas y semióticas. Además, se hace una reflexión sobre las investigaciones en el ámbito local, que abordan situaciones de aula para implementar la geometría dinámica en el aprendizaje de las geometrías con mediación tecnológica, enfatizando sus resultados, alcances, aportes y perspectivas de trabajo.

Asimismo se analizan algunos aspectos teóricos que aportan directrices para investigar sobre el problema de comprensión en matemáticas de la educación básica, cuando se enfatiza el pensamiento visual y las capacidades humanas para elaborar imágenes mentales (Duval, 1999; Sternberg, 1986; D'Amore, 2006; Font, 2006) para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos (Vasco, 1992) y la solución de problemas matemáticos con el uso de recursos informáticos (Castiblanco et al., 2004). Los aportes significativos son la desmitificación del uso de estas mediaciones y el fortalecimiento del nexo entre construcciones intuitivas y teóricas formales, tratando de mantener un equilibrio adecuado en el trabajo con representaciones, construcción de modelos y simulaciones y los procesos de creación de teorías matemáticas.

Algunos referentes teóricos adoptados en la propuesta se enmarcan dentro de las tendencias de investigación en educación matemática, con referentes teóricos constructivistas para la naturaleza epistemológica de las matemáticas y socio epistemológicos para la naturaleza de la educación matemática (Jiménez, 2010); en cuanto a las concepciones de aprendizaje y enseñanza se opta por tendencias cognitivistas especialmente la corriente de aprendizaje significativo de Ausubel y Novak y constructivismo social del conocimiento (Font, 2002).

En cuanto a la representación en educación matemática se consideran las propuestas sobre la imagen en sistemas semióticos de representación, modelos, esquemas y su papel de intermediarias en la elaboración de los conceptos, ó en sentido inverso, como evidencia de la existencia de un concepto o idea; también en la representación se evidencian conceptos matemáticos (D'Amore, 2006). Desde el enfoque ontosemiótico, se conceptúa sobre la dificultad de la investigación en el tema de las representaciones:

> En nuestra opinión, la complejidad del tema, la ambigüedad de las representaciones y su importancia están en los objetos matemáticos que se trata de representar, su diversidad y naturaleza. Hablar de representación (significado y comprensión) implica necesariamente hablar del conocimiento matemático, y por tanto, de la actividad matemática, sus "producciones" culturales y cognitivas, así como de las relaciones con el mundo que nos rodea. (Font, Godino, & D'Amore, 2007, p. 2)

2. Desarrollo de la propuesta

Los ambientes virtuales elaborados como secuencias didácticas estuvieron inicialmente dirigidos a la cualificación de docentes en ejercicio dentro del Proyecto para la Transformación de la Calidad Educativa (PTCE), que se desarrolló en convenio entre el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y cinco universidades públicas entre las cuales está la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), en trabajo colaborativo del grupo de investigación interinstitucional, Pirámide en Educación Matemática y con base en las experiencias investigativas de sus integrantes en formación inicial de docentes de matemáticas en cuanto al desarrollo de competencias digitales y la implementación de actividades de aprendizaje en diversos cursos de geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC.

Adicionalmente algunos tópicos respecto al trabajo en ambientes virtuales tratados en esta conferencia corresponden a la experimentación con programas de ingeniería de la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja, especialmente en cursos de geometría vectorial. Las aplicaciones en medios virtuales que propiciaron aprendizajes autónomos o colaborativos de la geometría diferencial fueron CarMetal, Geogebra y Dpgraph. Estas aplicaciones se incorporaron en las prácticas educativas de aula a través de secuencias didácticas para el aprendizaje de las operaciones entre vectores y variedades lineales sus operaciones y relaciones; propiciaron la oportunidad para trabajar los campos de la representación, modelación y simulación de situaciones problemáticas del contexto en donde subyacen estas temáticas.

Para el desarrollo del pensamiento espacial, potenciar la intuición geométrica y la creatividad se elaboraron los ambientes dinámicos y constructivos para idear y explorar las representaciones en diversos tipos de geometría como: 1) Euclidiana, 2) Cartesiana, 3) Proyectiva y 4) Transformaciones. Estas últimas, como opción para mejorar la dinámica las representaciones bidimensionales de los objetos de la tercera dimensión; la evolución de dichas representaciones se evidenció en la creación de esquemas de la geometría dinámica (macro-construcciones) que muestran las características, parámetros, dimensiones y secretos del diseño geométrico de creaciones artísticas de la pintura y la escultura respecto a su armonía, composición y distribución espacial (García, 2010); como ejemplo concreto se evidencian ejemplos de la relación entre arte y geometría, especialmente en grabados de Piero de la Francesca, Andrea

Mategna, Leonardo Da Vinci, Alberto Durero, Paolo Ucello y León Battista Alberti, entre otros artistas de la época del renacimiento (D'Amore, 2007).

En cuanto a la representación de los objetos correspondientes a las geometrías no euclidianas se usaron aplicaciones como NonEuclid, que incluye el modelo de Poincare para la geometría hiperbólica; se exploraron algunas aplicaciones para recrear el modelo de la Esfera de Riemman para la geometría no euclidiana esférica, pero todavía no son lo suficientemente desarrollados como ambientes de geometría dinámica comparados con aplicaciones como Geogebra, Cabri Geometry y Geometrix para la geometría plana. En dichas aplicaciones se pueden crear incipientes ambientes virtuales para trabajar los modelos de las geometrías no euclidianas.

Para el trabajo con geometría tridimensional se experimentaron aplicaciones como Calques, Cabri 3D, CarMetal y Geogebra 3D, entre otros, en los cuales la geometría proyectiva y la geometría de las transformaciones juegan un papel central en el desempeño en los dominios de funcionamiento, interpretación y variación (Laborde, 1998), del ambiente gráfico y su potencialidad para representar objetos con mayor realismo objeto de estudio de la computación gráfica.

Desde el enfoque experimental de las matemáticas, se implementaron las aplicaciones de geometría dinámica y de geometría constructiva, que actualmente permiten diseñar y modelar objetos de la naturaleza, usando de manera particular, las estructuras de la geometría fractal combinada con las geometrías hasta ahora mencionadas.

Al Considerar el estudio de conceptos matemáticos como la autosemejanza, la recursividad y su relación con la complejidad y la teoría del caos, se modelaron en ambientes virtuales, los objetos geométricos previamente elegidos de la geometría fractal (Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1990). Así se pudieron evidenciar aplicaciones en la exploración de la naturaleza y el arte; por ejemplo al recrear situaciones para el diseño de teselaciones y dibujos creados por Escher, gracias a la evolución de las tecnologías computacionales (Lanshoff, 2003; Ernst, 1994).

Al usar el ordenador como mediador del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas se tuvo en cuenta las concepciones del profesor y estudiante frente a sus prácticas educativas. Al respecto Moreno afirma:

> Las herramientas computacionales, modifican la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático. Algunos autores se han interesado por la génesis instrumental de las herramientas computacionales (Rabardel, 1995). (Moreno, 2002, pp. 46–47)

Al aceptar la mediación de la pizarra electrónica de los ordenadores y computadoras, no se trata de trabajar con las mismas prácticas educativas tradicionales. Para tal fin se modificaron de manera apropiada las situaciones problemáticas, los problemas, las tareas, las representaciones y hasta la forma de indagar e investigar respecto al conocimiento matemático.

Para diseñar las secuencias didácticas (Morales, 2013) mediadas por los ambientes de geometría dinámica de las múltiples opciones que se pueden plantear en geometría dinámica, se adoptaron situaciones “blandas” que provienen de la construcción de una figura que satisface condiciones geométricas. Las construcciones “robustas” requieren conocimientos que los alumnos no tienen y se caracterizan por los teoremas y propiedades al estilo tradicional (Laborde, 2006). En este sentido, al incorporar aplicaciones de geometría dinámica, se trabajaron de manera natural las construcciones de la geometría clásica.

Para crear los dibujos-dinámicos correspondientes a los conceptos matemáticos, el estudiante se enfrentó a muchas situaciones “blandas”, que por sus características brindaron un espacio más apropiado para el aprendizaje por descubrimiento. Las situaciones problemáticas que el estudiante trabajó en la construcción del modelo, permitió enfocar la actividad a propiciar el desarrollo del pensamiento espacial, sin enfatizar en el bagaje de conocimientos, teoremas y propiedades, al estilo de la geometría clásica. Estas situaciones abiertas (flexibles) caracterizadas por no tener soluciones únicas, permitieron desarrollar las competencias relativas a la solución de problemas geométricos. Los estudiantes tuvieron que poner a prueba su imaginación y creatividad en el diseño de sus propios modelos, ya que surgieron construcciones difíciles de lograr que implicaran el uso de resultados que no conocían, lo que los impulsó a investigar. El desarrollo de las competencias digitales es fundamental a la hora de diseñar y crear ambientes de aprendizaje para el aprendizaje de las geometrías, en donde el manejo de las aplicaciones va más allá de la simple manipulación de los comandos de los programas, en donde se profundizaron las construcciones poniendo a prueba la potencialidad y flexibilidad del material digital.

3. Resultados

Los materiales que incluyen ambientes virtuales de aprendizaje de las geometrías se presentan en cuatro tipos: 1) Cualificación para docentes en ejercicio. 2) Actividades para estudiantes de educación básica. 3) Competencias digitales de estudiantes de formación inicial de Licenciatura en Matemáticas. 4) Experiencias de estudiantes universitarios en el aprendizaje de las geometrías.

3.1. Ambientes virtuales para cualificación docente

el material disponible en medio electrónico implicó desarrollar algunas sesiones prácticas de trabajo, que se convierten en lecciones que el profesor de educación básica puede desarrollar con sus estudiantes; se proponen igualmente, algunas actividades que buscan desarrollar el pensamiento espacial de los docentes y el trabajo con distintos tipos de geometría. Cada “situación de aula” destaca las competencias que se espera que los docentes alcancen y luego sus estudiantes. Los ítems contemplados son: actividades para pensar, reflexión teórica, actividades de evaluación y (re) significación de las prácticas. Todos estos aspectos tienen una intencionalidad pedagógica y didáctica. Se hizo especial relevancia en la (re)significación de las prácticas docentes, que pretende hacer explícito aquello que (de acuerdo con sus concepciones iniciales) el docente logra replantear y darle un nuevo significado. Aquí el uso de valiosas estrategias de formación, como los encuentros con otros colegas, es un trabajo colaborativo en donde se comparten experiencias (Jiménez, 2005); la puesta en plataforma de pequeños escritos (narrativas) tiene finalidad comunicativa, en donde se cuenta e intercambie las experiencias para que otros colegas las puedan leer y contrastar con lo que ellos hicieron. Se debe destacar que, tanto las actividades para pensar, como las reflexiones teóricas se plantean sobre creencias de la propia matemática y sobre aspectos didácticos como la dinámica de la clase, la comunicación, la enseñanza, el aprendizaje o el uso de recursos didácticos (medios y mediaciones) en la enseñanza de las matemáticas.

En la primera etapa de diseño y creación de los materiales virtuales, se enfatizó el papel de la representación y el pensamiento visual en la construcción de conceptos en matemáticos. La exploración en los sistemas semióticos de representación (en el sentido propuesto por Duval) fue considerado clave para lograr aprendizaje significativo, potenciar la imaginación y el pensamiento matemático de los docentes de matemáticas. La creación de ambientes dinámicos virtuales para el aprendizaje de las geometrías, incluyendo aspectos como la exploración de diversas representaciones de conceptos geométricos, la construcción de modelos que los estructuran y la simulación de situaciones problemáticas cotidianas en ámbitos como la arquitectura, la pintura y la modelación de la naturaleza resultaron novedosas para los docentes.

Figura 1. Ambiente virtual para formación permanente de profesores de educación básica. Fuente, el Autor.

Ejemplo 1. Polígonos y estrellas: una de las actividades prioritarias es el reconocimiento de las formas y figuras tridimensionales usando los tres tipos de materiales, troquelados (vestidos de los sólidos), sólidos y estructuras. Se proponen diversas actividades que inicialmente propician el uso de material real tomado del contexto para luego explorar el campo de las representaciones de sólidos, tanto regulares o platónicos, como semiregulares o arquimedianos. Para desarrollar el pensamiento geométrico de los docentes se propusieron secuencias de aprendizaje en donde la exploración sobre formas, figuras y transformaciones son fundamentales.

A manera de ejemplo una actividad introduce formas creativas de relacionar los polígonos y las estrellas, que consiste en construir una poligonal en ambientes de geometría dinámica. Se inicia dibujando un segmento de longitud determinada y luego rotarlo alrededor de alguno de sus extremos, con un ángulo de rotación fijo, que se llamará parámetro a. Este proceso se repite varias veces, como se muestra en la figura siguiente. Es inmediato verificar que si la poligonal se construye con un ángulo de a=60 grados, se obtiene un triángulo. Si el parámetro a=90 grados, se obtiene un cuadrado (Lauwerier, 1987). Si el parámetro a se deja libre para variar el ángulo deseado, en ocasiones la poligonal se cierra como en los dos casos anteriores, para obtener diversos polígonos regulares y estrellas, mientras que en otros casos la poligonal queda abierta. Las actividades propuestas a los docentes abarcan aspectos como la relación arte y geometría, en donde a partir de expresiones artísticas de la pintura universal, la escultura y la arquitectura, se evidencian los sistemas y las estructuras geométricas que en ellas subyacen.

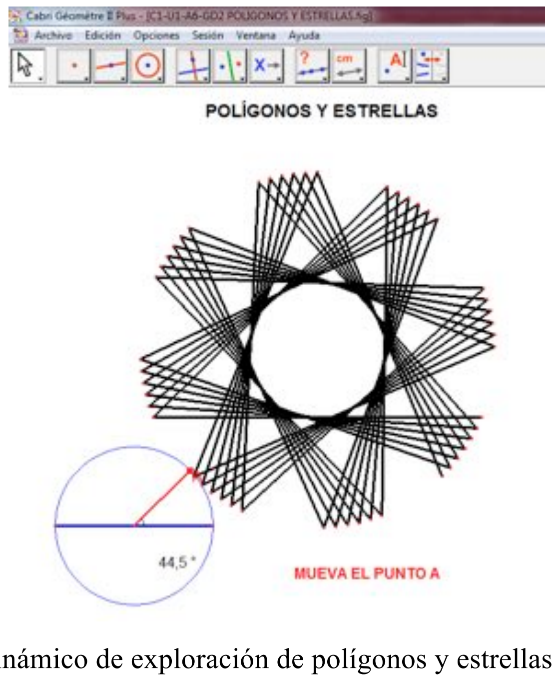
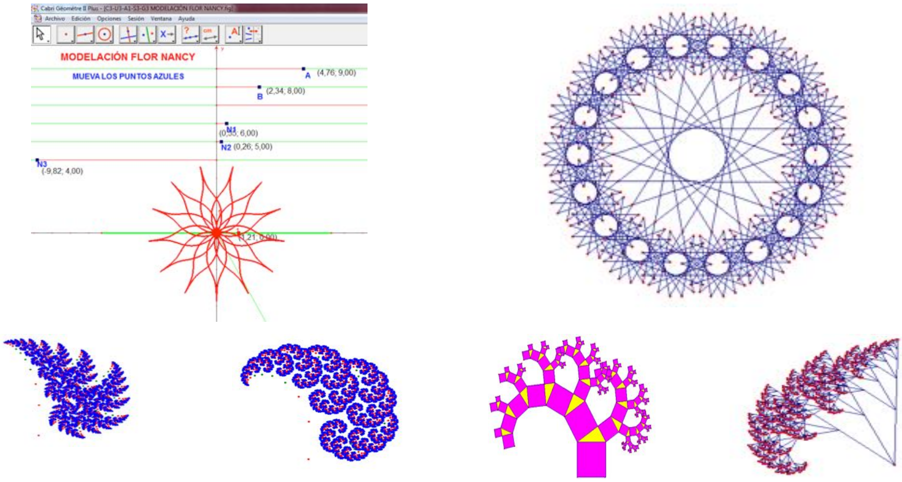


Figura 2. Dibujo dinámico de exploración de polígonos y estrellas. Fuente, el Autor.

la geometría para comprender y modelar la naturaleza es un tópico que se privilegió. A partir de la representación de objetos de la naturaleza se modelan en ambientes de geometría los secretos geométricos en sus formas y figuras (Mandelbrot, 1983; Barnsley, 1990; Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1990). Se pretende inicialmente, mediante la exploración de algún parque natural para identificar y clasificar objetos del medio en los cuales se ejemplifican formas de polígonos y poliedros y formas curvas como circunferencias y espirales que son las más comunes. Se busca descubrir las propiedades de distintas clases de plantas, flores, hojas (como los helechos de distintos tipos), árboles grandes y pequeños, espigas de trigo, hojas de distintas formas y colores. La construcción de las formas de las hojas y flores se logró con sencillas construcciones dinámicas usando polígonos y movimientos rígidos (por ejemplo, circunferencia centrada en el perímetro de un polígono regular cuyo radio va hasta su centro, usando la herramienta de trayectoria para dejar su traza); adicionalmente se usaron dibujos-dinámicos interactivos elaborados con ecuaciones para modelar espirales y la modelación de formas empleando la superfórmula (Gielis, 2003)

De acuerdo con el nivel de los estudiantes con los que se implemente esta actividad es recomendable tener en cuenta los siguientes aspectos más generales, detectados en el desarrollo de la experiencia de exploración de la naturaleza: 1) Observar los objetos de la naturaleza detenidamente, anotando sus características, partes y detalles especiales. 2) Hacer un bosquejo dichos objetos, tratando de captar sus principales detalles relativos las formas relaciones y simetrías y transformaciones. 3) Propiciar sesiones plenarias en donde los estudiantes expongan, analicen y discutan los resultados de la práctica de campo, con base en el material y datos recopilados en dibujos y fotografías. Adicionalmente, se considera provechoso presentar los resultados de la exploración bibliográfica hecha sobre los libros de geometría y páginas de internet sobre el tema. 4) Representar, construir y modelar en computador los objetos naturales elegidos usando sistemas y estructuras propios de la geometría fractal. 5) Construir formalmente los conceptos fractales claves, soportados en las estructuras algebraicas de espacio vectorial, espacio euclídeo y espacio afín. También es abordado el estudio topológico de los fractales, desde los espacios métricos completos. 6. Estudiar algunas aplicaciones de los conceptos fractales en la solución de diversos problemas de la vida cotidiana.



Figuras 3. Modelación con dibujos dinámicos en Cabri II. Fuente, el Autor.

3.3. Actividades para estudiantes de educación básica

la actividad geometría euclidea y geometría no euclidiana diseñada, compara dibujos-dinámicos en geometría euclidiana usando Geogebra y el modelo de Poincaré para la geometría hiperbólica, usando la aplicación NonEuclid. La construcción inicia con los puntos notables de un triángulo arbitrario: el baricentro, ortocentro, incentro, circuncentro y los tres puntos excentros. Así mismo, se hizo la construcción de las circunferencias notables: inscrita, circunscrita, las tres circunferencias excéntricas, la circunferencia de los nueve puntos y la recta de Euler. La idea es que el estudiante elabore dicha construcción, experimente con la manipulación y modificación (arrastre) de dichos elementos y mediante actividades de conjeturación, argumentación y razonamiento, busque convencerse y convencer (Mason, 1998) de la validez de proposiciones susceptibles de ser generalizadas y así, prepare el camino por recorrer hacia la demostración. (Acosta, 2004)
Al construir las alturas, las bisectrices, las mediatrices y las medianas en un triángulo, surgen intuitivamente cuestionamientos naturales respecto a su concurrencia y propiedades especiales, ¿Cómo se construyen los círculos: inscrito, circunscrito y los tres excírculos de un triángulo? ¿Qué propiedades relacionan a los puntos y círculos notables del triángulo? ¿Qué sucede cuando se intenta replicar dichas construcciones en el modelo de Poincare para la geometría hiperbólica, usando la aplicación Noneuclid? Los estudiantes que experimentaron con dichos dibujos dinámicos denominaron la actividad como "Encuentro Geométrico con Mickey Mouse". Este ambiente dinámico generó mucha expectativa y permitió a estudiantes descubrir relaciones y propiedades poco mencionadas en los libros clásicos de la geometría euclidiana.

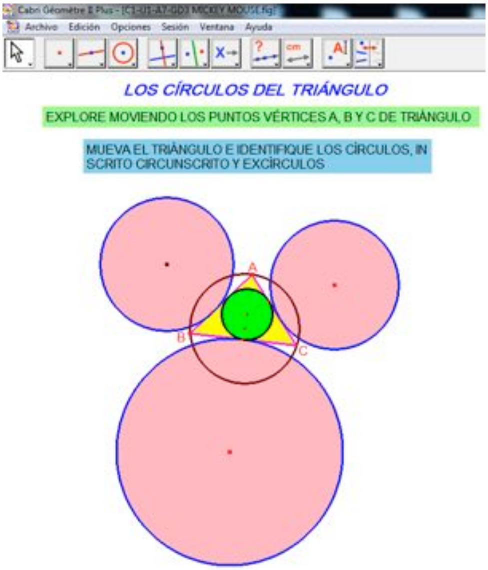


Figura 4. Explorando propiedades de los círculos, rectas y puntos notables del triángulo. Fuente, el Autor.

Ejemplo 2. Relación arte y geometría: los ambientes virtuales de aprendizaje que evidencian dicha relación inicialmente reproducen las estructuras geométricas usadas en el proceso de creación de algunas obras pictóricas a partir del renacimiento y que corresponden principalmente a la geometría clásica plana, la geometría proyectiva, la perspectiva y la sección áurea, los cuales han sido trabajados ampliamente en actividades de aprendizaje de educación básica (Mora, 2007). Las teselaciones y sus transformaciones en el plano se usaron para construir los modelos que subyacen en la obra del pintor Mauritz Escher. Tales actividades corresponden a la geometrías no euclidianas y la geometría fractal presentes en el diseño en el grupo de obras conocidas como límites circulares y cuadrados, diversas versiones de las evoluciones y de manera particular el último de los grabados que nos legó este artista, llamado serpientes. Dichos dibujos-dinámicos se inspiraron en los trabajos que analizan los bosquejos del diseño de sus obras (Ernst, 1994). Un análisis de la simbiosis entre arte y matemáticas inspiró los aspectos fundamentales en tales construcciones (Ayala, 1997) y de manera especial se contextualiza en las ideas de autoreferencia, procesos recursivos, inteligencia artificial y sistemas formales, sintetizadas e integradas en la teoría general de sistemas y la relación entre arte, música y lógica (Hofstadter, 1995).

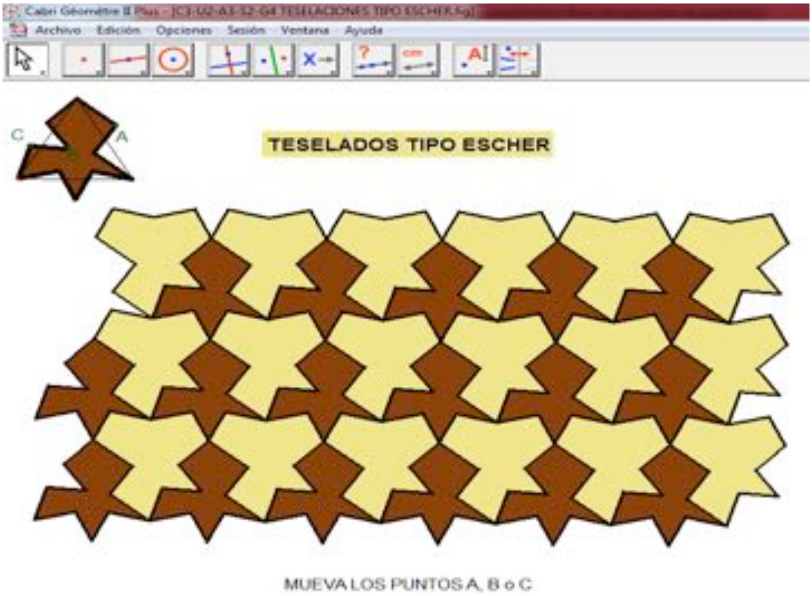


Figura 5. Explorando teselados tipo Escher, con dibujos dinámicos. Fuente el Autor.

Se abordaron los procedimientos usados respecto a la proporción de medidas, las formas y figuras, especialmente rectangulares, comúnmente empleadas en la composición y distribución, para crear una armonía que sustenta uno de los secretos de su la belleza contemplada en el diseño gráfico y la pintura (Garcia, 2010). En el ámbito de la geometría dinámica proporcionada por Geogebra, Cabri, CarMetal y otras aplicaciones informáticas, se recrearon los dibujos-dinámicos superpuestos a los grabados o carteles publicitarios en donde surgen las representaciones de figuras y su estructura subyacente. La matemática y de manera especial la geometría están más cerca de lo que se piensa, tanto de la creación artística, como del diseño en la naturaleza y de las situaciones problemáticas del entorno, por ello se experimentó esta faceta fascinante para aprender geometría creativamente.

Ejemplo 3. Geometría vectorial: las aplicaciones de geometría dinámica que involucran representación tridimensional fueron fundamentales a la hora de modelar, puntos, rectas, planos, hiperplanos (variedades lineales) sus relaciones, propiedades y operaciones. Las ecuaciones vectoriales para rectas y planos y sus relaciones para perpendicularidad y paralelismo se plasmaron en dibujos-dinámicos como ambientes de exploración de las propiedades que usualmente se expresan algebraicamente. Asimismo la aplicación Dpgraph constituyó un soporte visual para superficies diferenciables caracterizadas en coordenadas cartesianas, o cilíndricas. La interface gráfica proporcionada por dicho programa tiene ventajas a la hora de visualizar superficies y figuras diferenciables

Finalmente, la amplia divulgación que han tenido las aplicaciones de geometría dinámica en el ámbito de la enseñanza de la geometría (versiones de prueba de Cabri Geometry II, Cabri3D, Sketchpad, Regla y Compás, Calques, NonEuclid, Fzplot, Geogebra y Cinderella, entre otros) en la formación de educadores de matemáticas de educación básica y media y al menos en los primeros niveles de la universidad, contrasta con el hecho de su poco uso en el aula de clase de manera cotidiana. No usar estos recursos informáticos priva de vivir experiencias relevantes y novedosas en el campo de las representaciones de conceptos geométricos.

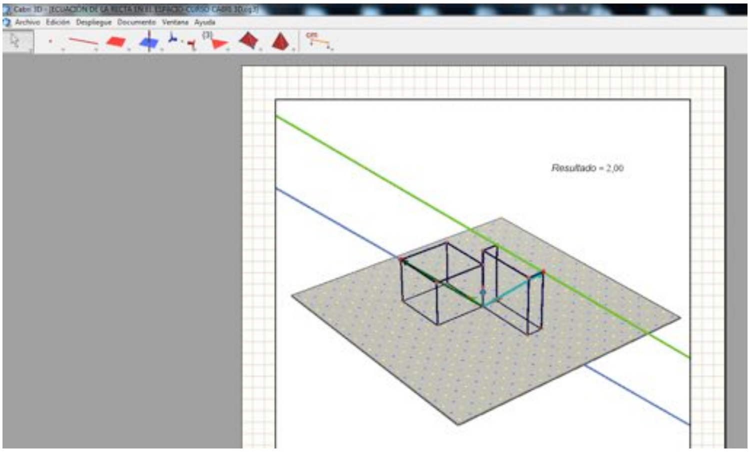


Figura 6. Representación paramétrica de la recta en el espacio 3D. Fuente, el Autor.

Agradecimientos

La comunidad académica de Educación Matemática de Boyacá y Colombia reconoce los valiosos aportes del Doctor Bruno D'Amore, pues a través de sus conferencias, seminarios y publicaciones ha contribuido significativamente en la formación inicial de Licenciados en Matemáticas y estudiantes de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). Deseamos que Dios le conceda muchos años de vida para que siga compartiendo su saber con nosotros, sus agradecidos discípulos.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., & Trilla, E. (1984). *Lecciones de álgebra y geometría, curso para estudiantes de arquitectura*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Ayala, J. (1997). Simbiosis matemática-arte. Tesis dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física, UPTC.

Barnsley, M. (1990). *Fractals everywhere*. San Diego: Academic Press.

Cabero, J., & Gisbert, M. (2008). *La formación en Internet*. Sevilla: Eduforma, aula múltiple Magisterio.

Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá: Proyecto INTCM, Ministerio de Educación Nacional.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

D'Amore, B. (2006). *Matemática en todo*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Ernst, B. (1994). *El espejo mágico de M. C. Escher*. Alemania: Taschen.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las Matemáticas, *Revista EMA*, *7*(2), 127–170.

Font, V. (2006). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas*. Barcelona: Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática* (pp. 1–20) [Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 2–7.

García, E. (2010). *Fundamentos geométricos del diseño y la pintura actual*. México: Editorial Trillas.

Gielis, J. (2003). A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes, *American Journal of Botany*, *90*(3), 333–338.

Hofstadter, D. (1987). *Gödel, Escher, Bach: Un eterno y grácil bucle*. Barcelona: Tusquets Editores.

Jiménez, A. (2005). *Formación de profesores de matemáticas: aprendizajes recíprocos escuela-universidad*. Tunja: UPTC, Búhos Editores.

Jiménez, A. (2010). *Las concepciones sobre la naturaleza de la matemática y su influencia en el salón de clase*. Tunja: CIFED UPTC.

Laborde, C. (1998). *Cabri Geometry: una nueva relación con la geometría*. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, IUFM.

Lauwerier, H. (1987). *Fractals*. New Jersey: Princeton University Press.

Mandelbrot, B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman and Company.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Editorial Labor.

Mora, J. A. (2007). Geometría Dinámica para el análisis de obras de arte. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9, 83–99.

Morales, F. (2013). *Desarrollo de competencias educativas*. México: Editorial Trillas.

Moreno, A. L. (2002). *Argumentación y formalización mediadas por Cabri Geometry.* Bogotá: Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas, Ministerio de Educación Nacional.

Prusinkiewicz, P., & Lindenmayer, A. (1990). *The algorithmic beauty of plants*. New York: Springer-Verlag.

Sternberg, R. (1986). *Las capacidades Humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Barcelona: Editorial Labor.

Vasco, C. E. (1992). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. (Volumen I y II). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN.

Investigazioni

Carlo Toffalori
Scuola di Scienze e Tecnologie, Università di Camerino

A Bruno D'Amore

Abstract. *Some people compare mathematical research to detective stories. We use this link as an excuse to propose some reflections on mathematics education.*

C'è chi da qualche tempo si prodiga a rimarcare e commentare il rapporto, tanto vasto quanto superficiale, tra la matematica e la letteratura poliziesca. Decine di esempi, da Edgar Allan Poe a Dan Brown, sono citati per sostenerlo. La verità matematica è accostata a quella giudiziaria, e gli strumenti impiegati per raggiungerle sono confrontati e paragonati. Si sottolinea allora una qualche corrispondenza tra il nitore, la perfezione, la profondità e la genialità della matematica classica, segnatamente della geometria euclidea, e le figure e i metodi degli investigatori dell'età d'oro del giallo, come Holmes, Poirot ed Ellery Queen, tutti maestri inappuntabili di logica. Capita peraltro che, in tempi più moderni, i limiti accertati della ricerca matematica, la relatività delle geometrie non euclidee e l'inaccessibilità della verità aritmetica tutta intera, che i teoremi di incompletezza di Gödel evidenziano, riecheggino in modelli di *detective story* completamente diversi dai precedenti. In essi i poliziotti protagonisti si rivelano tutt'altro che infallibili, e anzi figure insicure e tormentate, e la verità si fa più amara e sfuggente, se non addirittura inafferrabile.

Dubito che, nell'uno e nell'altro caso, il collegamento tra i due mondi, matematica e gialli, sia davvero consistente. Resiste tuttavia una tenue affinità tra la ricerca scientifica e l'indagine poliziesca, se non altro nel comune tentativo di comprendere appunto la verità – nel secondo caso sui singoli delitti, nel primo sulla natura generale e sulla struttura del mondo, ma in ultima analisi, in entrambe le situazioni, sul senso ultimo della vita e dell'uomo. Si potrebbe poi affermare che il modello classico euclideo esemplifica un sistema ipotetico deduttivo già organizzato, bello e serio o importante, e forse perfino appagato delle proprie doti di bellezza e serietà, quindi una scienza in cui tutto è ormai predisposto, due più due fa sempre quattro e non c'è altro da aggiungere. L'altro modello, che potremmo definire gödeliano, ci mostra invece una matematica inquieta, consapevole della sua incompletezza, eppure impegnata nella ricerca di nuovi orizzonti.

È forse in questa prospettiva che tanto matematica quanto gialli si congiungono alla didattica, la quale pure oscilla tra due estremi, tra due modi alternativi di proporsi: da un lato la rivelazione cattedratica della verità, la così

detta lezione frontale, il teorema finale che un Poirot o uno Sherlock Holmes enunciano nell'ultimo capitolo dei loro libri; dall'altro la scoperta progressiva del mondo e delle cose, l'investigazione, la curiosità, gli errori e gli entusiasmi che la accompagnano, in definitiva il modello che taluni oggi chiamano laboratoriale. Non però che questo secondo approccio sia recente. A esemplificarlo vale già il meraviglioso dialogo che Socrate e un giovane schiavo svolgono nel *Menone* platonico a riguardo del problema geometrico di costruire un quadrato di area doppia di un altro di lato assegnato, e quindi del problema aritmetico di determinare la radice quadrata di 2. Come si ricorderà, lo schiavo, assolutamente digiuno di matematica, è ciò nonostante indotto un po' alla volta da Socrate a risolvere la questione geometrica, ravvisando nella diagonale del quadrato originario il lato di quello da trovare. L'interrogativo aritmetico resta tuttavia senza risposta: la radice di 2 rimane, numericamente parlando, un'entità enigmatica e indeterminata, *"non umano portento, ma divino"* (per citare non più il *Menone* ma l'altro dialogo platonico *Epinomide*). Tale rimarrà in effetti per secoli, fino all'avvento e al consolidamento della teoria dei numeri irrazionali. Ma l'indagine che Socrate sviluppa col suo interlocutore racchiude già in germe questo sviluppo. Infatti, se da un lato attesta l'impossibilità di regolare il mondo nel modo pitagorico, cioè col solo uso dei numeri naturali e razionali, nel caso specifico di ottenere per questa via la radice di 2, dall'altro non esclude e anzi suscita la ricerca di nuovi scenari e nuovi numeri, quelli che gli dei già possiedono, verso la costruzione del campo reale. Non a caso Hardy, nella sua *Apologia di un matematico*, colloca il teorema di Pitagora, che al quesito di Socrate chiaramente si collega, e quindi l'interrogativo sulla radice di 2, come una delle pietre miliari e delle massime rivoluzioni del pensiero greco classico in matematica.
Innumerevoli lezioni si sono svolte dai tempi di Platone a oggi. Quella di Socrate, però, ci pare ancora attualissima. Lo è, anzitutto, quando coniuga appunto la difficoltà di risolvere certi profondi problemi matematici e il tentativo che comunque si compie per accostarli e comprenderli. Ma lo è anche quando propone, come metodo di ricerca, non una comunicazione orale del maestro, che l'allievo deve subire, appuntarsi e studiare, ma un itinerario di comune scoperta. E, ancora, la "lezione" socratica testimonia l'amore vivo e sincero per la scienza, che si manifesta soprattutto nel desiderio di condividerla. Intendiamoci: da Socrate ai tempi nostri la matematica stessa è per molti versi cambiata. La sua immagine di oggi è profondamente diversa da quella che maturò nel primo Novecento, se non addirittura da quella di una ventina di anni fa. In maniera analoga, nel corso dei secoli, la didattica della matematica si è affinata, intersecandosi giustamente con elementi di psicologia e pedagogia e con lo studio dei disagi di apprendimento. Resta tuttavia l'importanza dei valori che Socrate trasmette.
Nei racconti gialli gli investigatori dell'epoca classica, solitari, inappuntabili e inaccostabili, unici depositari della verità, sono ormai superati e hanno lasciato

la scena a squadre di poliziotti ordinari se non mediocri, fallibili e vulnerabili. In matematica un simile paragone regge solo fino a un certo punto. Non che manchino geni brillanti, abili a ideare teorie brillantissime e cogliere analogie invisibili ad altri, ma al tempo stesso incapaci di esporle in modo chiaro e convincente. Viene in mente, tanto per fare un esempio, il ritratto che Francesco Severi traccia di Emmy Noether, descrivendola *"grande algebrista"*, e tuttavia *"dotata di scarsissime attrattive"* e di *"parola impacciata, disordinata e un po' blesa"*. Esistono al contrario, in matematica, insegnanti bravi e appassionati, che sanno comunicare ai loro allievi interesse ed entusiasmo, ma restano negati alla ricerca e alla capacità di inventare cose nuove. Si potrebbe semmai aggiungere, per amor di completezza, che perfino le altre due combinazioni, di ottimi scienziati che sono pure ottimi docenti, o all'opposto di pessimi scienziati che sono pure pessimi docenti, vantano i loro validi testimoni. Torniamo però al discorso generale, per ribadire il ruolo fondamentale che nello sviluppo della scienza svolge il genio che apre strade nuove senza preoccuparsi di spiegarle: sarebbe assurdo impedirgli o impedirle la ricerca solo perché non la accompagna con la didattica. Ma allo stesso modo è essenziale la funzione di chi divulga e insegna con dedizione, e impedisce così che la scienza diventi una setta pitagorica avulsa dal mondo e un *giuoco delle perle di vetro* fine a se stesso. È dunque importante che la matematica nel suo complesso, se non le singole figure certo la sua totalità, evolva in entrambe le direzioni, mai trascurando la seconda.

Una simile sollecitudine si applica evidentemente a tutte le dottrine, ma diventa più urgente e pressante in una disciplina che, come la matematica, è per natura più astratta, essenziale e asciutta. È qui che a maggior ragione servono una buona didattica e quindi, come già si diceva, passione, rispetto dell'interlocutore, aggiornamento sia scientifico che umano, umiltà di mettersi in discussione, capacità di afferrare le novità e volontà di approfondirle. Senza questo contributo perfino i grandi teoremi perdono un po' del loro fascino.

Per Bruno: una riflessione semiseria

Luigi Tomasi
Insegnante di matematica, Adria (Rovigo)

Abstract. *A message on the occasion of the birthday of Bruno D'Amore.*

Ho conosciuto Bruno più di venticinque anni fa, frequentando il Convegno "Incontri con la Matematica" nella mitica Castel San Pietro Terme, dove cercavo il mio "Arno manzoniano" per "risciacquare i panni" del mio insegnamento della matematica, un po' oltre la fiducia che avevo negli strumenti e nelle tecnologie. Con mia sorpresa, leggendo i libri e gli articoli di Bruno, avevo scoperto infatti di essere un insegnante che aveva un'idea della didattica della matematica di "tipo A". Ho speso anni per diventare di "tipo B", non riuscendoci, e quindi sono ancora lontano dalla didattica di "tipo C", che Bruno nel frattempo aveva introdotto.

Di Bruno mi ha sempre colpito la grande disponibilità, il calore umano e l'enorme apertura nei confronti degli altri. Credo di aver capito perché è riuscito a creare il più grande convegno per insegnanti di matematica in Italia, e non solo … In questo Bruno è forse unico, effettivamente aperto a tutti, sempre pronto a offrirti battute affettuose e illuminanti.

Caro Bruno, buon compleanno! Tieni presente che in base 16, hai solo 46 anni! Tutto sommato, la base 10 è solo una convenzione e continuerai quindi a donarci il tuo entusiasmo e ad onorare la didattica della matematica.

70! di questi anni!

In omaggio a Bruno D’Amore

Roberto Tortora
Università di Napoli

Abstract. *A message on the occasion of the birthday of Bruno D’Amore.*

Di me che in un certo senso ho seguito, con qualche anno di sfasatura, tutti i suoi passi: dall’interesse per la logica a quello per la didattica della matematica; dai livelli scolari più alti fino a quelli giù dell’infanzia. Al nido, su cui ricordo un intervento appassionato di Bruno, non ci sono ancora arrivato. Ma, l’ho detto, c’è una sfasatura.

Farò una brevissima riflessione non sulla didattica della matematica, ma su coloro che la professano.

Una specie particolare di accademici: vanesi, come lo sono tutti gli accademici, ma anche piuttosto nevrotici, ombrosi, irresoluti.

Fatto è che la nostra disciplina è un ibrido, è matematica, certamente, ma è anche disciplina umanistica e sociale perché si occupa delle persone e dei loro comportamenti. Quali saranno dunque i nostri canoni di ricerca, a quali standard fanno riferimento?

E poi siamo sempre in bilico tra ricerca e insegnamento, su una linea di confine che appare incerta prima di tutto a noi. Ad esempio noi siamo abbastanza convinti che essere un brillante ricercatore, che so, in geometria, non implica affatto essere anche un bravo insegnante di geometria (senza giudizi, è solo un’osservazione); ma, venendo a noi, può esserci un ricercatore in didattica che sia un mediocre insegnante? Sia chiaro che non voglio qui dare risposte o ergermi a giudice, solo porre interrogativi.

A dipanare questi nostri dubbi i nostri colleghi dell’università non ci aiutano affatto, anzi molti non cercano altro che di cogliere i nostri punti deboli per colpirci e tenerci ad un livello di soggezione. Così che spesso siamo costretti a distinguerci e difenderci su due fronti: quello dei colleghi matematici e quello dei colleghi pedagogisti. Con i matematici abbiamo in particolare un rapporto di odio-amore: perché sentiamo spesso il loro fiato e i loro pregiudizi sulle nostre spalle, ma nello stesso tempo vorremmo convincerli uno per uno della importanza di quello che cerchiamo di fare e della necessità che ciascuno di loro, almeno in quanto insegnante, un po’ si interessi alle nostre ricerche e ai nostri risultati.

Ecco elencate, dunque, alcune delle ragioni del nostro carattere, come dicevo, un po’ ombroso.

Ebbene, perché dico questo? Perché Bruno D’Amore è stato invece per me in tutti questi anni un luminoso esempio di una persona solare e allegra, capace di infondere nei vari settori di studio di cui si è occupato un atteggiamento di apertura verso tutti. Di questa capacità, vorrei dire, di stringere tanti colleghi, insegnanti, studenti in un abbraccio caldo, gli dobbiamo tutti essere riconoscenti. Caro Bruno, ti auguro di continuare a lavorare così ancora a lungo.

70 … ci hanno dato tanto!

Pierluigi Vannozzi
Operatore Arti Figurative e Fotografo, Bologna

Sunto. *Il presente testo sottolinea l'importante contributo di Bruno D'Amore nell'ambito della critica d'arte.*

Abstract. *This text emphasizes the important contribution of Bruno D'Amore in the field of art criticism.*

Carissimo Bruno,

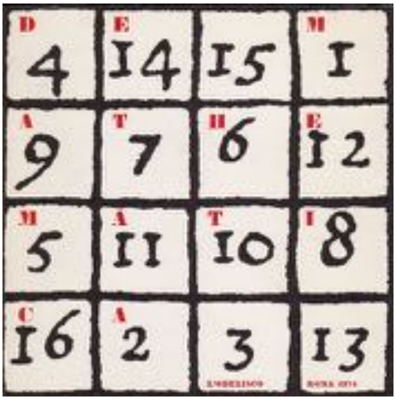
tutto è cominciato nel 1971 con la presentazione in catalogo della mia prima mostra personale. Io ti avevo mostrato i miei lavori e te li avevo raccontati. Tu li avevi guardati con interesse, ma c'era bisogno di una sintesi … Te l'ho chiesta e tu l'hai trovata: "Grammatica delle percezioni in una struttura topologica e significato come limite".

Bisognava partire da lì per entrare nel mio lavoro. Un intervento intrigante, lunghissimo, complesso e certamente inusuale per il catalogo di una piccola mostra d'arte, ma questo è sempre stato il tuo modo di affrontare un argomento: tutte le parole che servono, non una di più né una di meno, ma tutte.

Poi, nel 1974, un altro importante testo per un'altra mostra a Bologna nella gloriosa "Galleria 2000".

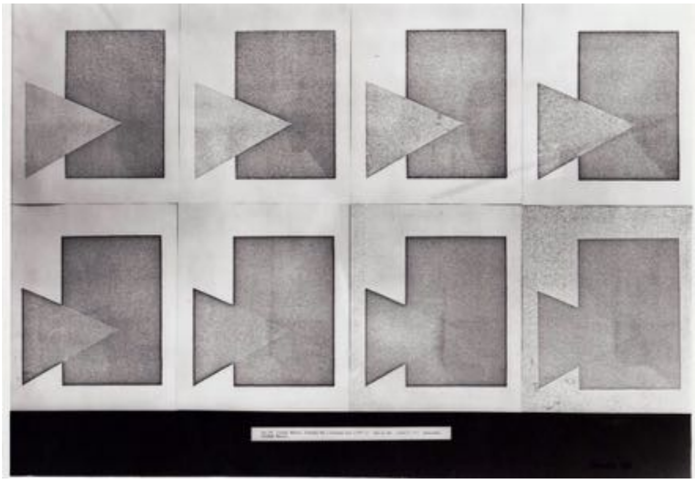
Era solo l'inizio e il tuo preziosissimo libro "Arte e Matematica" (edizioni Dedalo, Bari, 2015) testimonia la tua lunghissima militanza e frequentazione del mondo dell'Arte come Critico accreditato.

Nel 1974 a Roma, “De Mathematica” (curata da te assieme a Filiberto Menna) faceva partire “l’entusiasmante stagione dell’Arte Esatta” e dell’Arte Analitica.



D’Amore B., Menna F. (1974). *De Mathematica*. Roma: Galleria de l’Obelisco.

Al successo di questi due movimenti avevano poi contribuito altre mostre e convegni che hanno costituito per me una esperienza molto importante.
Intanto io continuavo a lavorare ma ero passato dalle trasformazioni geometriche alle trasformazioni ottenute con macchine riproduttive (come le chiami tu).
Con le “Fotocopie D’Autore” il mio lavoro si era spostato sulla rielaborazione di immagini riferite esplicitamente alla storia dell’Arte. Il riferimento ad essa e al Museo sono le cifre che mi hanno accompagnato in tutti quegli anni e che ancora oggi regolano la mia analisi sull’immagine e il suo linguaggio.
La mia operazione era partita dalle riproduzioni di opere d’arte celebri. I quadri di grandi Maestri (Seurat, Klee, Mondrian, Malevič, Albers …) sono stati la tavola codificata su cui è scattato il processo, il mezzo: la fotocopiatrice. La sequenza di immagini ripetute che nasceva dalla variazione della durata di esposizione alla luce era la mia riflessione analitica che si muoveva all’interno del sistema dei segni, in una catena di immagini duplicate dove la cultura era l’unico rinvio.



Da: Kasimir Malevič: “Triangolo blu e rettangolo nero” (1915 circa, olio su tela 66,5×57 cm), Amsterdam, Stedeljk Museum. Gruppo di 8 fotocopie eseguite con fotocopiatrice Olivetti 405 nel 1977.

Come ha scritto allora Viana Conti facendo una interessante analisi del mio lavoro di quel periodo:

> […] questo processo non visualizza il modello originale, ma l’immagine della ripetizione, i cui piccoli scarti mettono in evidenza una sintassi dalla precisa semantica. Le informazioni che vengono date in calce all’opera (titolo–autore–tecnica), non comunicano di per sé, ma sono elementi su cui il linguaggio si articola. Fornite duplicazioni riconoscibili insieme ai dati necessari per identificarle, l’autore provoca un movimento di rinvio culturale. Il legame tra le fotocopie illeggibili e quelle nitide, di una stessa sequenza, è di esperienza e passa attraverso i meccanismi mentali dell’informazione. In rapporto al quadro reale, anche il riflesso più vago ed indistinto del vero smuove tutto un bagaglio culturale e funziona come testimonianza. La portata dell’ipotesi di Vannozzi sta nel suo non-limite.

E tu, con la solita lucidità, scrivevi:

> Le “fotocopie d’autore” di Vannozzi hanno una precisa denotazione, che non può essere confusa né con operazioni di carattere “storico” né con operazioni di “recupero” tramite moderne tecnologie. Si tratta di esemplificazioni di un discorso che l’artista persegue da diversi anni sul fenomeno della “ripetizione differente”, cioè sul significato concettuale che va attribuito al termine “concetto”; ogni fotocopia è un segno diverso dal precedente che però “significa” la stessa cosa, richiama alla mente lo stesso oggetto. Il concetto relativo attribuibile a quell’oggetto (mentale) è la classe dei segni o, come si può anche dire, la successione dei segni; metalinguisticamente il segno limite. Questa esemplificazione è arricchita dalla particolare scelta del rinvio semantico, la storia dell’arte, anzi, di certi particolari Maestri: l’inconfondibilità del riferimento culturale è la garanzia che l’artista ci dà per poter “riconoscere”, fotocopia dopo

fotocopia, i diversi termini delle successioni.

Da: Joseph Albers, "Omaggio al quadrato", Gruppo di 5 fotocopie eseguite con Xerox 6500.

L'incontro con Munari (un altro grandissimo Bruno), mi aveva permesso di approfondire il lavoro xerografico e di storicizzarlo. Bruno Munari era stato il primo "testimonial" della Rank Xerox e i suoi libri sulla "Xerografia" sono oggi la testimonianza più antica e preziosa delle possibilità creative della macchina fotocopiatrice. In quegli anni, In tutto il mondo, si era cominciato a chiamare questo Movimento con il termine "Copy Art". Ancora oggi diversi musei europei e americani la studiano, la espongono e la promuovono come anticipatrice dei new media di oggi.
Una ulteriore evoluzione tecnica, nel 1979, mi aveva consentito di realizzare una serie di lavori sulla trasparenza e di proporre una nuova analisi del "Grande Vetro" di Duchamp usando supporti trasparenti. Questa ricerca si era poi conclusa nel 1980 con l'allestimento di una mia mostra su Malevič presentata a Roma da Bruno Munari.
Nel 1984 "POSTMACHINA", la grande mostra organizzata a Bologna con amici fotografi (Trebbi – Sigurtà), videoartisti del gruppo RKO di Ravenna e musicisti (Cialdo Capelli), metteva per la prima volta in relazione tra loro lavori di Copy Art, fotografia, video e suono, ma soprattutto dava il via al Gruppo Postmachina con il quale ho organizzato alcune delle nostre più belle mostre di quel decennio invitando artisti da tutto il mondo a lavorare e a fare ricerca con noi.
Di tecnologia in tecnologia avevo poi lavorato con tante di queste partecipando a diversi movimenti: mail art, fax art, video, computer art e fotografia condividendo la ricerca con tanti artisti.

Riguardo alla fotografia, dopo migliaia di scatti, avevo privilegiato la Polaroid. Avevo cominciato già negli anni ’70 … Più rapida della fotocopiatrice, mi restituiva un’immagine sulla quale poter lavorare in maniera nuova, fisica. Stavo dipingendo di nuovo ma utilizzando solo l’emulsione all’interno del film polaroid aperto e lacerato. E dopo parecchia ricerca ecco ancora la tua attenta analisi sul mio lavoro: il segno sulla superficie della polaroid (e dentro la polaroid), era lo stesso segno di quando dipingevo. Le immagini erano ancora pittura.
Si chiama “cifra stilistica”? Non so, però a Castel San Pietro dove tu, come Assessore alla Cultura, avevi dato il via a una serie di mostre sull’arte contemporanea, ho potuto allestire una grande personale dove i miei lavori pittorici, Xerografici e fotografici erano insieme in una grande sintesi di analisi sull’immagine: ovviamente la mia immagine mentale, quella sempre inseguita con le serie sulle trasformazioni geometriche, con le Fotocopie d’Autore, con le trasformazioni Xerografiche e con le grandi serie sulla storia dell’Arte (inconsapevolmente scaturite dal lavoro sulle polaroid).
Ancora anni di ricerca fino alla mostra “La rappresentazione del metodo”, polaroid giganti e polaroid tradizionali, veri ritratti fotografici di altre fotografie per andare oltre l’originale.
Ancora una “ripetizione differente”, come proposta del metalinguaggio che mi ha permesso di ri-fotografare il mio museo, quello che ho dentro da sempre per averlo frequentato per tutta la vita.

In studio: polaroid giganti.

Da e per Ercole De Roberti   Da e per Caspar Friedrich

(polaroid originali)

E tu, ribaltando il titolo in “Pierluigi Vannozzi, il metodo della rappresentazione”, hai dato una lettura del mio lavoro che per me rimane la più lucida e attenta. Forse è davvero questo tuo saggio quello che meglio descrive il mio lavoro di tanti anni.
All’interno, la tua affermazione più sincera che condivido e rivendico:
“Fotocopie, polaroid, fotografie, immagini digitali, elencate pure tutto l’armamentario tecnologico riproduttivo che volete, ma io so che Pierluigi Vannozzi è ed è sempre stato un pittore”.

Grazie Bruno. E: auguri.

Two contrasting views about the real 21st-Century Mathematics as currently practiced and taught

Carlos Eduardo Vasco
Universidad Nacional, Bogotà, Colombia

Abstract. *In this paper, a list of five "fundamental principles of Mathematics", published five years ago (Wu, 2011) is transcribed. Dr. Wu expressly wished to summarize his core beliefs on what current Mathematics is and should be taught. Then, each principle is contrasted with the views the author holds about Mathematics from his long experience as practicing mathematician, Professor of Mathematics and Mathematics Education to let the reader ponder where in this spectrum his or her own views of existing Mathematics as practiced and taught today would lie.*

Five years ago, a very good Berkeley mathematician, H. Wu, published a paper in the Notices of the American Mathematical Society (Wu, 2011), where he considers he has sufficient moral and scientific authority to establish what the real Mathematics, the good, relevant and true Mathematics is and is worth teaching.[1]

First, let us see the list of Wu's (2011) five fundamental principles (pp. 379f of the March 2011 Notices). Here are the five principles, omitting the explanations. (The bold-Italics highlighting is due to Wu).

1. Every concept is precisely defined, and *definitions* furnish the basis for logical deductions.
2. Mathematical statements are *precise*. At any moment, it is clear what is known and what is not known.
3. Every assertion can be backed by logical *reasoning*.
4. Mathematics is *coherent*; it is a tapestry in which all the concepts and skills are logically interwoven to form a single piece.
5. Mathematics is goal-oriented, and every concept or skill in the standard curriculum is there for a *purpose*.

I am sorry to say that I cannot recognize in these five principles the Mathematics I have learned, practiced and enjoyed for the last 60 years of my life since I started college, not including elementary, middle or high-school Mathematics.

Even assuming a very solid content knowledge in several mathematical disciplines, in history and philosophy of mathematics and Mathematics Education on the part of the writer, not much of that is reflected in Dr. Wu's

[1] Hung-Hsi Wu is now a retired professor at the University of California at Berkeley. See his home page at the URL https://math.berkeley.edu/~wu/

quotation. On the contrary, I assume that most present mathematics educators with solid training in Mathematics as well as in Mathematics Education now share a completely different image of what current 21st century Mathematics is like, and what of it is worth teaching to contemporary students and prospective Mathematics teachers. The reader will have the opportunity to review his or her own views on our subject, and place them in the spectrum delimited by the five fundamental principles of Dr. Wu's and the contrasting views of the present author.
Here are some of the traits I have collected in 45 years of teaching Mathematics and learning its history, its epistemology and its didactics, directly opposed to those five principles of Dr. Wu's list:

1-Wu. Every concept is precisely defined, and definitions furnish the basis for logical deductions.

1'. No basic concept of Mathematics can be precisely defined. Indeed, that condition could become a very good but necessarily imprecise definition of "basic concept": X is a basic concept of Mathematics if and only if it is the referent of a word taken in the LHS as "definiendum", and if that word cannot be defined by more precise words appearing in the RHS of a definition, i.e., in the "definiens". Try defining some basic terms like point, element, vertex, node, line, edge, side, base, curve, incidence, continuum, set, region, plane, space, boundary, dimension, displacement, translation, rotation, turn, angle, relation or operation. Good luck to you. Moreover, definitions cannot be the basis for logical deductions, because the LHS of a definition is just a stenographic compression of a longer code found in the RHS that can be replaced by their shorter counterpart or expanded again when deemed convenient. That can ease (or hinder) logical deductions, but certainly cannot be the basis for them. This reviewer has not seen any formal proof that starts from definitions.
On the contrary, many good definitions are precisely the opposite: they are results from logical deductions; indeed, if you manage to prove an if-and-only-if statement, the longer list of conditions can become the best current definition of the shorter list if you find a good name for the package. That is precisely what the pseudo-definitions of "right" angle, "straight" line, "right" triangle, "perfect" square and other epithets, sounding much more like "nice", "good", "best" or other heavily charged value words than to scholarly mathematical jargon.

2-Wu. Mathematical statements are precise. At any moment, it is clear what is known and what is not known.

2'. Mathematical statements are not precise and cannot be so, unless they are trivial rewordings, and even in those cases, the apparent synonyms might hide imprecise connotations that may blur the intended denotation.

At any moment of history, it is never clear what is known and what is not known. You may or may not find most Arab plane trigonometry in Babylonian plane slices and epicycles in astronomical spheres: Lorentz transformations and wave-front ellipses in Apollonius' Conics, or Einstein's General Relativity in Poincaré's study of phase space trajectories of non-linear Partial Differential Equations.

Hard work, critical thinking and long reflections manage to bring up to the surface some of what is implied, and seldom what is not known about the subject becomes more than a hunch. One need not go all the way to assume that Mathematical statements are better understood with Bertrand Russell as pure implications of the type "if p, then q", where we do not know what we are saying or whether what we are saying is true. Mathematics as they occur in Mathematics Educations at any level from Kindergarten to Graduate School is closer to strategy board games with elaborate rules than to any list of precise propositions along with a dictionary of well-defined terms.

3-Wu. Every assertion can be backed by logical reasoning.

3'. No *basic* assertion in Mathematics can be backed by logical reasoning; in particular, common notions, axioms, postulates, definitions and rules of inference are stated as such precisely because they are not apt to become the conclusion of any logical reasoning text.

Remember the Münchhausen (or Fries') trilemma: a logical proof must start from one or a short sequence of assertions without any backing, or will become circular, or will dissolve into a "regressus ad infinitum".

Inside a given mathematical game, the purpose of the game of proof could be to enhance and refine the meaning of axioms and to make explicit the relational network, but that seldom happens in schools. Philosophers and logicians have repeatedly warned that no new knowledge can be gained by formal reasoning, because any information contained in the conclusions must have been already present in the axioms. And every few hundred years, from Proclus to Clavius to Hilbert, logical flaws in Euclid's propositions have been found, whose pseudo-proofs had been repeated thousands of times for centuries as flawless logical reasoning. Dozens of brilliant and convincing assertions in Euler's works or Ramanujan papers – most recently in Grothendieck's manuscripts – still defy proof or refutation.

4-Wu. Mathematics is coherent; it is a tapestry in which all the concepts and skills are logically interwoven to form a single piece.

4'. Mathematics is not globally coherent, but only locally; it is a beautiful patchwork tapestry in which some but not all the concepts and skills are logically interwoven to form a small single piece, loosely knit to a few neighbors; it need not be coherent with other axiomatic theories. Moreover, after decades of research on intuitionistic logic, time-dependent logic, Gödel's coding, topos-valued logic, paraconsistent logic and fuzzy logic, there is no excuse to keep proclaiming the illusory global coherence of Mathematics or even of a more restricted mathematical subdiscipline.

5-Wu. Mathematics is goal-oriented, and every concept or skill in the standard curriculum is there for a purpose.

5'. As in the former case of Principle 4-Wu, Mathematics is not globally but only locally goal-oriented, unless your call a small parcel of closely related mathematical works “goal-oriented” when the authors’ goal is to solve the same problem or when their goal is just to enjoy playing the same game with clever variants, as it is now the case with most computer games.

A short piece of mathematics is indeed goal-oriented, as any piece of writing must be, a short story, a poem, a sunset description in a novel, a dialogue, an expository piece of a textbook, a discussion and proof of a theorem, etc. But Mathematics as a growing, spreading cognitive historical, social-cultural process that looks more like a messy network than a neat tree-like chain is not more or less “goal-oriented” than any other Darwinian slow-growth evolutionary chain.

Mathematics as a human activity full of creativity, exploration, combinatorics, extinctions and resurrections, euphoria and frustration is much closer to art than to the natural sciences; closer to playing chess or go, or even tournament soccer or football than to a rigorous pursuit of eternal truths.

Every concept or skill in the standard curriculum is there only for a limited local purpose, like a technical application, or a later procedural simplification, but mostly it is there by a historical accident, often forgotten; most concepts and skills are still there because many players of the game choose to defend their place in the curriculum by sheer traditional inertia. No matter how obsolete they seem, there are always many excuses to keep them alive. The traditional paradigms for arithmetic, geometry, algebra, trigonometry and Calculus are very difficult to change, as Thomas Kuhn noted in his book about scientific revolutions in the Physical sciences and then refined in the postscript written in 1969 (Kuhn, 1962/1970). After 50 years have passed, Dr. Wu’s paper is a new witness to this old phenomenon we could call “paradigmatic inertia”.

References

Kuhn, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago, IL: University of Chicago Press (Second ed., 1970).

Wu, H. (2011). The mis-education of Mathematics teachers. *Notices of the AMS, 58*(3), 372–384.

Il Flipped Learning nell'insegnamento della matematica alla scuola Primaria

Sergio Vastarella
NRD, Università di Bologna

Giusy Vallisa, Elisabetta Premoli
IC Cadeo-Pontenure (Pc)

Sunto. *Nel nostro paese, ma anche in altre parti del mondo, soprattutto negli Stati Uniti, studenti, genitori, docenti e ricercatori si sono resi conto che l'impostazione della scuola tradizionale "lezione, compiti a casa, verifica" non funziona più. Negli ultimi anni l'idea di un nuovo metodo didattico, basato sulla struttura della Classe Capovolta, ha iniziato a diffondersi negli Stati Uniti. L'apprendimento Capovolto è un modello pedagogico che sfrutta video-lezioni asincrone, l'assegnazione di letture, problemi pratici e altre risorse, basati sulla tecnologia digitale al di fuori della classe, e attività di problem solving interattive basate sul lavoro di gruppo in aula. Molte ricerche mostrano l'efficacia di questo metodo, soprattutto nelle scuole superiori, ma esistono solo pochi dati circa l'uso della Didattica Capovolta nelle scuole primarie. Questo saggio presenta alcune riflessioni sul Flipped Learning acquisite attraverso un percorso sperimentale che è stato sviluppato nel 2016 in due scuole primarie della provincia di Piacenza e in particolare in relazione con l'insegnamento della matematica.*

Abstract. *In our Country, but also in other parts of the World, especially in the US, students, parents, teachers and researchers have realized that the traditional school setting "lecture, homework, test" does not work anymore. During the last years the idea of a new didactic method based on the Flipped Classroom structure has started to spread out in the US. The Flipped Learning is a pedagogical model that employs asynchronous video lectures, reading assignments, practice problems, and other digital, technology-based resources outside the classroom, and interactive, group-based, problem-solving activities in the classroom. Many researches show the effective of this method, especially in the High schools, but there are only few data about the use of the Flipped Learning in Primary schools. This essay presents some reflections upon the Flipped Learning gained through an experimental path developed in 2016 within two Primary schools in the Province of Piacenza and in particular in relation with the teaching of maths.*

1. Il Flipped Learning

In tutto il Bel Paese, dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado e fino all'università, il modello tradizionale d'insegnamento basato sulla struttura "lezione frontale-compito a casa-verifica" è messo in discussione ogni giorno con più forza da studenti, genitori e insegnanti. Secondo una gran parte di questi s*takeholder* lo schema didattico, per così dire, “tradizionale” è ormai piuttosto obsoleto e poco funzionale al vero apprendimento: bambini e ragazzi imparano generalmente (soprattutto dalle “scuole medie” in poi) quello che serve loro a superare “la prova conclusiva” e, durante la verifica o l’interrogazione, restituiscono le stesse conoscenze, o quasi, ottenute grazie alle spiegazioni dell’insegnante, alle attività affrontate (spesso passivamente) in aula e a casa e ai vari materiali messi loro a disposizione. Gran parte del tempo dello studente viene così dedicato a elaborare strategie (a volte anche poco lecite) per “salvare” il più alto numero possibile di dati utili a superare la prova o l’interrogazione ma, passato qualche giorno, ci si rende inevitabilmente conto che gran parte delle informazioni raccolte sono già sfumate o, peggio, svanite.

Alle nuove esigenze di alunni e genitori, spesso insoddisfatti dei metodi formativi usati (e spesso, del funzionamento complessivo delle scuole) gli insegnanti e i ricercatori del mondo dell’istruzione e dell’educazione si sforzano d’offrire “quotidianamente” nuove risposte. Cercano di elaborare metodologie didattiche alternative, più efficaci sia da un punto di vista antropologico-culturale (rispetto alla complessa realtà sociale e intellettuale del mondo che ci circonda), sia da un punto di vista pedagogico, per migliorare tutte quelle strategie d’insegnamento che si rivelano spesso inadatte a condurre ogni studente al proprio e personale successo formativo. Tra queste metodologie un’innovativa idea per sviluppare i processi d’insegnamento-apprendimento, in modo che siano veramente centrati sullo studente e che permettano a ogni allievo di raggiungere il proprio obiettivo formativo, è certamente quella della Didattica Capovolta, conosciuta in tutto il mondo con il nome di Flipped Learning.

Come il Professor Bruno D’Amore spesso ricorda, la panacea didattica non esiste: il metodo che permette di risolvere tutti i problemi d’insegnamento di ogni docente e tutte le difficoltà d’apprendimento di ogni studente non è altro che un mito. Il Flipped Learning non fa eccezione rispetto a questa “regola d’oro”: la Didattica Capovolta rappresenta certamente uno strumento molto potente che ogni insegnante dovrebbe saper sfruttare in aula rispetto a un contenuto o a un sapere che ben si adatti a essere sviluppato attraverso di esso. L’insegnante poco avveduto è quello che porta in aula ogni giorno lo stesso e identico modo di insegnare, senza rendersi conto che in questo modo è possibile intercettare solo una piccola porzione delle diverse sensibilità degli studenti che ci si trova di fronte e in questa situazione, inevitabilmente, qualche studente rimarrà tagliato fuori dal processo di apprendimento. L’insegnante competente è quello che invece dispone di molti e variegati strumenti didattici nella propria “cassetta degli attrezzi scolastici” e che sa adoperare quello più adatto ad ogni situazione didattica, a-didattica, o non didattica che intenda proporre alla propria classe.

1.1. La Didattica Capovolta in alcuni dati di ricerca statunitensi

Nel 2012 Classroomwindow ha condotto, assieme al Flipped Learning Network (FLN – www. http://flippedlearning.org), un'indagine su 453 insegnanti Flipped statunitensi che è stata presentata nel poster "Migliorare l'apprendimento dello studente e la soddisfazione dell'insegnante in un Flip dell'aula"(TeacherView™, 2012). Sul totale dei docenti coinvolti nell'indagine, il 95% insegnava in scuole superiori, l'85% lavorava da più di sette anni ed il 91% usava il modello Flipped da meno di due anni. Le discipline maggiormente coinvolte sono state: scienze per il 46%, matematica per il 31% e lingua inglese per il 12%. Il 99% degli insegnanti intervistati ha dichiarato che avrebbe usato il modello Flipped anche l'anno successivo. Per il 42% del campione la soddisfazione professionale era migliorata e per un altro 46% la stessa risultava migliorata in maniera significativa. Il 15% dei docenti ha messo online, a disposizione degli alunni, la metà del materiale formativo previsto per l'insegnamento svolto ed un altro 28% i tre quarti del proprio. Gli insegnanti coinvolti hanno dichiarato che i loro studenti hanno migliorato i risultati nei test di profitto per il 67% e per l'80% sono migliorati negli atteggiamenti verso la disciplina insegnata.
Nel febbraio 2014 il Flipped Learning Network™ (FLN) e la società Sophia (Flipped Learning Network™, Sophia, 2014) hanno condotto un'indagine composta da 36 quesiti, cui hanno partecipato 2.358 insegnanti. Da questa ricerca è emerso che l'insegnamento capovolto era cresciuto in popolarità e successo. Il 96% degli insegnanti coinvolti ha riconosciuto il termine "Apprendimento Capovolto", un aumento del 73% rispetto alle indagini svolte due anni prima in maniera indipendente dai due gruppi. Il numero d'insegnanti che hanno capovolto una lezione in classe è aumentato passando dal 48% nel 2012 al 78% nel 2014; tra gli insegnanti che hanno provato la Didattica Capovolta, il 96% ha dichiarato che consiglierebbe il metodo a un collega. Nove insegnanti su dieci hanno indicato che il coinvolgimento degli studenti è migliorato con l'Apprendimento Capovolto e il 71% degli insegnanti ha anche riportato un aumento nei voti degli studenti.

2. La Didattica Capovolta alla scuola Primaria

Le strategie di Flipped Learning, che dal 2007 in poi hanno cominciato a diffondersi dagli Stati Uniti al mondo intero, sono state ampiamente sperimentate, e con successo, soprattutto a livello di scuola "superiore e media", mentre non molta ricerca scientifica è stata finora condotta all'interno delle scuole primarie.
Come emerge dai dati proposti in precedenza, le molte indagini statunitensi evidenziano l'efficacia di questo metodo applicato e studiato prevalentemente nelle High School, e ogni giorno le Community di docenti Flipped sul Web diventano sempre più affollate.

In un tale contesto sembra quindi legittimo domandarsi: “Un metodo sviluppato per le scuole superiori può effettivamente funzionare anche alla scuola primaria?”. L’analisi degli aspetti di Flipped Learning di due differenti percorsi didattici, realizzati all’interno di una ricerca sull’Apprendimento Capovolto svoltasi anche in provincia di Piacenza tra il 2015 e il 2016, contribuirà certamente a fornire alcune utili informazioni per rispondere all’interrogativo.

2.1. Attività sperimentali di ricerca

Giusy Vallisa ed Elisabetta Premoli sono due docenti di scuola Primaria dell’Istituto Comprensivo di Cadeo e Pontenure (Pc) che negli ultimi due anni hanno partecipato a un percorso di ricerca-azione, coordinato da chi scrive questo saggio, all’interno del progetto Europeo Erasmus + “FLIP – Flipped Learning in Praxis”. Queste due docenti hanno sperimentato l’uso della Didattica Capovolta nell’insegnamento della matematica mentre altre colleghe e colleghi di scuola primaria e secondaria dello stesso Istituto Comprensivo e dell’Istituto Comprensivo Baccio da Montelupo (Montelupo Fiorentino–Fi) hanno portato avanti lo stesso tipo di attività sperimentale rispetto all’insegnamento di altre differenti discipline quali l’italiano, la storia, la geografia, le scienze, l’arte, la musica e altro ancora.
La grande maggioranza di queste attività sperimentali svolte dai docenti si sono concluse con una valutazione autentica degli apprendimenti finalizzata all’apprezzamento delle competenze degli studenti. In quest’attività valutativa gli insegnanti, durante e al termine del percorso didattico, hanno compilato una rubrica valutativa per ogni allievo e ogni studente ha compilato la propria rubrica auto-valutativa gemella a quella del docente ma strutturata in maniera leggermente diversa (con i verbi declinati alla prima persona singolare anziché alla terza e con parole più adatte alla loro età). Una volta che i profili di competenza sono stati tracciati sulle diverse coppie di rubriche valutative docenti e allievi si sono potuti confrontare per giungere a una maggiore consapevolezza condivisa dei punti di forza e di debolezza di ogni discente rispetto alle competenze coinvolte nell’attività affrontata.

2.2. Problemi capovolti con variazione – Giusy Vallisa

All’interno di un’articolata proposta didattica sviluppata attraverso un ciclo di incontri di formazione relativo a “Problemi con variazione” tenuto da Alessandro Ramploud, ha trovato efficace applicazione la metodologia Flipped in diversi momenti del percorso in aula: dall’avvio dell’attività attraverso un brevissimo video, al lavoro cooperativo in piccoli gruppi, al coinvolgimento attivo di tutti gli alunni, vista l’impronta inclusiva della metodologia proposta.

Questa esperienza condotta in una classe III di scuola primaria composta di venti alunni ha dato esiti molto positivi in termini di partecipazione, di coinvolgimento personale e direi quasi … emotivo di tutti i bambini.
Il contesto è stato molto stimolante: lavorare a gruppetti in autonomia nel giardino della scuola o nello spazio iPuff supportati da device mobili, produrre una documentazione, assemblare le varie fasi per poi presentare il lavoro ai compagni e all'insegnante, ha costituito una forte sollecitazione per l'organizzazione autonoma del lavoro, per la relazione e la collaborazione tra bambini e, non da ultimo, per l'autostima personale.
Come insegnante di scuola primaria ritengo che i nostri alunni siano più che pronti per affrontare un deciso cambio dell'assetto didattico e dei tempi di apprendimento che, insieme all'impiego delle nuove tecnologie, può essere di grande efficacia sugli esiti di un cammino di crescita personale e culturale da vivere insieme. Occorre disponibilità a mettersi in gioco tutti, insegnanti e alunni.
In questo contesto di innovazione delle strategie d'insegnamento-apprendimento, sperimentare la Didattica Capovolta è stato per me di grande aiuto professionale e personale e ho potuto "toccare con mano" quanto questo cambiamento incontri le modalità di apprendimento dei nostri alunni e permetta loro mettersi alla prova e di spendersi oltre l'applicazione di contenuti e di conoscenze.

2.3. Frazioni capovolte in classe V – Elisabetta Premoli

Come tipicamente accade nella Didattica Capovolta si è partiti con un brainstorming per ripassare il lavoro svolto in precedenza e recuperare le idee dei bambini sul concetto di frazione. Gli alunni, per mobilitare le proprie conoscenze nella direzione di un determinato sapere, hanno avuto la possibilità di manipolare nuovamente molti oggetti usati o realizzati l'anno precedente a scuola: tavola, torri, torte delle frazioni …: il ripasso era centrato su frazioni equivalenti, maggiori o minori e frazioni proprie, improprie e apparenti. A questo punto i bambini hanno avuto accesso alla visione di alcuni filmati relativi sia ad argomenti già affrontati sia a tematiche per loro nuove. Hanno poi compilato una scheda riferita a quanto ascoltato e visto che è stata corretta collettivamente e che è terminata in un'interessante discussione.
Gli alunni sono stati suddivisi in gruppi (tre alunni per gruppo di livello eterogeneo) per affrontare diverse esercitazioni. Il momento finale di riflessione sulla tematica delle frazioni ha visto ogni gruppo trattare un argomento attraverso una breve lezione che è stata sviluppata dai bambini per essere presentata ai compagni con l'aiuto dei Tablet o del programma della Lim.
Il momento finale della valutazione è stato diviso in tre fasi: 1) autovalutazione dell'alunno; 2) valutazione dell'insegnante; 3) verifica sulle frazioni.

Un aspetto che mi ha particolarmente colpito è stato vedere come si sono comportati i bambini nella seconda autovalutazione che sono stati invitati a compiere dopo la verifica conclusiva sulle frazioni. Rispetto al modello fornito dall'esperto che ha seguito le nostre attività sperimentali di Didattica Capovolta, ero interessata a verificare se l'autovalutazione dell'alunno sarebbe stata la stessa anche dopo aver svolto la classica verifica di fine percorso.
Con una certa sorpresa è emerso che i bambini che generalmente dimostrano di avere scarsa autostima di sé e che si erano effettivamente sottovalutati nella prima autovalutazione, abbiano acquisito maggior fiducia in se stessi incrementando i propri livelli di competenza nella seconda autovalutazione … forse qui entrano in gioco più variabili da controllare!

Bibliografia

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. Eugene, OR: ISTE; and Alexandria, VA: ASCD.

Castoldi, M. (2009). *Valutare le competenze*. Roma: Carocci Editore.

Castoldi, M. (2010). *Progettare per competenze. Percorsi e strumenti*. Roma: Carocci.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2016). A proposito di metodi d'insegnamento univoci. Errori pedagogici, epistemologici, didattici e semiotici delle metodologie univoche. *La Vita Scolastica webmagazine.* Scaricato il 7 agosto 2016. http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/magazine/articoli/a-proposito-di-metodi-di-insegnamento-univoci

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *Difficoltà in Matematica*, *11*(1), 89–109.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educacion Matemática, 27*(3), 7–43.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica.* Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora.

Flipped Learning Network (FLN), & Sophia (2014). *Growth in Flipped Learning: Transitioning the focus from teachers to students for educational success*. Scaricato il 20 novembre 2015 da http://flippedlearning.org//site/Default.aspx?PageID=95

Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. The Jo*urnal of Economic Education*, *31*(1), 30–43.

Vastarella, S. (2016). *Postfazione. Flip your classroom. La didattica capovolta.* Firenze: Giunti Scuola. [Trad. it.: Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your*

classroom: Reach every student in every class every day. Eugene, OR: ISTE; and Alexandria, VA: ASCD].
Walvoord, B. E., & Anderson, V. J. (1998). *Effective grading: A tool for learning and assessment*. San Francisco: Jossey-Bass.

Algunas notas acerca del desarrollo del pensamiento algebraico temprano

(En honor a Bruno D´Amore)

Rodolfo Vergel Causado

Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotá, Colombia

Abstract. *This brief paper outlines a development idea which based Vygotskians approaches and, in accordance with this idea, a characterization of algebraic thinking arises, it understood as a type of sophisticated reflection and cultural action. In the context of what has been called the emergency zone of algebraic thinking, some elements that try to problematize the distinction between arithmetic and algebraic thinking are proposed. Finally, from the studies developed by Radford, I approach a characterization of algebraic thinking which involves three components or vectors, namely, the sense of indeterminacy, analyticity and semiotics expression.*

1. A manera de introducción

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en los primeros años de la escolaridad es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en educación matemática. De hecho, para docentes de los primeros grados de la educación primaria, parece ser un asunto que problematiza sus prácticas de trabajo en el aula. La idea de desarrollo involucrada aquí no es ingenua, al menos desde los planteamientos vygotskianos. Coincidimos en la idea educativa según la cual el desarrollo cultural es un proceso artificial (Vergel, 2014, 2016). Como bien lo anota Vygotski (1987, p. 187):

> La educación es el desarrollo artificial del niño; [la educación] es el dominio ingenioso de los procesos naturales del desarrollo y no sólo influye sobre unos u otros procesos del desarrollo, sino que reestructura, de la manera más esencial, todas las funciones de la conducta.

En particular, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Por supuesto no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los estudiantes de educación primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico. Esto demanda necesariamente ampliar la perspectiva sobre la naturaleza del álgebra escolar, que considere una relación dialéctica entre formas de pensamiento algebraico y maneras de resolver tareas sobre generalización de patrones, lo cual introduce un problema en términos de la constitución del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes (Vergel, 2015, 2016). Consideramos el pensamiento algebraico como un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado (Radford, 2013; Vergel, 2015), un modo de pensamiento que fue refinado sucesivamente a lo largo de siglos antes que alcanzara su forma actual.

La aparición o emergencia de formas de pensamiento algebraico en edades tempranas (Vergel, 2015) puede interpretarse en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. En una perspectiva multimodal de la cognición humana (Arzarello, 2006), aceptamos que los actos de conocimiento por parte de los estudiantes incluyen modalidades sensoriales tales como la táctil, la perceptual, la kinestésico, etc., que llegan a ser partes integrales (constitutivas) de los procesos cognitivos.

De esta manera, reconocemos un espacio para una zona conceptual donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aun cuando no estén recurriendo (o al menos no en gran medida) a los signos alfanuméricos del álgebra. Esta zona, que se ha denominado *zona de emergencia del pensamiento algebraico* (Radford, 2010), se ha mantenido en gran medida ignorada como resultado de nuestra obsesión por el solo reconocimiento de los símbolos algebraicos.

2. Una caracterización del pensamiento algebraico

Coincidimos con Radford (2010) cuando reconoce que los objetos matemáticos son objetos «generales», y la actividad matemática es esencialmente simbólica. Este investigador plantea, además, la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación dialéctica entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización.

Según Radford (2011, p. 318), "lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se tratan cantidades *indeterminadas* de una manera *analítica*". En otras palabras, se consideran cantidades indeterminadas (e.g., incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizamos cálculos con ellas como lo hacemos con números conocidos. Argumenta, a partir del trabajo de Viète (1591/1983) que en este tipo de pensamiento no hay diferenciación entre números conocidos y desconocidos. Esta es la razón por la cual Viète y otros matemáticos en el siglo XVI se refiere al álgebra como un arte analítico (Radford, 2010). Se infiere, entonces, que la diferencia entre la aritmética y el álgebra no puede darse en términos de notaciones, como a menudo se piensa. El simbolismo algebraico alfanumérico que conocemos hoy en día es de hecho una invención reciente. En este sentido, "el nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno" (Radford, 2012, p. 677).

Asumimos el *pensamiento algebraico* como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Es un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. De acuerdo con

Radford (2010), el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos (o vectores) estrechamente relacionados:

- El sentido de *indeterminancia* (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) aquello como opuesto a la determinancia numérica.
- La *analiticidad,* como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, como la manera específica de nombrar o referir los objetos.

En un trabajo posterior (Radford, 2011), este autor plantea que la indeterminación y el carácter analítico están ligados en un esquema o *regla* que permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia, cualquiera que sea su tamaño. Señala Radford que es una regla ejemplificada en casos particulares (p. e., 12 más 12, más 1), donde los números son tratados no como meros números sino como constituyentes de algo más general. Es más, el sentido de la indeterminancia, plantea Radford (2010), refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros. Por supuesto este proceso de desarrollar un sentido de lo indeterminado no se logra súbitamente. Es más bien un lento y laborioso proceso que está íntimamente ligado al tipo de tareas propuestas en la sala de clase y a la actividad en tanto labor conjunta entre estudiantes y entre estudiantes y profesor (Vergel, 2016).

Referencias bibliográficas

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking* (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267–299.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37–62.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. (pp. 303–322) Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea. July 8–15, 2012.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7– 44. doi: http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 39*(1), 65–76. http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RF

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193–215.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria: aspectos a considerar*. Prólogo de Carlos

Vasco e introducción de Luis Radford. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover. (Trabajo original publicado en 1591).
Vygotski, L. (1987). *Historia del desarrollo de las Funciones Psicológicas Superiores*. La Habana: Científico-Técnica.

Arte e pensiero geometrico nella Scuola dell'Infanzia

Paola Vighi
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Parma

Sunto. *Il lavoro presenta la descrizione e l'analisi di una attività realizzata alla Scuola dell'Infanzia con bambini di 5–6 anni. Il punto di partenza è un dipinto di Kandinsky e la sua riproduzione fatta dai bambini, seguendo particolari consegne assegnate dall'insegnante. L'attività coinvolge l'indagine di figure geometriche e delle loro reciproche posizioni, il concetto di spazio e soprattutto l'uso di trasformazioni geometriche. L'analisi dei risultati fornisce interessanti informazioni sull'approccio dei bambini alla conoscenza ed alla comprensione geometrica. In particolare, il lavoro analizza il ruolo della simmetria in un approccio dinamico e le difficoltà connesse con la sua pratica.*

Abstract. *The paper presents the description and the analysis of an activity realized in Kindergarten School with 5–6 years old children. The starting point is a painting of Wassily Kandinsky and its reproduction made by pupils, following particular tasks assigned by the teacher. The activity involves the investigation of geometrical figures and their mutual positions, the concept of space and especially the use of geometrical transformations. The analysis of the results furnishes interesting information about child's approach to geometrical knowledge and understanding. In particular, the paper analyses the role of the symmetry in a dynamic approach and the difficulties connected with its practice.*

1. Premessa

L'attività qui descritta ed analizzata costituisce la prosecuzione di un itinerario didattico sull'apprendimento di fondamentali concetti geometrici da parte di bambini della scuola dell'infanzia. Le finalità e le modalità dell'itinerario furono presentate ai Convegni di Castel San Pietro "Incontri con la Matematica" n° 18 e n° 22. In particolare, a partire da un libro intitolato "Il bruco Pelù", facendo riferimento alle diverse posizioni assunte dal bruco, si proponeva un'attività sui concetti di linea e di segmento (Vighi & Aschieri, 2004). Successivamente il bruco si trasformava in farfalla con ali di varie forme geometriche (Vighi, 2008) e (Vighi & Micheli, 2008a). L'intero itinerario fu illustrato mediante una mostra (Vighi & Micheli, 2008b).

2. Introduzione

Le interazioni tra matematica ed esperienza artistica offrono un interessante campo di esplorazione. Si tratta di un argomento di carattere interdisciplinare, in cui il pensiero matematico gioca un ruolo fondamentale. La cosiddetta "Educazione all'immagine" (Mazza, 2001) è presente nei programmi scolastici italiani, dal 1985. In particolare, nelle "Indicazioni Nazionali" (MPI, 2012, p. 20), possiamo leggere:

> I linguaggi a disposizione dei bambini, come la voce, il gesto, la drammatizzazione, i suoni, la musica, la manipolazione dei materiali, le esperienze grafico-pittoriche, i mass-media, vanno scoperti ed educati perché sviluppino nei piccoli il senso del bello, la conoscenza di se stessi, degli altri e della realtà.
> L'incontro dei bambini con l'arte è occasione per guardare con occhi diversi il mondo che li circonda. I materiali esplorati con i sensi, le tecniche sperimentate e condivise nell'atelier della scuola, le osservazioni di luoghi (piazze, giardini, paesaggi) e di opere (quadri, musei, architetture) aiuteranno a migliorare le capacità percettive, coltivare il piacere della fruizione, della produzione e dell'invenzione e ad avvicinare alla cultura e al patrimonio artistico.

Dunque l'attenzione è non solo sulla produzione di disegni, ma anche sulla loro fruizione: il guardare non è un'azione passiva, ma un'attività dinamica di osservazione e di selezione di forme, colori e configurazioni. Tuttavia, seguendo Arnheim (1987, p. 143): "Le immagini non si spiegano da sole. Le immagini non spiegano le cose che mostrano, né ci dicono come giudicarle".
È dunque necessario studiare e pianificare attività che consentano la loro osservazione e fruizione.
Il presente studio prende le mosse da un dipinto dell'artista Wassily Kandinsky (1866–1944), "l'indubbio creatore della pittura astratta" secondo D'Amore (2015), intitolato "Soft hard" (Figura 1), poiché, secondo l'autore, contrappone la dolcezza dello sfondo blu alla durezza delle figure geometriche.
Lo si è ritenuto particolarmente opportuno per l'indagine matematica, poiché, a partire da specifiche scelte artistiche ed estetiche, organizza lo spazio della tela mediante figure geometriche, in gran parte figure familiari per i bambini della Scuola dell'Infanzia, come triangoli, cerchi e quadrati.

Figura 1. "Soft-Hard" (Kandinsky, 1927).

3. Quadro teorico

Le esperienze spaziali sono il primo passo verso la geometria. La teoria di van Hiele (1986) identifica il primo livello della conoscenza spaziale nel "livello visuale", in cui i concetti si sviluppano a partire dall'osservazione della realtà: prima i bambini apprendono a riconoscere le forme, poi ad analizzarne le proprietà. Osservano oggetti e sono capaci di rappresentarli come "immagini mentali" che, secondo Proclo (V sec.), sono ad un livello intermedio tra le idee astratte ed il mondo degli oggetti percepibili. La geometria delle trasformazioni consente di distinguere due tipi di immagini mentali, uno "statico" ed uno "dinamico"; nel secondo caso le figure sono viste mentalmente in movimento (Jagoda, 2011).

Gli studi di psicologia evidenziano che la percezione gioca un ruolo fondamentale nella visualizzazione:

> In conclusione le abilità spaziali sono alla base, o meglio concorrono, alla formazione dei concetti. Per la specificità dei contenuti geometrici, tramite la percezione si organizza il pensiero visuale come punto di partenza dell'intuizione e della riflessione, attività mentali che collaborano alla formazione dei concetti. (Marchini et al., 2009, pp. 62–63)

La percezione è un processo di selezione e di organizzazione, attività cognitive connesse con la conoscenza e la comprensione. Tuttavia la percezione può ostacolare il modo di vedere le figure geometriche. Secondo Duval (2005), questo modo dipende dall'attività in cui la percezione è coinvolta: ci sono due modi di vedere le figure, "iconico" e "non iconico". Il secondo è una sequenza di operazioni di identificazione di proprietà geometriche.

I disegni astratti, con le loro caratteristiche di forme, colori e composizione possono promuovere un modo di vedere il mondo attraverso occhi matematici. Con riferimento alla lettura di dipinti ed immagini, da parte di bambini di 4–8 anni, Mazza (2001, p. 58) scrive:

> Il soggetto o il colore sembrano i parametri che determinano le preferenze dei bambini di questa età. Anche di fronte ad opere astratte si nota il "bisogno referenziale" di individuare una somiglianza, di scoprire quale oggetto "si nasconda" dietro la stranezza apparente.

La tendenza è dunque quella di vedere un'immagine come un tutto, senza osservare i particolari. Secondo Duval e Godin (2005) il passaggio da una percezione globale di una figura/disegno ad una percezione più analitica non è 'automatico', ma va promosso mediante opportune attività.
Un importante concetto coinvolto in un dipinto, dalla sua pianificazione sino alla sua realizzazione, è il 'concetto di spazio'. Usualmente, lo spazio maneggiato in un dipinto è il "microspazio" (Berthelot et al., 1992), cioè uno spazio che è gestibile con le mani e con gli occhi (per esempio, lo spazio di un foglio di carta). Talvolta esso è un "mesospazio" (ibidem), gestibile solo con gli occhi (per esempio, quello di una stanza). Prima di disegnare, la tela è uno spazio vuoto, che deve essere organizzato collocando gli oggetti (spazio indipendente). In altre situazioni geometriche, sono le figure che creano lo spazio:

> Spazio non indipendente significa che noi pensiamo essenzialmente, o primariamente, agli oggetti (o alle figure); lo spazio è solo la coesistenza di questi(e). Qualcuno parla anche di concezione relazionale. Spazio indipendente significa invece che noi pensiamo prima allo spazio e poi in questo collochiamo gli oggetti (le figure). (Speranza, 1997, p. 130)

Solitamente un bambino concepisce lo spazio come 'non indipendente', detto anche "spazio relazionale" poiché l'attenzione è sulle figure e sulle loro reciproche relazioni. Un'altra possibile dicotomia è tra spazio "isotropo" o "non isotropo": nel primo caso non c'è distinzione tra le direzioni, mentre nel secondo alcune di esse sono privilegiate. Per Kandinsky lo spazio è 'non isotropo': egli distingue due principali direzioni, 'orizzontale' che associa al 'freddo' e 'verticale' che associa al 'caldo'. Una terza importante dicotomia è tra 'spazio limitato', per esempio il "cielo delle stelle fisse" di Aristotele, al di là del quale non c'è spazio o 'spazio illimitato' come quello della geometria euclidea (che è potenzialmente illimitato). Per un pittore lo spazio è limitato dalla tela e dai suoi bordi, ma un bambino non ancora scolarizzato talvolta opera uscendo dal foglio, talaltra no (Marchini et al., 2009).
Nell'insegnamento/apprendimento della geometria, la geometria delle trasformazioni gioca un ruolo importante, poiché offre l'opportunità di lavorare in modo dinamico con le figure. Alla scuola dell'infanzia, gli insegnanti propongono manipolazioni di "forme" con lo scopo di promuovere la loro conoscenza. I movimenti di forme come cambiamenti di posizione, rotazioni, traslazioni, ribaltamenti possono preparare al concetto di isometria. La ricerca documenta (Bulf et al., 2013) e (Bulf et al., 2014a e 2014b) che preconcezioni sulle isometrie possono essere presenti a partire dal primo anno di scuola primaria e che le 'isometrie dirette' sono utilizzate più di quelle

‘inverse’. Dunque può essere interessante estendere questo campo di ricerca alla scuola dell’infanzia.
Le domande di ricerca che mi sono posta sono le seguenti:

- I bambini di 5–6 anni possono avere preconcezioni sulle trasformazioni geometriche? Le usano durante la riproduzione del disegno e, se sì, come?
- Quale concezione di spazio emerge dalle produzioni dei bambini?

4. Metodologia

La ricerca è stata realizzata nelle Scuole dell’Infanzia Statali “Lodesana” e “Magnani” di Fidenza (PR).[1] Ha coinvolto bambini di 5–6 anni, che hanno lavorato sia in gruppo che individualmente. Tutte le attività sono state videoregistrate.
Come già detto, l’idea principale è stata quella di utilizzare un’opera di arte astratta (Figura 1), per verificare la presenza o l’acquisizione di alcuni concetti da parte dei bambini. In particolare, in classe l’attività è iniziata in forma ludica, si è mostrata una copia del quadro e si è raccontato che il bruco Pelù “è uscito dal libro e si è nascosto nel quadro”. I bambini dovevano scoprire dove si trovasse Pelù. Questo ha stimolato la motivazione che, come ben noto e come evidenziato da Hejny (2004) nella sua ‘teoria del modello universale’, è una prima, fondamentale tappa dell’apprendimento. Successivamente si è chiesto di associare le ali dipinte nel quadro alle rispettive farfalle. Questa fase iniziale ha lo scopo di sollecitare la curiosità e la lettura dell’immagine, di far osservare il dipinto nei particolari, in quanto, come già detto, i bambini di questa età tendono a vedere un dipinto globalmente, come un tutt’uno. Per sollecitare osservazioni di carattere qualitativo si sono poste alcune domande come: “Vi piace questo quadro? Perché? Che cosa vedete? Che cosa rappresenta?”. In un secondo tempo ad ogni bambino sono stati consegnati un foglio di formato A4 ed una copia di ciascuna figura, che d’ora in poi chiameremo ‘sagoma’. Infine si è proposto un lavoro individuale basato sulla riproduzione del dipinto, che era proiettato su di una parete dell’aula.

5. Analisi a priori

Questo lavoro è sicuramente impegnativo e difficile, poiché le figure da manipolare sono numerose, occorre osservarne la disposizione, le reciproche posizioni, la possibile sovrapposizione. Il bambino deve di volta in volta guardare, scegliere una figura e manipolarla con lo scopo di darle la ‘corretta orientazione’, disponendola in modo opportuno rispetto alle altre sul foglio di carta. Questa attività coinvolge i concetti topologici di “dentro/fuori”, ma anche quelli di “destra/sinistra”, “sopra/sotto” o “davanti/dietro” che sono

[1] Si ringrazia l’insegnante Palma Rosa Micheli per la collaborazione ed i preziosi suggerimenti.

esplicitamente citati nelle Indicazioni Nazionali (MPI, 2012), nonché trasformazioni geometriche quali isometrie e similitudini.
Nel dipinto scelto (Figura 2) ci sono parecchie figure geometriche, esattamente venti: un quadrato (n° 6), due rettangoli (n° 1, n° 15), un terzo rettangolo può essere visto sulla destra, è ottenuto attaccando due triangoli (n° 13, n° 14), due cerchi (n° 3, n° 4), dodici triangoli (n° 2, n° 5, n° 7, n° 8, n° 9, n° 12, n° 13, n° 14, n° 16, n° 17, n° 18, n° 19), 3 "lune" ('luna' o 'baffo' sono le parole suggerite dai bambini) (n° 10, n° 11, n° 20). La "luna" è tipica dei dipinti di Kandinsky, che la chiama "accentuazione di una linea". Il quadrato (n° 6) è posto in un modo particolare; ha due lati all'incirca paralleli all'ipotenusa del 'grande triangolo rosso' (n° 12). Nel dipinto è il solo poligono con lati non paralleli ai bordi dello sfondo rettangolare. Al contrario, tutti i rettangoli hanno lati 'orizzontali' e 'verticali' rispetto allo sfondo. Ci sono tre triangoli equilateri (n° 2, n° 7, n° 18), quattro triangoli isosceli (n° 5, n° 8, n° 9, n° 19) e sei triangoli rettangoli (n° 12, n° 13, n° 14, n° 16, n° 17, n° 19). Le direzioni orizzontale e verticale permeano il quadro, dunque lo spazio è 'non isotropo'. È inoltre 'limitato' dai bordi del foglio di carta.
Si possono osservare tre composizioni simmetriche di forme: sulla sinistra l'asse di simmetria è la linea retta che contiene gli assi verticali dei triangoli n° 2 and n° 5; i tre triangoli n° 7, n° 8 e n° 9 sono disposti come un 'albero simmetrico'; in basso a destra, una 'luna' (n°20) è sovrapposta ad un triangolo isoscele (n° 19) 'in modo simmetrico'.

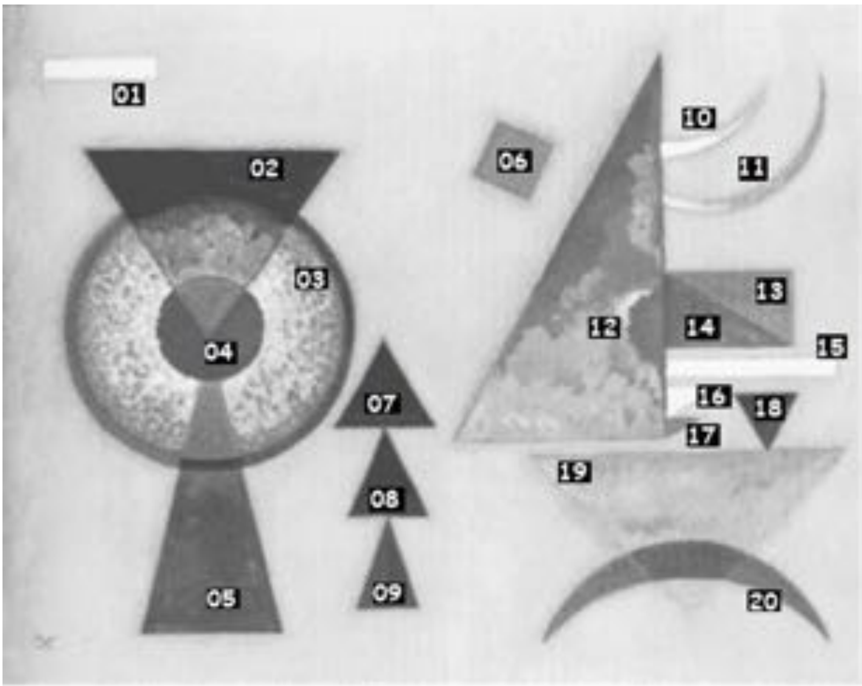


Figura 2. Organizzazione numerica del dipinto.

Tra le figure presenti nella tela, ce ne sono alcune con forme ben note, ma anche altre con forme non usuali. Di solito le 'forme' manipolate alla scuola dell'infanzia sono quadrati, cerchi, triangoli equilateri, che hanno assi di simmetria e, di conseguenza, sono 'reversibili' (Bulf et al., 2014a, 2014b): anche se le capovolgiamo, si presentano 'allo stesso modo'. Osserviamo che un triangolo equilatero, avendo tre assi di simmetria, può essere manipolato meglio di un triangolo isoscele (che ha un solo asse di simmetria) o di un triangolo rettangolo (senza simmetrie): l'equilatero può essere posto sul foglio di carta senza particolari attenzioni, per disporre poi un isoscele è sufficiente ruotarlo, mentre talvolta un triangolo rettangolo deve anche essere capovolto se vogliamo posizionarlo correttamente. Nel quadro scelto (Figura 1), la presenza di figure senza assi di simmetria potrebbe creare difficoltà nell'esecuzione del compito, proprio a causa della loro non reversibilità.

6. Risultati

La sperimentazione mostra che la maggior parte dei bambini è in grado di osservare e di esplorare il dipinto proiettato nel "mesospazio" dell'aula ed è in grado di riprodurlo nel "microspazio" del foglio di carta, disponendo opportunamente le forme, anche se talvolta la loro composizione finale risulta molto diversa rispetto all'originale. Alcuni bambini preferiscono disattendere la consegna 'creando' un proprio personale quadro, altri ancora rispettano l'originale solo 'a grandi linee'. Per alcuni allievi il compito risulta al di sopra delle capacità attentive e di manipolazione, ma la maggior parte produce copie più che accettabili, anche se con diverse 'imprecisioni'.
Il metodo di lavoro influisce sul risultato: in alcuni casi il bambino definisce 'difficile' il compito e lo esegue velocemente; in altri la copia è frutto di un'attività più lenta, ponderata, che si svolge per tentativi ed errori (Figura 3).

Figura 3. Alcuni protocolli.

Di solito la composizione inizia da sinistra, vengono posizionate prima le figure 'grandi' e in un secondo tempo le più piccole. Sicuramente i colori e le dimensioni (piccolo, medio o grande) delle figure aiutano nella scelta dei pezzi

durante il lavoro. Spesso la forma della figura, il suo colore o il suo ‘nome’ guidano l’attività, senza che vi sia il rispetto delle dimensioni o dell’orientazione delle sagome.
Talvolta un’immagine mentale, per esempio di una barca a vela, influenza la costruzione, come scritto da Mazza (2001).
La manipolazione dei triangoli richiede una particolare menzione. Come la ricerca evidenzia (Piaget & Inhelder, 1947), la principale attenzione nei confronti di questo tipo di figura geometrica è rivolta alle ‘punte’ (vertici) dei triangoli. Di conseguenza, la collocazione delle sagome sul foglio è basata sull’orientazione delle ‘punte’ piuttosto che sulla corretta orientazione del triangolo. Succede così, per esempio, che un triangolo isoscele (n°8 o n°9) venga ‘appoggiato’ su di un lato piuttosto che sulla base. Questo conferma precedenti ricerche sul concetto di triangolo (Vighi, 2003).
Ho osservato particolari difficoltà nella manipolazione di ‘forme inusuali’ e ‘prive di assi di simmetria’ come i triangoli rettangoli n°12, n°13 e n°14. In particolare, per quanto riguarda il triangolo n° 12, si nota la tendenza a posarlo sul foglio così come si presenta nelle mani. Se la ‘faccia’ è quella opposta rispetto all’originale (Figura 3, a sinistra), il bambino orienta la sagoma in modo da avvicinarsi il più possibile all’immagine che vede nel dipinto, ma non pensa di capovolgerla. Sono davvero pochi i bambini che ricorrono ad un ribaltamento, magari dopo aver operato inutilmente con traslazioni e rotazioni.
Dal punto di vista matematico, questo comportamento evidenzia un’importante proprietà: non è possibile trasformare una figura piana in una simmetrica restando nel piano, ma ‘bisogna uscire dal foglio’, poiché una riflessione è una trasformazione inversa. Il ruolo della manipolazione (Chamorro, 2001, 2002) risulta fondamentale in questo senso: mentre l’osservazione del quadro ci fornisce un’immagine statica, la necessità di riprodurlo promuove la possibilità di creare immagini dinamiche.
Il mancato ricorso al ribaltamento è anche la causa principale dell’errato posizionamento dei triangoli n° 13 e n°14. In alcuni casi si nota che l’attenzione è limitata alla collocazione delle due sagome una vicino all’altra, senza un controllo della configurazione globale che esse creano.

7. Conclusioni

L’analisi dei film e dei prodotti finali documenta che l’attività proposta è gradita dai bambini, anche se richiede un notevole lavoro di osservazione e di manipolazione, così come attenzione e concentrazione. Ho osservato diversi modi di affrontare il compito: o il bambino prende in mano una ‘sagoma’ e osservando il quadro decide dove collocarla, oppure osserva prima il quadro e poi agisce; nel secondo caso, occhi e mente hanno la precedenza e il successo nell’attività aumenta.
I bambini lavorano localmente, trascurando la costruzione globale: la loro attenzione è solo su coppie o piccoli gruppi di figure. L’attenzione è

soprattutto alla disposizione delle forme in posizione 'object-to-object' (Swoboda, 2011), cioè una vicino all'altra. Questo comportamento implica che il 'dipinto finale' possa essere molto diverso dall'originale, ma questo aspetto è spesso trascurato dal bambino: quando il lavoro finisce, termina anche la sua attenzione. Questo conferma quanto scritto da Mazza (2001, p. 70), relativamente a bambini dell'età considerata: "Per essi l'arte è un operare, un fare, tout court".

Per quanto riguarda la presenza di preconcezioni sulle trasformazioni geometriche, è necessaria una spiegazione preliminare. Alcuni bambini scelgono una figura osservando solo la sua forma ed il suo colore, senza porre attenzione a posizionarla in modo opportuno (ovviamente questo provoca problemi nella loro ricostruzione del quadro); dunque essi sembrano lontani dal concetto di trasformazione. Tuttavia la maggior parte comprende che le figure devono avere un'opportuna orientazione. Per ottenerla essi usano soprattutto traslazioni e rotazioni, mentre la padronanza del movimento che realizza una riflessione appare meno abituale e naturale. In effetti, la ricerca documenta che, tra le isometrie, la simmetria è un argomento molto complesso (Marchini et al., 2011). Swoboda (2011) evidenzia che i bambini di 4–6 anni, quando si chiede loro di ricostruire la regolarità di un pattern, cercano di ruotare una 'mattonella simmetrica' piuttosto che capovolgerla. Si potrebbe obiettare che il concetto di simmetria è troppo complesso in rapporto all'età dei discenti, ma van Hiele (1986) evidenzia l'importanza di lavorare su di un concetto ad ogni livello. In altre parole, gli allievi non possono fornire prestazioni adeguate ad un livello senza aver avuto esperienze che consentano di ragionare sull'argomento, anche intuitivamente, nei livelli precedenti. Queste considerazioni forniscono ana possibile spiegazione dei risultati poco soddisfacenti relativi ai quesiti sulla simmetria contenuti nelle prove INVALSI.

L'analisi dei protocolli mostra diversi concetti di spazio. Alcuni bambini realizzano il loro 'dipinto' ignorando il foglio di carta sottostante che costituisce lo sfondo (spazio non indipendente) e, di conseguenza, alcune sagome vanno parzialmente fuori dal confine. Tuttavia la maggior parte cerca di rimanere all'interno del foglio, mostrando così un concetto di 'spazio limitato'. I lati del foglio di carta costituiscono un riferimento per ottenere direzioni 'orizzontali' o 'verticali' in cui porre le sagome. Dunque i bambini concepiscono lo spazio come 'non isotropo'.

Questo lavoro documenta come l'osservazione di un dipinto diventi indagine, quando le attività proposte stimolano in questo senso. In conclusione,

> Kandinsky ci ricorda, con il potere della sua arte, che gli elementi geometrici, quando sono rappresentati graficamente, sono pieni di significato e di comprensione, e psicologicamente non neutrali. (Bolondi, 2010)

Bibliografia

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241.

Arnheim, R. (1987). *Intuizione e intelletto*. Milano: Feltrinelli.

Aschieri, I., & Vighi, P. (2004). Lo spazio dell'esperienza: attività concrete. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.)*, La Didattica della Matematica: una scienza per la scuola* (108–109). Bologna: Pitagora.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse, Université Bordeaux I.

Bolondi, G. (2010). Point, Line and Surface, following Hilbert and Kandinsky. In V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts* (pp. 477–484). Springer.

Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2013). Le triangle-acrobate: un jeu géométrique sur les isometries en CE1. Intérêts et limites. *Grand N*, *91*, 43–70.

Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2014a). Analisi di un gioco sulle isometrie nella scuola primaria: il triangolo-acrobata. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *37A*(1), 7–33.

Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2014b). Preconcetti sulle isometrie nella scuola primaria. Un case-study condotto in Francia e in Italia, *L'Insegnamento* della *Matematica e delle Scienze Integrate*, *37A*(2), 107–132.

Chamorro, M. C. (2001). Le difficoltà nell'insegnamento-apprendimento delle grandezze nella scuola di base (Parte prima). *La Matematica e la sua Didattica*, 4, 332–351.

Chamorro, M. C. (2002). Le difficoltà nell'insegnamento-apprendimento delle grandezze nella scuola di base (Parte seconda). *La Matematica e la sua Didattica*, 1, 58–77.

D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica*. *Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Prefazione di Claudio Cerritelli. Bari: Dedalo.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131.

Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, *76*, 7–27.

Guy, F., Shaw-Miller, S., & Tucker, M. (2007). *Eye-music: Kandinsky, Klee and all that jazz*. Chichester: Pallant House Gallery.

Hejny, M. (2004). Understanding and structure, *Proceedings CERME3*, Thematic Group 3, 1–9.

Jagoda, E. (2011). Symmetry in a static and dynamic environment. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings SEMT '11*. Praga: Charles University.

Kandinskij, W. (1968). *Punto, linea, superficie*. Milano: Adelphi.

Marchini, C., & Vighi, P. (2009). Can we develop geometrical under standing by focusing on isometries? A teaching experiment by the means of geometrical artefacts. *Proceedings SEMT '09*, Prague, 169–176.

Marchini, C., & Vighi, P. (2011) Innovative early teaching of isometries, In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings CERME7* (pp. 547–557). University of Rzeszów (Poland).

Marchini, C., Swoboda, E., & Vighi, P. (2009). Indagine sulle prime intuizioni geometriche mediante "mosaici". Un esperimento nella scuola italiana. *La Matematica e la sua Didattica*, *23*, 61–88.

Mazza, E. (2001). *Incontrare l'immagine*. Roma: Anicia srl.

MPI (Ministero della Pubblica Istruzione) (2012). *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Roma.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1947). *La répresentation de l'éspace chez l'enfant*. Paris: PUF.

Speranza, F. (1997). Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio. *Scritti di Epistemologia della Matematica* (pp. 129–140). Bologna: Pitagora.

Speranza, F., & Vighi, P. (2002). Alcune idee a proposito di Spazio e Tempo. In B. Piochi & A. Contardi (Eds.), *Le difficoltà nell'apprendimento della matematica. Metodologia e pratica di insegnamento* (pp. 135–146). Trento: Erickson.

Swoboda, E. (2011). Axis symmetry as an epistemological obstacle. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *The mathematical knowledge needed for teaching in elementary schools. Proceedings SEMT '11* (pp. 320–328). Prague: Charles University.

Van Hiele, P. (1986). *Structures and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

Vighi, P. (2003). The triangle as a mathematical object. In Mariotti M. A. (Ed.), *Proceedings CERME 3*, Bellaria (Italy).

Vighi, P. (2008). Dall'osservazione alla formazione dei concetti: guarda … gioca, guarda … impara. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della Matematica e Azioni d'Aula* (pp. 89–96). Bologna: Pitagora.

Vighi, P. (2016). From abstract art to geometrical understanding. Invited Lecture, *Icme 13*, Hamburg.

Vighi, P. (in print). Abstract paintings, object and actions: how promote geometrical understanding, *Proceedings "Mathematical Transgression II"*, Cracovia.

Vighi, P., & Aschieri, I. (2004). Dallo spazio dell'esperienza all'organizzazione spaziale. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La Didattica della Matematica: una scienza per la scuola* (pp. 93–100). Bologna: Pitagora.

Vighi, P., & Micheli, P. R. (2008a). Guarda … gioca, guarda … impara. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della Matematica e Azioni d'Aula* (pp. 118–121). Bologna: Pitagora.

Vighi, P., & Micheli, P. R. (2008b). Dal bruco alla farfalla e oltre … Un percorso matematico-artistico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della Matematica e Azioni d'Aula* (pp. 264–265). Bologna: Pitagora.

Peirce's *Summum Bonum* applied to Grothendieck's Creativity. A Short Walk between Art and Mathematics

Fernando Zalamea
Universidad Nacional de Colombia

In tribute to Bruno D'Amore, and in admiration for his long educational journey through mathematics and art

Abstract. *In a first section, we present Peirce's triadic classification of the sciences, and situate Peirce's summum bonum at the heart of esthetics and the foundations of logic. In a second section, we show how Peirce's summum bonum can be used to understand better Grothendieck's bourgeoning mathematical creativity.*

1. The *summum bonum* inside Peirce's triadic classification of the sciences

When faced with contemporary art and mathematics we cannot escape a certain *transitory ontology* (Badiou, 1998), that, at first, terminologically speaking, seems self-contradictory. Nevertheless, though the Greek *ontotetês* sends us, through Latin translations, to a supposedly non temporal "entity" or to an "essence" that ontology would study, there is no reason (besides tradition) to believe that those entities or essences should be absolute and not *asymptotic, governed by partial gluings in a correlative evolution* between the world and knowledge. *Bimodality*, in the sense of Petitot (2009), that is, dynamic movement both in physical and morphological-structural space, is related to such a state of things, where "things" have in fact to be replaced by "processes" (functors, natural transformations and adjunctions in mathematical category-theoretic settings, see *Section 2*). Both prefixes (*trans/, bi/*) offer a suitable ground to understand the wanderings of contemporary art and mathematics.

One century before, around 1886, Peirce had already imagined a wonderful phenomenological tool which helps to unravel the *multilayered geometry* of the (trans/, bi/) situation. Phaneroscopy, or the study of the *phaneron*, that is the complete collective spectrum present to the mind, includes the doctrine of Peirce's cenopythagorean categories, which observe the universal modes (or "tints") occurring in phenomena. Peirce's three categories are vague, general and indeterminate, and can be found *simultaneously* in every phenomenon (for studies on Peirce's phenomenology, *cfr.* Rosensohn, 1974; Esposito, 1980; Leo, 1986; or De Tienne, 1996). The categories are interlaced in several levels, but can be *prescised* (distinguished, separated, detached) following recursive layers of interpretations, in progressively more and more determined contexts. A dialectics between the One and the Many, the universal and the particular, the general and the concrete, is *multilayered* along a dense variety of theoretical and experimental fibers.

Peirce's *Firstness* detects the immediate, the spontaneous, whatever is independent of any conception or reference to something else. *Secondness* is the category of facts, mutual oppositions, existence, actuality, material fight, action and reaction in a given world (two uses of the term "category" should not be confused in this short article: "category" alone will refer to a philosophical category, following Aristotle; "category-theoretic", "category theory", or "mathematical category" will refer to its technical mathematical sense, see *Section 2*). *Thirdness* proposes a mediation beyond clashes, a third place where the "one" and the "other" enter a dialogue, the category of sense, representation, synthesis. Peirce's vague categories can be "tinctured" with key-words: (1) *Firstness*: immediacy, first impression, freshness, sensation, unary predicate, monad, chance, possibility; (2) *Secondness*: action-reaction, effect, resistance, binary relation, dyad, fact, actuality; (3) *Thirdness*: mediation, order, law, continuity, knowledge, ternary relation, triad, generality, necessity. The three Peircean categories interweave recursively and produce a *nested hierarchy* of interpretative modulations (Zalamea, 2012). A series of *modes and tones* enter the analysis, and, when applied to the dialectics between art and mathematics, the series helps to explain their deep complexity.

In Peirce's triadic classification of the *sciences* (Kent, 1987), Mathematics are situated in the first branch (1), along the realm of possibilities. Esthetics appears inside Philosophy (2), and, between the Normative Sciences (2.2), it comes as a *first*. Esthetics (laying on the *site* 2.2.1) studies impressions and sensations (firstness) produced by phenomena, consistently with an adequate "general ideal" (*summum bonum*). The "general ideal" (situated at level 2.2.1.3) depends strongly on the *continuum*. Art as such does not enter into the space of "sciences", but it emerges as a web of *material creativity forms*, which lie on the *sites* 3.2.2 or 3.2.3 (material mediations, in order to force sense – classic art – , or action – contemporary art). As a consequence, following Peirce's classification of knowledge, mathematics and art constitute a forceful polarity (1 *versus* 3.2.3). *Duality* is clearly expressed thanks to the *minimum* (1) and *maximum* (3.2.3) numerical indexes of the classification. On another hand, the iteration of mathematics towards art (1→3.2.3), and its inverse deiteration (1←3.2.3), show that a *continuous mediating field* is stretched between the polarities of art and mathematics. In particular, Logic (2.2.3) studies the mediating structures of reason (thirdness), coherently with the *summum bonum*.

In 1905, Peirce described the *summum bonum* as a "process of evolution whereby the existent comes more and more to embody generals" (Peirce 1931–1958, 5.433). We can thus understand the *summum bonum* as a sort of *reasonable continuous growing of potentiality/generality.* Accordingly, we enter into a plastic, continuum space, where the realm of possibilities grows (for a detailed study of the *summum bonum*, *cfr.* Barrena, 2015). The *dynamic* character of *summum bonum* is here essential: its evolutionary, not fixed ideal is related to the widening of interpretations in esthetics (Thuillier, 2003), and to the enlargement of consistency realms in logic (Poizat, 2000). Imagination helps to extend our reason, and, in fact, lies at its very foundations. The *summum bonum* (2.2.1.3) provides a sound guide for logic (2.2.3), thanks to its flexible, elastic character, which allows reason and language (*i.e.* "analytical philosophies") to escape from their connatural rigidity. Going *back-and-forth* from firstness to thirdness, inside the normative sciences, allows a giant qualitative leap in the understanding of the complex, dynamic, evolving webs of the World.

The conceptual and practical *back-and-forth* between diverse layers is governed by the *pragmatic(ist) maxim*, which encodes naturally Peirce's categories. The maxim asserts that we can only attain knowledge after conceiving a wide range of representation possibilities for signs (firstness), after perusing active-reactive contrasts between sub-determinations of those signs (secondness), and after weaving recursive information between the observed semiotic processes (thirdness). The maxim acts as a *sheaf* with a double support function for the categories: a contrasting function (secondness) to obtain *local* distinctive hierarchies, and a mediating function (thirdness) to *globally* unify the different perspectives. In fact, a broad, conceptual *differential* and *integral* calculus seems in act. Peirce imagined a universal lattice of forms to *reintegrate* the Many into the One, the local into the global, the particular into the universal, the concrete into the abstract. It is a strategy which anticipated some basic goals of *mathematical* category theory, where apparently different descriptions of objects in diverse *concrete* mathematical categories (combinatory, logical, topological, algebraic, etc.) are reintegrated through their universal behavior in *abstract* mathematical categories (spaces of definition governed by the existence-and-uniqueness quantifier $\exists!$). Art, the second major pole of human thought according to Francastel – "L'art et les mathématiques sont les deux pôles de toute pensée logique, les modes de pensée majeurs de l'humanité" (Francastel 1965, 21) – *inverts* the strategy, and *differentiates* global canvases. Material existence is reified, hoping that concrete residues will reflect abstract totalities.

2. Grothendieck's mathematical creativity in the light of the *summum bonum*

Alexander (=Alexandre) Grothendieck (Berlin 1928–Saint-Girons 2014) must be considered, without doubt, as the major mathematical genius of the last sixty years, and, next to David Hilbert, as one of the two fundamental mathematicians of the last century. With a published work of near *ten* *thousand* pages (covering geometry, topology, number theory, complex variables, to only quote the *heart* of mathematics), with more than *one thousand* new definitions (when an ordinary mathematician may be happy if she has introduced *one* new definition in the field), with complete revolutionary understandings of the notions on *number* ("schemes"), *space* ("topos") and *form* ("motives"), Grothendieck has opened all type of new roads for the development of mathematics in the following centuries.

Nevertheless, Grothendieck's work is almost completely unknown outside a small group of specialists. In contraposition with Einstein, whose ideas (simplified or deformed) have attained the public domain, Grothendieck still lies in the shadow, even if his conceptual revolution goes much farther. In fact, if Einstein studies the relativization of *space-time* and discovers its local invariants, Grothendieck studies the relativization of *space-number* and discovers its *global universal* invariants. Around his recent death, a sudden interest has arisen for a life worth of fiction (partial biographies: Bringuier, 2015; Pradeau, 2016; Douroux, 2016; and an inspiring novel: Fonseca, 2015), but time is still needed to fully appreciate the magnitude of his mathematical work.

Grothendieck's inexhaustible universe may be divided (wrongly, as in any compartmentalization) in *four main periods*. *(I).* From 1949 to 1957, along certain geographical *margins* (Nancy, Sao Paulo, Kansas), he produces fundamental contributions in topological vector spaces, homology, category theory, complex variables, obtaining profound theorems (Grothendieck, 1955, 1956, 1957a, 1957b), and leaving rich seeds to be developed in the following decades. *(II).* Between 1958 and 1970, in the very *center* of mathematics (Paris), Grothendieck advances his research at the IHES (*Institut des Hautes Études Scientifiques*), specially constructed to shelter him. After a scintillating, condensed, vision of his future programs (Grothendieck, 1958), he writes with the formidable Dieudonné the *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA) (appearance of *schemes*) (Grothendieck & Dieudonné, 1960–66), and he directs his famous *Séminaire de Géométrie Algébrique* (SGA) (appearance of *toposes*) (Grothendieck, 1960–69). An archetypical vision of form, a common root for all (co)homologies (appearance of *motives*) (Grothendieck, c. 1967), emerges also in the IHES years. The finer mathematical grain of the epoch goes through the Institute, where innovation becomes a trademark: a nice anecdote tells that, as a storm-head visitor complained about the meager IHES library, Grothendieck replied – "here we do not read mathematics, here we make them".

(III). After leaving the IHES in 1970 (political radicalization, intemperance, disappointment with his entourage), Grothendieck founds a radical ecologist movement *Survivre et vivre* ("survival" first, "survival and life" afterwards), to which he offers the best of his indomitable energy. He goes away from the mathematical community, returns to the *margins* (Université de Montpellier,

where he had done his undergraduate studies, 1945–1948), and hides happily in the French province. Between 1981 and 1991, a passion for mathematics surges again, along extraordinary manuscripts (Grothendieck, 1981, 1983, 1984, 1991) (moduli spaces of Riemann surfaces, fundamental groupoids, anabelian geometry, tame topology, *dessins d'enfants*, derivators, etc.) On another hand, he writes an intense (and extensive) mathematical reflection *Récoltes et semailles* (Grothendieck, 1986), where he attacks forcefully a mathematical community that (in his view) had betrayed him, but, above all, where he elaborates the major treatise ever conceived about *mathematical creativity*. *(IV).* In 1991 Grothendieck disappears, and secludes completely himself in the Pyrenees (the last *margin*). Nevertheless, between 1991 and 2014, he continues steadily to write, and finally leaves *fifty thousand* manuscript pages to the *Bibliothèque Nationale de France* (a legacy now disputed by his family). A report by Georges Maltsiniotis (March 2016) describes the existence of ten thousand mathematical pages, and some thirty thousand pages on a *Treatise on Evil*. The sheer monumentality of Grothendieck's enterprises surpasses our usual canons, and one or two decades will be needed to have a reasonable account of this last legacy.

The interest of modern (1830–1950) and contemporary (1950-today) mathematics, where Grothendieck lays, consists, not so in the partial modelings that they may offer, but rather in its *help to deploy imagination*. A hundred years before Grothendieck, Riemann surfaces had stimulated visual and conceptual inventiveness (Riemann, 1851). Full of *plasticity*, the very *handling* of Riemann surfaces allows transits and possibilities, that rigid, classical, non-plastic geometries prevent. On another hand, Riemann had observed the importance of *analytic continuity* for the development of functions of a complex variable (holomorphic and meromorphic functions). A hundred years later, *sheaves* were invented by Leray (at a concentration camp, 1942, at the same time that the young Grothendieck was interned with his mother in another camp), and were further developed in Cartan's seminar at the *École normale supérieure* (where Grothendieck landed after his undergraduate career). A sheaf is the *simplest* mathematical object (just two topological spaces related by a projection with a good local behavior), which can be oriented towards a precise study of *local/global* processes. In the language of sheaves, Riemann's analytic continuity is expressed by the structural fact that the sheaf of germs of holomorphic functions is *separated*. Thus, a sophisticated dialectics – elasticity/rigidity, continuity/separation – enters into play.

In a similar vein, *Grothendieck toposes* (categories equivalent to categories of sheaves over abstract topologies, 1962) constitute *plastic sites*, specifically open to dynamic variations. Grothendieck toposes unify deep insights on arithmetic (number) and geometry (space) (Grothendieck, 1960–1969). Beyond Cantorian, classical, static sets, the objects in a topos are to be understood as generalizations of *variable sets*. Instead of living over a rigid bottom, governed by classical logic, they live over a dynamic Kripke model, governed by *intuitionistic* logic. Beyond the classical example of the separated sheaf of holomorphic functions, a sheaf does *not* have to be separated in a general topos: *points do not have to determine their associated objects*. We can even imagine objects without points, defined only through *flux processes*. A wonderful example is the topos of *actions* of monoids. Such a topos has an underlying classical logic (where the law of excluded middle holds and points are essential) if and only if the monoid is a group. Thus, when we deal with structures which are *monoid non-groups*, the logic of their action is just *intuitionistic*, *non-separated*, closer to topological fluxions, deformations, disruptions.

Peirce's *summum bonum (=reasonable continuous growing of potentiality/generality)* may be used to understand better Grothendieck's bourgeoning creativity. Indeed, if we look at some of the main axes of Grothendieck's mathematical imagination – duality between the concrete and the abstract (structural objects and axiomatic theories), dialectics between the Many and the One (representation theorems and category-theoretic embeddings), transits between mathematical regions and *strata* (functors and *n*-categories), unveiling of archetypes (schemes, topos, motives) projected onto a diversity of types (numbers, spaces, forms) – *all the terms* that describe Peirce's *summum bonum* may be perfectly applied to Grothendieck's strategies. "Reasonableness" points to an *extended reason* where both reason and sensibility come into play (see many central references to a sensible "heart" in: Grothendieck, 1986). "Continuity" is one of the essential presuppositions in Grothendieck's understanding of mathematics, where all fragments of mathematical knowledge (apparently dispersed: arithmetic, geometry, algebra, analysis, etc.) are in fact deeply *bonded* together. "Growth" is particularly characteristic of Grothendieck's approach: a singular object is always better comprehended in an overall, largely *expanded*, category of similar objects, and new definitions and theorems grow unceasingly along new, extended, realms. Finally, "Potentiality/Generality" is the plastic environment in which singular obstructions may be overcome, and the walls of particularity may be overthrown (the *general*, soft, "*étale* topos of a scheme", constructed to solve the *particular*, hirsute, Weil conjectures, is a good example of the force of abstraction and generality). In this way, Peirce's *summum bonum* is well tuned to capture Grothendieck's continually growing abstract imagination.

Grothendieck's three main known mathematical periods – (I): 1949–1957, (II): 1958–1970, (III): 1981–1991, see above – can also be observed through the lenses of Peirce's *summum bonum*. The *young* Grothendieck (1949–1957) inventions/discoveries (depending on the ontological commitment that we choose) are all examples of "continuous growth" in precise, analytic-algebraic,

senses: *(i)* the Ph.D. Thesis (Grothendieck, 1955) introduces *nuclear spaces* as locally convex topological vector spaces (continuous realm) where the defining semi-norms hold a telescopic (controlled growth) property; *(ii)* Sao-Paulo's *Résumé* (Grothendieck, 1956) reveals *Grothendieck's inequality* which bounds the growth of norms in continuous tensor products of Banach spaces; *(iii)* the proof of existence of *enough injectives* in abelian categories with appropriate infinitary axioms (Grothendieck, 1957a) codifies the reconstruction of homology (a continuity representation) thanks to derived functors (growing iterations); *(iv)* the generalization of Riemann-Roch (Grothendieck, 1957b) shows that homology is now projected (Chern classes) from the K-theory group, modulo a *deviation*, non-commutative, growing factor (Todd classes).
In a similar way, the *first-middle* Grothendieck (1958–1970) inventions/discoveries (for a defense of the importance of *both* image-driven discovery and language-driven invention in mathematical creativity see: Grothendieck, 1986) point to the force of "reasonable generality" in precise, geometrical-categorical, senses. The emergence of the great IHES machinery shows the growing importance of abstraction, in order to solve the most concrete: *(v) schemes* (Grothendieck, 1958; Grothendieck & Dieudonné 1960–66) propose new general foundations for algebraic geometry, and, in particular, *étale* morphisms between schemes *unify* the deep intuitions behind *non-ramification* in Galois and Riemann; *(vi) toposes* (Grothendieck, 1960–69), introducing new forms of extended general space, are able to reconstruct "number" through algebraic sheaves, and "magnitude" through complex-variable sheaves; *(vii) motives* (Grothendieck, c. 1967) postulate the general existence of reasonable common archetypes (standard conjectures) behind a multiplicity of (co)homologies.
Finally, the *second-middle* Grothendieck (1981–1991) develops in outstanding original ways other expressions of the *reasonable continuous growing of potentiality/generality*: *(viii)* an understanding of Teichmüller's tower produces insights on anabelian geometry (part of a general project on "topological algebra", a conceptual *inversion* of algebraic topology, where the continuum grows inside algebra) (Grothendieck, 1981, 1984); *(ix)* the unexpected occurrence of *dessins d'enfants* and *tame topology* softens the comprehension of topological surfaces (Grothendieck, 1984); *(x)* the search for the most abstract and general axioms (*stacks*, *n-categories*, *derivators*) unifies *both* homotopy and homology (Grothendieck, 1983, 1991). Grothendieck's growing imagination may be thus understood as a perfect instantiation of Peirce's *summum bonum*.

References

Badiou, A. (1998). *Court traité d'ontologie transitoire*. Paris: Seuil.

Barrena, S. (2015). *La belleza en Charles S. Peirce: Origen y alcance de sus ideas estéticas*. Pamplona: Eunsa.

Bringuier, G. (2015). *Alexandre Grothendieck: Itinéraire d'un mathématicien hors normes*. Toulouse: Privat.

De Tienne, A. (1996). *L'analytique de la représentation chez Peirce: La genèse de la théorie des catégories*. Bruxelles: Publication des Facultés universitaires Saint-Louis.

Douroux, P. (2016). *Alexandre Grothendieck: Sur les traces du dernier génie des mathématiques*. Paris: Allary Éditions.

Esposito, J. L. (1980). *Evolutionary metaphysics: The development of Peirce's theory of categories.* Athens, OH: Ohio University Press.

Fonseca, C. (2015). *Coronel lágrimas*. Barcelona: Anagrama.

Francastel, P. (1965). *La réalité figurative (Oeuvres, II)*. Paris: Denoël/Gonthier.

Grothendieck, A. (1955). *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Grothendieck, A. (1956). Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, *8*, 1–79.

Grothendieck, A. (1957a). Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Mathematical Journal Tohoku Math. J., *9*, 119–221.

Grothendieck, A. (1957b). Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch. *Seminaire de Geometrie Algebrique*, *6*, 20–71, Springer-Verlag (1971).

Grothendieck, A. (1958): The cohomology theory of abstract algebraic varieties. In *Proceedings International Congress of Mathematics Edinburgh* (pp. 103–118). Cambridge: Cambridge University Press, 1960.

Grothendieck, A. (1960–69). *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie*, VII volumes (12 parts), Berlin: Springer, 1970–1973 (multicopied originals, IHES, 1960–1969).

Grothendieck, A. (1981). *La longue marche à travers la théorie de Galois*, manuscript, 1600 pp.

Grothendieck, A. (1983). *Pursuing stacks*, manuscript, 629 pp.

Grothendieck, A. (1984). *Esquisse d'un programme*, manuscript, 57 pp.

Grothendieck, A. (1986). *Récoltes et semailles,* manuscript, 1252 pp.

Grothendieck, A. (1987). *La Clef des songes*, manuscript, 315 pp.

Grothendieck, A. (1991). *Les dérivateurs*, manuscript, 1796 pp.

Grothendieck, A. (c. 1967). *Motifs*, manuscript, 24 pp.

Grothendieck, A., & Dieudonné, J. (1960–66). *Éléments de géométrie algébrique*. Paris: Institut des hautes études scientifiques.

Kent, B. E. (1987). *Charles S. Peirce: Logic and the classification of the sciences*. Kingston and Montreal: McGill-Queen's University Press.

Leo, R. F. (1986). *Sulle tracce del segno: Semiotica, faneroscopia e cosmologia nel pensiero di Charles S. Peirce*. Firenze: La nuova Italia.

Peirce, C. S. (1931–1958): *Collected Papers*, 8 vols. (eds. Hartshorne, Weiss & Burks), Thoemmes Press, Bristol 1998 (new reprint of Harvard University Press original edition, 1931–1958); electronic edition (cd-rom), Intelex Corporation, 1992.

Petitot, J. (2009). *Per un nuovo illuminismo*. Milano: Bompiani.

Poizat, B. (2000). *A course in model theory: An introduction to contemporary mathematical logic.* New York: Springer.
Pradeau, Y. (2016). *Algèbre: Éléments de la vie d'Alexandre Grothendieck*. Paris: Allia.
Riemann, B. (1851). *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe* (*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Ph.D. Thesis). In B. Riemann (1898), *Œuvres mathématiques* (pp. 1–60). Paris: Gauthier-Villars.
Riemann, B. (1898). *Œuvres mathématiques*. Paris: Gauthier-Villars.
Rosensohn, W. L. (1974). *The phenomenology of Charles S. Peirce: From the doctrine of categories to phaneroscopy*. Amsterdam: Grüner.
Thuillier, J. (2003). *Théorie générale de l'histoire de l'art.* Paris: Odile Jacob.
Zalamea, F. (2012). *Peirce's logic of continuity: A conceptual and mathematical approach*. Boston, MA: Docent Press.

Il *Lettore Modello* dei problemi scolastici: un omaggio a Umberto Eco

Rosetta Zan
Università di Pisa

Sunto. *Nello scrivere un testo l'autore fa riferimento a un modello di lettore che possiede certe conoscenze sulla lingua e sul mondo: Umberto Eco lo chiama Lettore Modello.*
In questo breve contributo analizzeremo alcune caratteristiche del Lettore Modello di problemi scolastici standard.

Abstract. *Writing a text the author has in mind a model of reader, who possesses some knowledge about the language and about the world: Umberto Eco names this model the Model Reader.*
In this brief contribution the characteristics of the Model Reader of standard word problems are discussed.

La comprensione di un testo è un processo estremamente complesso, che richiede la cooperazione del lettore: come scrive Umberto Eco (1994), il testo è «una macchina pigra che si attende dal lettore molta collaborazione».
La complessità del processo d'interpretazione porta i linguisti a distinguere fra lettore empirico o reale (colui che materialmente legge il testo) e Lettore Modello (o Ideale, Implicito, Virtuale, …):

> Per organizzare la propria strategia testuale un autore deve riferirsi ad una serie di competenze […] che conferiscano contenuto alle espressioni che usa. Egli deve assumere che l'insieme di competenze a cui si riferisce sia lo stesso a cui si riferisce il proprio lettore. Pertanto prevederà un Lettore Modello capace di cooperare all'attualizzazione testuale come egli, l'autore, pensava, e di muoversi interpretativamente così come egli si è mosso generativamente. (Eco, 1979, p. 55)

Il Lettore Modello è caratterizzato non solo dalle intenzioni consapevoli dell'autore, ma anche dalle conoscenze e atteggiamenti che l'autore presuppone, che sono cioè necessarie per comprendere il testo: innanzitutto la lingua scelta, ma anche il lessico utilizzato, e la conoscenza delle cose del mondo (o conoscenza enciclopedica) cui fa riferimento.
Nell'attività matematica l'allievo è lettore di molti testi più o meno diversificati, ma c'è una tipologia di testi che presenta una notevole omogeneità: i testi dei problemi standard, quelli che in genere si trovano nei manuali e che vengono utilizzati in classe.

Ci chiediamo allora: qual è il Lettore Modello di un problema standard? Quali conoscenze e atteggiamenti presuppone l'autore, cioè sono necessari per 'comprendere' il testo del problema?
Certamente il Lettore Modello non deve pretendere che la storia narrata o la situazione descritta nel problema sia 'vera': deve quindi accettare tacitamente quello che Eco (1994) chiama "un *patto finzionale* con l'autore". Nel caso dei testi narrativi, osserva Eco, il lettore sospende l'incredulità riguardo a certe cose, e non ad altre:

> […] siamo disposti ad attenderci che i lupi parlino; ma quando Cappuccetto rosso viene divorata dal lupo pensiamo che sia morta (e questa convinzione è molto importante per la catarsi finale, e per provare il piacere straordinario della sua resurrezione). Pensiamo che il lupo sia peloso e con le orecchie ritte, più o meno come i lupi dei boschi reali, e ci pare naturale che Cappuccetto Rosso si comporti da bambina, e sua mamma da donna adulta preoccupata e responsabile. Perché? Perché così avviene nel mondo della nostra esperienza, un mondo che per ora, senza troppi impegni ontologici, chiameremo mondo reale. […] Pare dunque che, leggendo storie di finzione, noi sospendiamo l'incredulità riguardo a certe cose, e non ad altre. (Eco, 1994, p. 94)

Nel caso del testo di un problema standard invece il patto finzionale è totalizzante, e al Lettore Modello si chiede di sospendere l'incredulità su tutto. Il mondo dei problemi è infatti popolato da atleti che corrono per ore alla stessa velocità, da persone che leggono lo stesso numero di pagine ogni giorno o addirittura ogni ora, da mamme che vanno al mercato a comprare uova e sistematicamente ne rompono alcune per la strada. Il Lettore Modello deve quindi accettare di immaginare personaggi che si comportano come nessuno nel mondo reale farebbe o potrebbe fare (Zan, 2016):

<u>L'album di figurine</u>
Edoardo ha 96 figurine. Giocando con Luciano ne vince 24.
Incolla tutte le figurine sull'album, mettendone 8 per pagina. Quante pagine riempie?

Edoardo è un personaggio che difficilmente incontreremo nella vita reale: vince figurine senza trovare doppioni, e poi non si preoccupa di incollarle al posto giusto, oppure ha l'incredibile fortuna di poterle incollare tutte di seguito, in modo da riempire le pagine una dopo l'altra.

Il Lettore Modello del problema scolastico deve anche accettare che l'autore si comporti in modo reticente, tacendo volutamente informazioni che potrebbero risultare utili per la soluzione del problema:

<u>La spesa</u>
Anna e suo fratellino Marco vanno a fare la spesa per la mamma. Devono prendere il latte, il pane e il detersivo per la lavatrice. La mamma dà loro 10 €.
Al supermercato comprano tutto quello che la mamma ha chiesto.

Pagano 1,50€ per il latte, 1,40€ per il pane. Hanno di resto 3€.
Quanto è costato il detersivo per la lavatrice?

Se il narratore ha visto quanto i bambini hanno pagato per latte e pane, come mai non ha avuto modo di vedere quanto hanno pagato per il detersivo? In realtà chi legge sa bene che non è questo il punto: il narratore tace volutamente quello che presumibilmente sa, perché vuole porre una domanda che prevede un certo processo risolutivo.

Ancora più frequentemente il Lettore Modello deve accettare che il narratore si comporti in modo perverso, dando in modo contorto le informazioni utili per la soluzione:

<u>L'insalata</u>
Un agricoltore raccoglie 50 cespi d'insalata. Ne vende la metà a € 2 cadauno e l'altra metà diminuita di 5 unità a € 1,50 cadauno. Quanto incassa?

Infine il Lettore Modello di un problema deve accettare di rispondere a domande che nessuna persona di buon senso si porrebbe:

<u>I tartufi</u>
In un cesto sono contenuti 1,75 kg di tartufi neri, che devono essere divisi fra tre persone in modo tale che alla seconda spettino 30 g in più della prima e alla terza 40 g in più della seconda. Quanti grammi di quei tartufi riceverà ogni persona?

Tra l'altro in questo testo oltre alla presenza di una domanda assurda si ritrovano anche tutte le criticità che abbiamo evidenziato in precedenza.

Alla luce di quanto osservato, non possiamo allora stupirci di due fenomeni apparentemente opposti, documentati con molta ricchezza nei tanti lavori sui problemi di Bruno D'Amore (si veda ad esempio D'Amore, 2014).
Da un lato ci sono i bambini che diventano diligenti Lettori Modello di problemi stereotipati e scarsamente realistici … e poi rispondono altrettanto diligentemente a problemi 'assurdi' quali *L'età del capitano*, nelle sue varie versioni. Ad esempio di fronte al problema:

In un prato ci sono 20 pecore, 7 capre, e 2 cani. Quanti anni ha il pastore?

la maggior parte dei bambini somma i tre dati numerici, e risponde che il pastore ha 29 anni.

Dall'altro ci sono i bambini che più o meno inconsapevolmente non riescono a vestire i panni di un Lettore Modello così avulso dalla realtà, e non rinunciano ad attribuire un senso a quello che leggono.
Così di fronte al problema precedente Luca (3ª primaria) risponde:

“Ho fatto un ragionamento particolare: il pastore se ha due cani per così poche bestie uno dei due cani forse gli serve perché è non vedente. Quindi deduco che abbia sui 70–76 anni”.
Lettori come Luca sono tagliati fuori dal gioco dei problemi: le loro risposte in genere vengono considerate scorrette e i loro comportamenti addirittura irrazionali, soprattutto quando non ci si preoccupa di chiedere loro il ragionamento fatto.
È quello che può succedere nel caso di domande a risposta chiusa, come nel seguente quesito INVALSI destinato alla seconda primaria:

La gita
Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita.
Restano due posti liberi.
Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?
A. ☐ 19
B. ☐ 21
C. ☐ 23

La domanda risulta estremamente difficile: solo il 17,3% del campione risponde ‘correttamente’, cioè sceglie la risposta C, ottenuta sommando il numero degli allievi maschi, delle femmine e delle insegnanti (21) e quindi aggiungendo i due posti rimasti liberi.
In effetti in una sperimentazione che abbiamo condotto su questo problema chiedendo ai bambini di spiegare il ragionamento fatto, abbiamo visto che molti scelgono la risposta B, considerata scorretta e scelta dal 36,2% del campione nazionale. Dalle nostre sperimentazioni è emerso che la risposta non è necessariamente frutto di un errore, ma può essere invece la conclusione di un ragionamento sensato e soprattutto fortemente legato al vissuto dei bambini.
Diversi bambini dichiarano infatti di aver sommato il numero dei bambini e dei posti liberi senza contare le maestre “perché le maestre quando usciamo tutti in pulmino non si mettono a sedere”, oppure “ perché le maestre stanno in piedi a guardare come va la situazione”.

In conclusione, diventare Lettore Modello di un problema standard richiede spesso ai nostri allievi di rinnegare quelle conoscenze che sono invece necessarie per comprendere il mondo reale e i suoi abitanti.
Se la lettura di un romanzo pretendesse questi sacrifici da un lettore, forse le persone che leggono sarebbero ancora meno di quelle che sono.
Ma i bambini non hanno libertà di scelta, e non possono rifiutarsi di affrontare testi di problemi formulati senza attenzione alla loro realtà.
Almeno … non concludiamo che sono *loro* ad essere ‘illogici’!

Riferimenti

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index Editore.

Eco, U. (1979). *Lector in fabula*. Milano: Bompiani.

Eco, U. (1994). *Six Walks in the Fictional Woods*. Cambridge, MA: Harvard University Press (trad. it. *Sei passeggiate nei boschi narrative*, 2000, Milano: Bompiani).

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: Difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Roma: Carocci.